第15卷 第2期 1989年3月
自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA
Vol. 15, No. 2 Mar., 1989

应用 Galerkin 方法辨识一维抛物型偏微分方程及其边界条件中的参数

瞿寿德 李松石 戴和平
(北 京 科 技 大 学)

摘 要

本文提出了一种一维抛物型偏微分方程及其边界条件中定常参数的辨识方法. 这一方法将所研究的偏微分方程初-边值问题转化为具有已知初值的常微分方程组问题,然后再利用最优化方法将参数估算出来. 数值仿真与实验验证都表明这一辨识方法是可行的.

关键词: 分布参数系统,系统辨识, Ritz-Galerkin 方法.

一、引 言

一维抛物型分布参数系统是分布参数系统中一类较为常见的系统,这类系统在实际过程中是经常遇到的,如厚钢板的温升过程. 通常这类系统都由偏微分方程与相应的初-边值条件组成,所以对这类系统的辨识应该包含方程参数的辨识和边界参数的辨识. 应用 Galerkin 方法解决方程参数辨识问题目前已经很成功了[1],但现在尚没发现有人应用此方法去辨识边界参数. 本文旨在将 Galerkin 方法推广到边界参数的辨识上,从而使方程参数与边界参数能够同时被辨识出来.

二、辨识问题提法

考虑如下偏微分方程及其边界初始条件:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=a\frac{\partial^2 u(x,\ t)}{\partial x^2},\ x\in(0,1),\ t\in(0,1]. \tag{1}$$

$$\alpha_1 u(0,t)+\beta_1\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0}=g_1(t),\ t\in(0,1]. \tag{2-1}$$

$$\alpha_2 u(1,t)+\beta_2\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=1}=g_2(t),\ t\in(0,1]. \tag{2-2}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\ x\in[0,1]. \tag{3}$$

其中 $g_1(t)$, $g_2(t)$, $u_0(x)$均为连续函数,定常参数 a, α_1, β_1, α_2, β_2 可以为全部未知,也可以

本文于1987年2月25日收到.

是部分未知.

量测函数为

$$z(x_m,t) = u(x_m,t) + \varepsilon(x_m,t), \quad x_m \in [0,1], \quad t \in [0,T]. \tag{4}$$

其中 x_m 为量测点；$\varepsilon(x_m,t)$ 为量测噪声.

辨识问题为：已知函数 $g_1(t)$，$g_2(t)$，$u_0(x)$，根据量测值 $z(x_m,t)$，确定未知参数，使(1),(2),(3)式所描述的系统能在某种意义下与实际过程相等价.

三、辨识方法推导

Galerkin 方法是偏微分方程的一种近似解法. 其核心是应用特定近似函数将偏微分方程转化为常微分方程组求解. 这里设近似解为

$$\tilde{u}(x,t) = \sum_{j=1}^{N} \phi_j(t) f_j(x). \tag{5}$$

其中 $f_j(x)$ 为特定近似函数,要求事先确定；$\phi_j(t)$ 为待定函数，转化目的就是要得到关于 $\phi_j(t)$ 的常微分方程组；N 为项数,它与近似精度有关.

将 $\tilde{u}(x,t)$ 代入(1),(2),(3)式中,可以得到由此近似解在各部分引出的误差(称为残差)：

方程残差：

$$R_E = \sum_{j=1}^{N} \frac{d\phi_j(t)}{dt} \cdot f_j(x) - a \cdot \sum_{j=1}^{N} \phi_j(t) \frac{d^2 f_j(x)}{dx^2} \tag{6}$$

边界残差：

$$R_{B1} = \alpha_1 \sum_{j=1}^{N} \phi_j(t) \cdot f_j(0) + \beta_1 \sum_{j=1}^{N} \phi_j(t) \cdot \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=0} - g_1(t), \tag{7-1}$$

$$R_{B2} = \alpha_2 \sum_{j=1}^{N} \phi_j(t) \cdot f_j(1) + \beta_2 \sum_{j=1}^{N} \phi_j(t) \cdot \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=1} - g_2(t); \tag{7-2}$$

初始残差：

$$R_I = \sum_{j=1}^{N} \phi_j(0) \cdot f_j(x) - u_0(x). \tag{8}$$

在确定 $f_i(x)$ 时选法是不唯一的，但为求解问题方便起见，都选 $f_j(x)$ 为一组在空间域上两两相互正交的多项式函数[2,3]. 在这里同时还要求所选 $f_j(x)$ 使 $R_{B1} \neq 0, R_{B2} \neq 0$，即有

$$\int_0^1 f_i(x) f_j(x) dx = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ \text{constant} \neq 0, & i = j (i,j = 1,2,\cdots,N). \end{cases} \tag{9}$$

文献[4]给出了 Galerkin 方法处理残差的几种手段. 本文引用其中能处理非齐次边界条件的“混合法”,可以直接得到问题转化的准则,即

$$\int_0^1 R_E f_i(x)dx + \sum_{n=1}^{2} \mu_n R_{B_n} \frac{\partial R_{B_n}}{\partial \phi_i(t)} = 0,\ i = 1,2,\cdots,N. \tag{10}$$

$$\int_0^1 R_I f_i(x)dx = 0,\ i = 1,2,\cdots,N. \tag{11}$$

将各类残差代入准则,就能得到关于 $\phi_i(t)$ 的常微分方程组[5],这里仅写出其矩阵形式

$$\frac{d\boldsymbol{\Phi}(t)}{dt} = [aM_1 - \mu_1(\alpha_1^2 M_2 + \alpha_1\beta_1 M_3 + \alpha_1\beta_1 M_4 + \beta_1^2 M_5)$$

$$- \mu_2(\alpha_2^2 M_6 + \alpha_2\beta_2 M_7 + \alpha_2\beta_2 M_8 + \beta_2^2 M_9)]\boldsymbol{\Phi}(t) + H\boldsymbol{G}(t), \tag{12}$$

$$\boldsymbol{\Phi}(0) = \boldsymbol{P}. \tag{13}$$

由此看出 $a,\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2$ 为影响 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 的因素. 即为影响 $\tilde{u}(x,t)$ 近似程度的因素. 选择性能指标

$$J = \frac{1}{2}\int_0^T |z(x_m,t) - \tilde{u}(x_m,t)|^2 dt, \tag{14}$$

希望求得 J 的最小值，此时所对应的参数值就为要求的系统参数值. 因此参数辨识问题就变成参数优化问题来解决. 应用无约束最优化算法可以求出所要辨识的参数值.

四、数 值 例 子

1. 数值仿真

已知在(1),(2),(3)式中 $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = 1.0$, $g_1(t) = 0$, $g_2(t) = 0.5$, $u_0(x) = 1.0$, 被辨识量为 a, α_2, β_2. 真值取 $a^* = 1.0$, $\alpha_2^* = 1.0$, $\beta_2^* = 0.5$. 在运算过程中 $\varepsilon(x_m,t)$ 均为 Gaussian 白噪声,均值为零. 方差分别为 $\sigma = 0.0, 0.01, 0.1$, $\mu_1 = 1.0$, $\mu_2 = 0.6$, $T = 2.0$. 近似函数按前面要求定为:

$$f_1(x) = 3x^2 - 5x - 2,$$
$$f_2(x) = 4x^3 - 6x^2 - 3x + 2.7572,$$
$$f_3(x) = 5x^4 - 7x^3 - 4x^2 + 6.2936x - 1.0914.$$

选用文献[6]中 DPF 法进行优化计算,计算结果见表 1. 从表 1 看出,该辨识算法对方程参数估计误差较大. 原因是由于在转化准则中,外加了关于边界残差两项(这是“混合法”的要求),因而使转化结果对方程参数敏感度降低,估计误差变大.

表 1 仿 真 算 例

	$\sigma = 0.0$		$\sigma = 0.01$		$\sigma = 0.1$	
	结 果	误差(%)	结 果	误差(%)	结 果	误差(%)
$\hat{a}$	0.9482	5.18	0.9479	5.21	0.9454	5.46
$\hat{\alpha}_2$	0.9932	0.68	0.9954	0.46	1.0097	0.97
$\hat{\beta}_2$	0.5007	0.14	0.4995	0.10	0.4892	2.16
指标 J	2.5×10^{-4}		3.3×10^{-4}		1.2×10^{-2}	

2. 实验验证

实验内容是对钢坯加热．钢坯内部温升过程的数学模型可以用(1)，(2)，(3)式表示．被辨识量为 α 和 β_2．利用本文的辨识方法可以估算出这两个量．将辨识结果代入模型中，按此结果计算钢坯中部温升并与实际量测数据比较，见表 2．可见结果是令人满意的．

表 2　结果比较

时间(min.)	量测值(℃)	计算值(℃)	查表值(℃)
0	501.1	498.8	497.8
10	531.2	516.3	504.4
20	560.1	538.9	523.1
30	587.8	565.8	546.9
40	614.2	593.4	572.7
50	639.5	620.4	599.0
60	663.5	646.2	624.9
70	686.4	670.7	649.9

结　　论

研究结果表明，本文所介绍的方法能够同时辨识一维抛物型方程及其边界条件中的定常参数，并且具有一定的抗干扰性．该方法对边界参数的辨识效果比辨识方程参数效果更好一些．

参　考　文　献

[1] Ray, W. H., Distributed Parameter Systems: Identification, Estimation and Control, Marcel Inc. (1978), 47—134.

[2] Polis, M. P., Goodson, R. E. and Wozny, M. J, Parameter Identification for Distributed Systems Using Galerlcin's Criterion, *Automatica* 9(1973), 53—64.

[3] Yoshimura, T. and Campo, A., Identification of a Heat Transfer System Using the Galerlcin Method, *Int. J. Systems Science.* 13(1982), No. 3, 247—255.

[4] Vichnevetsky, R., Use of Functional Approximation Methods in the Computer Solution of Initial Value Partial Drfferential Equation Problems, *IEEE Trans. on Computers,* C-18 (1969), No. 4,499—512.

[5] Qu, S., H .Dai and S. Li, Parameter Identification of a Diffusion Equation and Its Boundary Conditions Using Galerkin's Method, Proceedings of IMACS/IFAC International Sumposium on Modelling and Simulation of Distributed Parameter Systems, Hiroshima 1987, 43—48.

[6] 邓乃扬等，无约束最优化计算方法，科学出版社(1982年)，152—166.

THE APPLICATION OF GALERKIN'S METHOD TO PARAMETER IDENTIFICATION OF ONE-DIMENSIONAL PARABOLIC PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION AND ITS BOUNDARY CONDITIONS

QU SHOUDE LI SONGSHI DAI HEPING
(University of Science and Technology Beijing)

ABSTRACT

This paper presents a method which can simultaneously identify constant parameters in one-dimensional parabolic partial differential equation and its boundary conditions. Here the initial-boundary value problem of partial differential equation is reduced into a set of ordinary differential equations with known initial conditions. Then optimization approaches can be used to evaluate the parameters. Both the numerical example and the physical experiment show the applicability of this identification method.

Key words ——Distributed parameter systems; System identification; Ritz-Galerkin method.