第15卷 第1期 自动化学报 Vol. 15, No. 1
1989年1月 ACTA AUTOMATICA SINICA Jan., 1989

利用功率谱分解与系统辨识法对离散系统模型进行降阶处理

李 高 盈
(空军导弹学院)

摘 要

本文介绍一种离散系统模型降阶的混合方法．从能量影响的观点到系统的输出，系统中处于主导地位的特征值会在系统输出产生优势的动态模态，从而确定降阶模型传函中分母的参数估值，再用辨识技术求出分子参数．降阶模型与原系统相比，暂态响应与稳态响应中均有很好的逼近．

一、引 言

模型降阶的方法很多，但都不能十全十美，如 Pade 逼近具有明显的计算优势，但不能保证原始系统的稳定性；主导特征值的聚集法虽能保证原始系统的稳定性，但降阶后逼近不太满意．本文介绍的方法弥补了以上两点．

对给出的每一种动态模态或加权，设输入为白噪声，则系统输出端的功率谱归于每一种动态模态可称作该系统传递函数的能量散布．

二、基 本 概 念

一个线性离散系统用 $ARMA$ 模型表示为：

$$(1+\phi_1 B+\phi_2 B^2+\cdots+\phi_n B^n)Y_k=(\theta_0+\theta_1 B+\theta_2 B^2+\cdots+\theta_{n-1}B^{n-1})U_k, \tag{1}$$

或传递函数形式：

$$Y_k=\frac{\theta(B)}{\phi(B)}U_k=G(B)U_k. \tag{2}$$

其中 B 为算子，定义如下：

$$BU_k=U_{k-1}, \tag{3}$$

或等效为 $B=Z^{-1}$，传递函数 $G(B)$ 可表示为：

$$G(B)=\frac{\theta_0+\theta_1 B+\theta_2 B^2+\cdots+\theta_{n-1}B^{n-1}}{1+\phi_1 B+\phi_2 B^2+\cdots+\phi_n B^n}$$

本文于1986年12月10日收到．

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{g_i}{1-\lambda_i B} = \sum_{i=1}^{n} g_i \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda_i B)^j$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} g_i \lambda_i^j \right) B^j = \sum_{j=0}^{\infty} G_j B^j, \quad |\lambda_i| < 1. \tag{4}$$

式中，$G_j = \sum_{i=1}^{n} g_i \lambda_i^j$. G_j 称为格林函数，用 G_j 由 U_k 的定义可表示 Y_k:

$$Y_k = \sum_{j=-\infty}^{k} G_j U_{k-j} = \sum_{j=-\infty}^{k} G_{k-j} U_j. \tag{5}$$

设 $j<0$ 时，$G_j = U_j = 0$，Y_k 的自协方差函数为

$$\nu(\tau) = E\{Y_k Y_{k+\tau}\}. \tag{6}$$

(5)代入(6)得:

$$\nu(\tau) = E\left\{ \sum_{j=-\infty}^{k} G_{k-j} X_j \sum_{i=-\infty}^{k+\tau} G_{k+\tau-i} X_i \right\}$$

$$= \sum_{j=-\infty}^{k} G_{k-j} \left\{ \sum_{i=-\infty}^{k+\tau} G_{k+\tau-i} E\,[X_j X_i] \right\}$$

$$= \sigma_x^2 \sum_{j=-\infty}^{k} G_{k-j} G_{k+\tau-j}. \tag{7}$$

式中 σ_x^2 为白噪声 X_j 的方差. G_j 代入(7)得:

$$\nu(\tau) = \sigma_x^2 \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{g_i g_j}{1-\lambda_i \lambda_j} \lambda_j^\tau. \tag{8}$$

令

$$d_j = \sigma_x^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{g_i g_j}{1-\lambda_i \lambda_j}, \quad 则\ \nu(\tau) = \sum_{j=1}^{n} d_j \lambda_j^\tau. \tag{9}$$

d_j 称为自协方差函数的系数. 事实上，当输入为白噪声时，系统受能量的影响相当于 λ_j 的动态模态在输出端产生的总偏差，确切地说应等于 d_j. 当 $\tau = 0$ 时，λ_j 的动态模态定义为:

$$D_j \triangleq \frac{d_j}{\nu(0)} = \frac{d_j}{\sum_{i=1}^{n} d_i}. \tag{10}$$

据(10)式定义，输出的总能量可作为系统每一个动态模态重要性的量度.

若系统为单极点或多极点，可写成:

$$G(B) = \sum_{i=1}^{n_0} \frac{g_i}{1-\lambda_i B} + \sum_{i=1}^{\nu_1} \frac{h_i}{(1-\lambda_{n_0+1} B)^i}$$

$$+ \sum_{i=1}^{\nu_2} \frac{p_i}{(1-\lambda_{n_0+2} B)^i} + \cdots + \sum_{i=1}^{\nu_m} \frac{g_i}{(1-\lambda_{n_0+m} B)^i}.$$

式中，$n_0 + m = n$，n_0 为单极点数，m 为重极点数 ν_i 为相重次数. 同理，

$$G(B) = \sum_{i=1}^{n_0} \sum_{j=0}^{\infty} G_{ij}B^j + \sum_{i=n_0+1}^{n_0+m} \sum_{k=0}^{\infty} G_{ik}B^k,$$

$$\nu(0) = \sum_{j=1}^{n} d_j,$$

式中，
$$d_j = \sigma_x^2 \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} G_{jk}G_{ik} \right\},\ j = 1, 2, \cdots, n,$$

三、用功率谱分解简化模型

原始系统为 n 阶系统：

$$G(B) = \frac{\theta_0 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \cdots + \theta_{n-1}B^{n-1}}{1 + \phi_1 B + \phi_2 B^2 + \cdots + \phi_n B^n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{g_i}{1 - \lambda_i B}.$$

单位阶跃响应定义如下：

$$\frac{1}{1-B} G(B) \triangleq \frac{k}{1-B} + F(B).$$

式中，$k = \sum_{i=1}^{n} \frac{g_i}{1 - \lambda_i}$ 为稳态值，

$$F(B) = \sum_{i=1}^{n} \frac{g_i/(1 - 1/\lambda_i)}{1 - \lambda_i B} \triangleq \sum_{i=1}^{n} \frac{f_i}{1 - \lambda_i B}$$ 为暂态值。

如果 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 产生比其他动态模态较大的响应，则降阶模型的分母多项式为：

$$\phi^*(B) = 1 + \phi_1^* B + \phi_2^* B^2 + \cdots + \phi_m^* B^m,\ m < n.$$

降阶模型可简单表示为：

$$G(B) \approx G^*(B) = \frac{\theta_0^* + \theta_1^* B + \cdots + \theta_{m-1}^* B^{m-1}}{1 + \phi_1 B + \cdots + \phi_m^* B^m}.$$

$\phi_1^*, \phi_2^* \cdots, \phi_m^m$ 已由散布分析得出：$\theta_0^*, \theta_1^* \cdots, \theta_{m-1}^*$ 由最小二乘得出，不再赘述。

四、例 题

—

8 阶系统传函如下：

$$G(Z) = \{0.1625Z^7 + 0.125Z^6 - 0.0025Z^5 + 0.00525Z^4 - 0.02262Z^3 - 0.000875Z^2 + 0.003Z - 0.0004125\} / \{Z^8 - 0.63075Z^7 - 0.4185Z^6 + 0.07875Z^5 - 0.057Z^4 + 0.1935Z^3 + 0.09825Z^2 - 0.0165Z + 0.00225\},$$

$$G(B) = B\left\{\sum_{i=1}^{8} \frac{g_i}{1-\lambda_i B}\right\},$$

$$\frac{G(B)}{1-B} = B\left\{\frac{k}{1-B} + F(B)\right\},$$

$\lambda_{1,2} = -0.5876 \mp j0.0955$, 　　$\lambda_{5,6} = 0.0773 \mp j0.1078$,

$\lambda_{3,4} = -0.0541 \mp j0.6557$, 　　$\lambda_{7,8} = 0.8797 \mp j0.2446$,

$k = 1.077345$,

$g_{1,2} = -0.0047 \pm j0.0341$, 　　$g_{5,6} = 0.0099 \mp j0.0028$,

$g_{3,4} = -0.0038 \pm j0.0109$, 　　$g_{7,8} = 0.0799 \pm j0.1212$,

$f_{1,2} = 0.0017 \mp j0.0216$, 　　$f_{5,6} = -0.0102 \pm j0.0042$,

$f_{3,4} = -0.0020 \mp j0.0090$, 　　$f_{7,8} = -0.5281 \pm j0.0668$.

下面表中列出 $G(B)$ 和 $F(B)$ 的能量散布分析情况。可看出，应去掉 $\lambda_1, \cdots \lambda_6$.降阶模型分母为：

$$\phi^*(B) = 1 + \phi_1^* B + \phi_2^* B^2 = 1 - 1.7594B + 0.8337B^2.$$

θ_0^*, θ_1^* 由最小二乘辨识得出。故

$$G^*(B) = \frac{0.15024B - 0.07017B^2}{1 - 1.7594B + 0.8337B^2}.$$

表 1　能量散布分析 $\sigma_x^2 = 1$

动态模态	$G(B)$	$F(B)$
λ_1, λ_2	$d_1 + d_2$　0.000228 $(D_1 + D_2)$　(0.0744%)	−0.00058 (−0.0138%)
λ_3, λ_4	$d_3 + d_4$　0.001467 $(D_3 + D_4)$　(0.4788%)	0.011387 (0.2972%)
λ_5, λ_6	$d_5 + d_6$　0.003278 $(D_5 + D_6)$　(1.0701%)	0.02234 (0.5846%)
λ_7, λ_8	$d_7 + d_8$　0.301328 $(D_7 + D_8)$　(98.3767%)	3.798342 (99.132%)

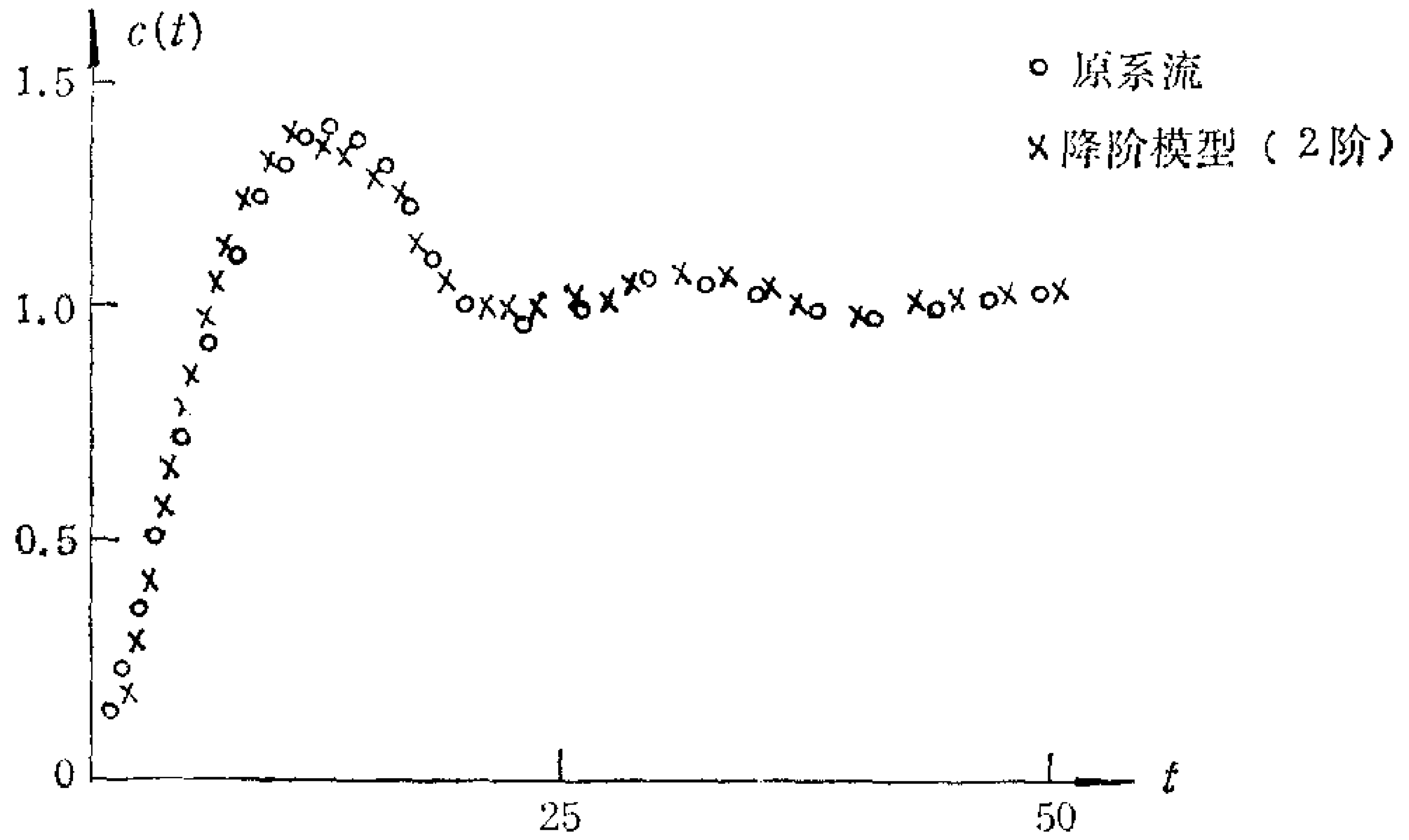

图 1

五、结 论

此方法的优点:(1)原系统稳定,降阶模型亦稳定.(2)降阶过程由计算机完成.(3)每个动态模态的重要程度能测量.对系统辨识而言,能在暂态和稳态时都给出好的逼近.

参 考 文 献

[1] Warwick, K., A new Approach to Reduced-order Modelling, IEE. Control Theory and Appl., 1984.
[2] Appiah, R. K., Linear Model Reduction Using Hurwitz Polynomial Approximation, IEE. Control, 1978.
[3] Shamash, Y., Linear System Reduction Using Pade Approximation Method, Control, 1975.
[4] 系统辨识,三航院合编,1985.
[5] 近代谱估计,西北电讯工程学院编,1984.

MODEL REDUCTION OF DISCRETE SYSTEMS BY POWER DECOMPOSITION AND SYSTEM IDENTIFICATION

LI GAOYING
(*Air Force Missile Institute*)

ABSTRACT

A mixed method of discrete system model reduction is proposed. From the viewpoint of energy contribution in system output, the dynamic modes with dominant energy contribution will be influenced by those with dominant eigenvalues. Having determined the denominator of the reduced model, the parameters of the numerator can be found by identification technique. The reduced model gives good approximation in both the transient and the steady state responses of the original system.