第15卷 第2期　　自 动 化 学 报　　Vol. 15, No. 2
1989年3月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　Mar., 1989

利用切比雪夫级数辨识线性分布参数系统

曹长修　周　锋
（重 庆 大 学）

摘　　要

本文提出一种微分运算矩阵法，通过切比雪夫级数和最小二乘法辨识线性分布参数系统的参数．该方法运算简洁，收敛速度快．文中给出了计算实例．

关键词：切比雪夫多项式，分布参数系统，辨识，微分矩阵．

近年来国外运用正交多项式进行系统分析、参数辨识、最优控制和模型简化等已做了不少工作．由于正交多项式具有收敛快、非微分、非积分等优点，便于计算，所以引起人们极大的兴趣，而用切比雪夫级数分析系统则是近几年才开始的．本文提出一种微分运算矩阵法，利用切比雪夫级数和最小二乘估计，辨识分布参数系统的参数．通过微分运算矩阵，将偏微分方程转换为矩阵方程，适合于在计算机上求解．与目前国外采用的积分运算矩阵法相比，这种方法使运算更为简洁，并且不需要考虑边界条件或初始条件．

一、双位移切比雪夫级数

设二元函数 $y(x,t)$ 在区间 $x\in[0,1]$ 与 $t\in[0,1]$ 上绝对可积，则可按切比雪夫级数展开，由于切比雪夫级数收敛速度很快[1]，故可只取有限项

$$y(x,t)\approx\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}T_j(x)y_{ij}T_i(t)=\boldsymbol{t}_m^T(x)Y\boldsymbol{t}_n(t). \tag{1}$$

式中 Y 是切比雪夫系数矩阵

$$Y=\begin{bmatrix}y_{0,0} & y_{0,1}\cdots y_{0,n-1}\\ y_{1,0} & y_{1,1}\cdots y_{1,n-1}\\ \vdots & \vdots\\ y_{m-1,0} & \cdots\quad y_{m-1,n-1}\end{bmatrix}. \tag{2}$$

$\boldsymbol{t}_m(x)$ 和 $\boldsymbol{t}_n(t)$ 分别是 $m\times 1$ 与 $n\times 1$ 维切比雪夫向量．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{t}_m(x)&=[T_0(x)\ \ T_1(x)\ \ \cdots\ \ T_{m-1}(x)]^T,\\ \boldsymbol{t}_n(t)&=[T_0(t)\ \ T_1(t)\ \ \cdots\ \ T_{n-1}(t)]^T.\end{aligned} \tag{3}$$

切比雪夫向量中的各个分量则是第一类平移切比雪夫多项式中的对应项，即

本文于1987年5月23日收到．

$$
\begin{aligned}
&T_0(\lambda) = 1,\\
&T_1(\lambda) = 1 - 2\lambda,\\
&T_2(\lambda) = 1 - 8\lambda + 8\lambda^2,\\
&\quad\vdots\\
&T_{i+1}(\lambda) = 2\cdot(1-2\lambda)\cdot T_i(\lambda) - T_{i-1}(\lambda).
\end{aligned}
\tag{4}
$$

根据切比雪夫多项式的正交特性以及最佳均方逼近的要求，切比雪夫系数矩阵 Y 中的元素 y_{ij} 可按下面公式计算

$$y_{00} = \frac{1}{\pi^2}\int_0^1\int_0^1 \frac{y(x,t)}{\sqrt{x-x^2}\cdot\sqrt{t-t^2}}\,dx\,dt, \tag{5}$$

$$y_{0i} = \frac{2}{\pi^2}\int_0^1\int_0^1 \frac{y(x,t)\cdot T_i(t)}{\sqrt{x-x^2}\cdot\sqrt{t-t^2}}\,dx\,dt,\quad (i=1,2,\cdots n-1). \tag{6}$$

$$y_{j0} = \frac{2}{\pi^2}\int_0^1\int_0^1 \frac{y(x,t)\cdot T_j(x)}{\sqrt{x-x^2}\cdot\sqrt{t-t^2}}\,dx\,dt,\ (j=1,2,\cdots m-1). \tag{7}$$

$$
\begin{aligned}
&y_{ji} = \frac{4}{\pi^2}\int_0^1\int_0^1 \frac{T_j(x)y(x,t)T_i(t)}{\sqrt{x-x^2}\cdot\sqrt{t-t^2}}\,dx\,dt,\\
&i=1,2,\cdots n-1;\ j=1,2,\cdots m-1.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

二、微分运算矩阵

由(4)式得

$$\boldsymbol{t}_r(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 1 & -2 & & & \\ 1 & -8 & 8 & & \\ 1 & -18 & 48 & -32 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \lambda^{r-1} \end{bmatrix} = B\boldsymbol{e}(\lambda). \tag{9}$$

式中 $\boldsymbol{t}_r(\lambda)$ 是 $r\times 1$ 维切比雪夫向量，B 是满秩阵，

$$\boldsymbol{e}(\lambda) = [1\ \lambda\ \lambda^2\cdots\lambda^{r-1}]^T,$$

$$\frac{d}{d\lambda}\boldsymbol{e}(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & 2 & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & r-1 & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{e}(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & 2 & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & r-1 & 0 \end{bmatrix} B^{-1}\boldsymbol{t}_r(\lambda).$$

进一步可得对切比雪夫向量的微分

$$\frac{d}{d\lambda}\boldsymbol{t}_r(\lambda) = B\begin{bmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & 2 & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & r-1 & 0 \end{bmatrix} B^{-1}\boldsymbol{t}_r(\lambda) = D_r\boldsymbol{t}_r(\lambda) \tag{10}$$

式中 r 阶方阵 D_r 称为微分运算矩阵，根据切比雪夫多项式的性质可得

$$D_r = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & & & & \\ -2 & 0 & 0 & & \mathbf{0} & & \\ 0 & -8 & 0 & & & & \\ -6 & 0 & -12 & \ddots & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & & \\ -(r-1) & -2(r-1) & -2(r-1) & & & & \\ \cdot[1-(-1)^{r-1}] & \cdot[1+(-1)^{r-1}] & \cdot[1-(-1)^{r-1}] & \cdots & -4(r-1) & 0 & 0 \\ -r[1-(-1)^r] & -2r[1+(-1)^r] & -2r[1-(-1)^{r-1}] & \cdots & 0 & -4r & 0 \end{bmatrix}. \tag{11}$$

于是偏导数可化为矩阵的乘积

$$\frac{\partial}{\partial t} y(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}[\boldsymbol{t}_m^T(x) Y \boldsymbol{t}_n(t)] = \boldsymbol{t}_m^T(x) Y D_n \boldsymbol{t}_n(t), \tag{12}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} y(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}[\boldsymbol{t}_m^T(x) Y \boldsymbol{t}_n(t)] = \boldsymbol{t}_m^T(x) D_m^T Y \boldsymbol{t}_n(t). \tag{13}$$

三、运用切比雪夫级数辨识线性分布参数系统

考虑二阶偏微分方程

$$a_5 \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} + a_4 \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t \partial x} + a_3 \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial^2 x} + a_2 \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} + a_1 \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} + a_0 y(x,t) = u(x,t).$$

式中 $a_0, a_1, \cdots a_5$ 为待辨识的参数，$u(x,t)$ 是输入函数.

在区域 $t \in [0,1]$, $x \in [0,1]$ 上有

$$\boldsymbol{t}_m^T(x)\{a_5 Y D_n^2 + a_4 D_m^T Y D_n + a_3 D_m^{T^2} Y + a_2 Y D_n + a_1 D_m^T Y + a_0 Y - V\}\boldsymbol{t}_n(t) = 0,$$

式中 $u(x,t) = \boldsymbol{t}_m^T(x) V \boldsymbol{t}_n(t)$.

于是得到

$$a_5 Y D_n^2 + a_4 D_m^T Y D_n + a_3 D_m^{T^2} Y + a_2 Y D_n + a_1 D_m^T Y + a_0 Y = V. \tag{14}$$

式中矩阵 Y, V 和D均为已知,所以有

$$\begin{bmatrix} (YD_n^2)_1 & (D_m^T Y D_n)_1 \cdots (Y)_1 \\ (YD_n^2)_2 & (D_m^T Y D_n)_2 \cdots (Y)_2 \\ \vdots & \vdots \\ (YD_n^2)_n & (D_m^T Y D_n)_n \cdots (Y)_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_5 \\ a_4 \\ a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (V)_1 \\ (V)_2 \\ \vdots \\ (V)_n \end{bmatrix}. \tag{15}$$

式中 $(YD_n^2)_i$, $(D_m^T Y D_n)_i, \cdots (V)_i$ 分别为(13)式中对应矩阵 $YD_n^2, D_m^T Y D_n, \cdots Y, V$ 的第 i 列.

最后对(14)式用最小二乘法便可求出待辨参数 $a_0, a_1, \cdots a_5$.

下面给出一个一阶分布参数系统的计算实例.

设分布参数系统结构为

$$a_4 \frac{\partial}{\partial t} y(x,t) + a_1 \frac{\partial}{\partial x} y(x,t) + a_0 y(x,t) = u(x,t),\ u(x,t) = t.$$

输出值如表 1 所示．取 $m = n = 4$.

表 1

x \ t	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
0.0	−.500000	−.300000	−.100000	.100000	.300000	.500000
0.2	−.318731	−.118731	.081269	.281269	.481269	.681269
0.4	−.170320	.029680	.229680	.429680	.629680	.829680
0.6	−.048812	.151188	.351188	.551188	.751188	.951188
0.8	.050671	.250671	.450671	.650671	.850671	1.050671
1.0	.132121	.332121	.532121	.732121	.932121	1.132121

由此解出

$$a_2 = -0.50647020,\quad a_1 = 1.01030300,\quad a_0 = 0.99996080.$$

与实际值 $a_4 = 0.5\quad a_1 = 1.0,\ a_0 = 1.0$ 非常接近.

如在输出端加上标准方差为 0.125 的零均值白噪声,则可得系数矩阵为

$$Y = \begin{bmatrix} .32888790 & -.47288670 & .01774902 & -.01470214 \\ -.30661450 & -.00361584 & -.00589887 & .02624060 \\ -.02837615 & -.00845915 & -.07587727 & .04790967 \\ .00467818 & .01665452 & .05950015 & .02146916 \end{bmatrix}.$$

考虑到切比雪夫级数收敛很快,对应于 $T_k(\lambda)$, $k > 4$ 的系数可忽略不计[3],可算出

$$a_2 = -0.44089840,\quad a_1 = 1.07049200,\quad a_0 = 1.05558200.$$

四、总　结

应用切比雪夫多项式将微分运算转换为代数运算，不仅简化了运算而且还适合于在计算机上求解．文中提出的微分运算矩阵法对于偏微分运算来说更为简洁、自然、有效．与国外对同类问题所采用的积分运算矩阵[2] 相比，不但省去了将描述系统的微分方程转化为积分方程的步骤,而且边界条件或初始条件不影响参数求解.

参　考　文　献

[1] Hamming, R.W., Numerical Methods for Scientists and Engineers, Second Edition, New York, McGraw-Hill, 1973.

[2] Horng, I.R., Chou, J. H. and Tsai, C. H., Analysis and Identification of Linear Distributed Systems via Chebyshev Series, *Int. J. Sys. Sci.*, **17**(1986), 1089—1095.

[3] Mouroutsos, S. G., et al., Parameter Identification of a Class of Time Varying Linear Systems via Polynomial Series, *Int. J. Sys. Sci*, **17**(1986),969—981.

IDENTIFICATION OF LINEAR DISTRIBUTED SYSTEM BY CHEBYSHEV SERIES

CAO CHANGXIU ZHOU FENG
(*Chongqing University*)

ABSTRACT

In this paper, a method of operational matrix of differentiation is introduced in the identification of coefficients of linear distributed system by using Chebyshev series and least squares. The algorithm is straightforward and converges rapidly. Illustrative example is presented.

Key words ——Chebyshev polynomials; distributed parameter systems; identification; differential matrix.

神经元网络及其应用学术讨论会
征文通知

为促进我国神经网络、人工智能及智能机研究的发展,交流神经元网络理论及应用方面的研究成果与经验,加强学术交流,活跃学术气氛,中国自动化学会和中国科学院自动化研究所决定在1989年10月举办“神经元网络及其应用”学术讨论会.欢迎从事神经元网络研究的科技工作者踊跃投稿.

一、征文主要内容

1.神经元网络模型及算法的研究; 2.神经元网络的生物物理基础; 3.神经元网络与知识系统; 4.神经元网络与模式识别; 5.神经元网络在计算机视觉及图象处理中的应用; 6.神经元网络与控制; 7.神经元网络在形式语言及自然语言中的应用.

二、征文要求

1.应征论文全文寄至会议联系人,截止日期1989年6月15日;

2.应征论文要求主题明确、论据充分,一般不超过5000字;

3.凡在全国公开发行刊物或全国学术会议上发表及宣传过的论文此次不再征集.

三、会议联系人

中国科学院自动化研究所业务办公室 周如玉 电话: 281397

中国自动化学会

中国科学院自动化研究所