第 15 卷 第 2 期　　自 动 化 学 报　　Vol. 15, No. 2
1989 年 3 月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　Mar., 1989

分布系统的频域极点配置方法

钟晴秋　　蒋慰孙

(华东化工学院)

摘　　要

本文就一类分布参数系统的有限极点配置问题进行了研究. 文中给出了两种闭环控制设计方法,由此得到的控制算法简单、结构紧凑可实现,并适用于自身不稳定的对象.

关键词: 分布参数系统,频域,传递函数,偏微分方程.

一、引　　言

许多实际的分布系统可用含有多个滞后因子的传递函数来描述. 这种系统的极点包括由滞后因子 τ_α 产生的无限多个在复平面左半面无穷远处的所谓"无穷极点", 以及由系统的集中部分产生的有限个分布在原点附近一个有界域内的所谓"有限极点". 经典的反馈控制的结果是对所有以上的极点均产生影响并移动它们, 因而极可能导致不稳定的闭环系统. 有限极点配置是指只考虑那些包括了系统可能有的所有不稳定极点在内的有限极点的重新配置,所以可认为这是一种比较理想的稳定化方法.

Wolovich 提出的关于集中参数系统的频域极点配置法[1], 由其较之于时域法更为简单的算法获得了广泛的应用,并由 Ichikawa[2] 推广到了纯滞后系统. 这里我们将研究如何进行分布系统的频域有限极点配置.

二、频域有限极点配置的闭环控制算法一

考虑被控分布系统的传递函数可表示为

$$G(s)=\frac{y(s)}{u(s)}=\frac{\sum_{\alpha=1}^{r} L_\alpha(s)e^{-\tau_\alpha s}}{M(s)}. \tag{1}$$

τ_α 为各不相同的滞后时间, $M(s)$ 为 n 阶首一多项式, 设它的所有零点 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是单重的. $L_\alpha(s)$ 为 m 阶多项式 $(0\leqslant m\leqslant n-1)$. 再设期望的控制系统特征多项式 $M_d(s)$ 为 n 阶首一多项式. 首先定义

本文于 1987 年 3 月 6 日收到.

$$\frac{M - M_d}{rM} = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{s - \lambda_i}, \tag{2}$$

$$\frac{f_\alpha}{M} = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{s - \lambda_i} e^{\lambda_i \tau_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \cdots, r. \tag{3}$$

以此获得常数 a_i 及多项式 $f_\alpha(\partial f_\alpha \leqslant n - 1)$.

考虑多项式方程

$$k_\alpha M + qL_\alpha = qf_\alpha + g_\alpha M_d, \quad \alpha = 1, 2, \cdots, r. \tag{4}$$

其中 q 为任意选定的 n 阶首一稳定多项式,未知多项式 k_α 与 g_α 的阶数至多为 $n-1$，于是由上式可确定 k_α 和 g_α.

这时有如下定理:

定理 1. 控制律

$$u(t) = \sum_{\alpha=1}^{r} \frac{k_\alpha(p)}{q(p)} u(t - \tau_\alpha) + y(t) + \sum_{\alpha=1}^{r} \int_{-\tau_\alpha}^{0} \sum_{i=1}^{n} a_i e^{-\lambda_i \sigma} u(t + \sigma) d\sigma$$
$$- \sum_{\alpha=1}^{r} \frac{g_\alpha(p)}{q(p)} v(t - \tau_\alpha) + v(t) \tag{5}$$

是可实现的并使所得闭环控制系统获得期望的有限极点配置,其中 p 为微分算子, v 为外部参考输入信号.

证明. 首先,因为 k_α, g_α 的阶数至多为 $n-1$,而 q 的阶数为 n,故 k_α/q 和 g_α/q 是可以实现的. 又因为 $a_i e^{-\lambda_i \sigma}$ 在区间 $-\max\limits_{\alpha}\{\tau_\alpha\} \leqslant \sigma \leqslant 0$ 上有限,且 $u(t+\sigma)$ 为控制信号的历史值,则对任意时间 t, (5)式中的积分能够确定. 从而(5)式在理论上是可以实现的. 进一步对(5)式两边取拉氏变换并计算积分得到

$$u = \sum_{\alpha=1}^{r} \frac{k_\alpha}{q} e^{-\tau_\alpha s} u + y + \sum_{\alpha=1}^{r} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{s - \lambda_i} u - \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i e^{\lambda_i \tau_\alpha}}{s - \lambda_i} e^{-\tau_\alpha s} u \right)$$
$$+ \left(1 - \sum_{\alpha=1}^{r} \frac{g_\alpha}{q} e^{-\tau_\alpha s}\right) v. \tag{6}$$

用 $(Mq)^{-1} e^{-\tau_\alpha s} u$ 同乘方程(4)的两端并将 r 个方程相加有

$$\sum_{\alpha=1}^{r} \frac{k_\alpha}{q} e^{-\tau_\alpha s} u + y = \sum_{\alpha=1}^{r} \frac{f_\alpha}{M} e^{-\tau_\alpha s} u + \frac{M_d}{M} \sum_{\alpha=1}^{r} \frac{g_\alpha}{q} e^{-\tau_\alpha s} u. \tag{7}$$

将上式及(2),(3)式一并代入(6)式得到

$$u = \sum_{\alpha=1}^{r} \frac{f_\alpha}{M} e^{-\tau_\alpha s} u + \frac{M_d}{M} \sum_{\alpha=1}^{r} e^{-\tau_\alpha s} u + \sum_{\alpha=1}^{r} \frac{M - M_d}{rM} u$$
$$- \sum_{\alpha=1}^{r} \frac{f_\alpha}{M} e^{-\tau_\alpha s} u + \left(1 - \sum_{\alpha=1}^{r} \frac{g_\alpha}{q} e^{-\tau_\alpha s}\right) v.$$

对上式加以整理有

$$\frac{u}{M} = \frac{1}{M_d} v, \tag{8}$$

则

$$y=\frac{\sum_{\alpha=1}^{r} L_\alpha e^{-\tau_\alpha s}}{M} u=\frac{\sum_{\alpha=1}^{r} L_\alpha e^{-\tau_\alpha s}}{M_d} v. \tag{9}$$

这说明闭环控制系统具有期望的特征多项式．于此完成了定理 1 的证明．

三、频域有限极点配置的闭环控制算法二

M，M_d 意义仍同上节．任意选定 n 阶首一多项式 q，它具有单重的稳定零点 $\beta_i(i=1,2,\cdots,n)$．设有多项式 k_α 及 f_α，其阶数均至多为 $n-1$．考虑如下多项式方程

$$k_\alpha M+qL_\alpha=qf_\alpha,\quad \alpha=1,2,\cdots,r. \tag{10}$$

显然，上式确定了 k_α 和 f_α．定义

$$\frac{f_\alpha}{M}=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_{i\alpha}}{s-\lambda_i}e^{\lambda_i\tau_\alpha}, \tag{11}$$

同时设未知的其最高阶次项系数为 $\frac{1}{r}$ 的 n 阶多项式 g_α 和常数 $b_{i\alpha}(i=1,2,\cdots,n)$ 满足下式

$$\frac{qM/r-g_\alpha M_d}{Mq}=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_{i\alpha}}{s-\lambda_i}+\sum_{i=1}^{n}\frac{b_{i\alpha}}{s-\beta_i}. \tag{12}$$

上式可以唯一地确定 g_α，$b_{i\alpha}$．再定义

$$\frac{w_\alpha}{q}=\sum_{i=1}^{n}\frac{b_{i\alpha}}{s-\beta_i}e^{\beta_i\tau_\alpha}. \tag{13}$$

显然 $\partial w_\alpha\leqslant n-1$．于是我们用下面的定理给出另一种实现有限极点配置的控制算法：

定理 2. 控制律

$$u(t)=\sum_{\alpha=1}^{r}\frac{h_\alpha(p)}{q(p)}u(t-\tau_\alpha)+y(t)+\sum_{\alpha=1}^{r}\int_{-\tau_\alpha}^{0}\sum_{i=1}^{n}(a_{i\alpha}e^{-\lambda_i\sigma}+b_{i\alpha}e^{-\beta_i\sigma})\cdot u(t+\sigma)d\sigma+\left(1+\frac{g(p)}{q(p)}\right)v(t) \tag{14}$$

是可实现的并取得期望的有限极点配置，其中

$$h_\alpha(p)=k_\alpha(p)+w_\alpha(p), \tag{15}$$

$$g(p)=\sum_{\alpha=1}^{r}g_\alpha(p)-q(p). \tag{16}$$

结 论

许多分布参数系统可视为由多个具有不同纯滞后的通道并联组合而成，它们的传递函数中含有多个滞后因子．本文解决了这类系统频域有限极点配置的问题．两个定理给出了两种获得期望的有限极点配置的控制算法，它们不仅简单和易于工程实现，而且得到的控制结构紧凑，不要求被控对象必须稳定，因而有着广泛的适用范围．

参 考 文 献

[1] Wolovich, W. A., Linear Multivariable Systems, Springer-Verlag New York Inc., (1974).
[2] Ichiwaka, K., Frequency-Domain Pole Assignment and Exact Model-Matching for Delay Systems, *Int. J. Control*, **41** (1985), 1015—1024.

A METHOD OF FREQUENCY-DOMAIN POLE ASSIGNMENT FOR DISTRIBUTED SYSTEMS

ZHONG QINGQIU　JIANG WEISUN
(East China University of Chemical Technology)

ABSTRACT

The frequency-domain finite pole assignment for a class of distributed parameter systems is studied in this paper. Two closed-loop control design techniques are presented. The obtained control algorithms are simple and realizable in structure and they can also be applied to unstable objects.

Key words ——Distributed parameter systems; frequency domain; transfer function; partial differential equation.