第15卷 第2期　　自 动 化 学 报　　Vol. 15, No. 2
1989 年 3 月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　Mar., 1989

广义系统的最小能控结构

杨成梧　　邹　云
(华 东 工 学 院)

摘　　要

本文通过线性变换的 Drazin 逆理论讨论了广义系统的最小能控结构问题，给出了广义系统四种主要能控性的最小能控结构定理.

关键词: 线性系统理论,奇异系统理论,广义系统理论.

一、引　　言

考察线性定常广义系统

$$\theta:\begin{cases}E\dot{x}=Ax+Bu,\\ y=Cx.\end{cases}$$

其中 $E, A\in R^{n\times n}$, B, C 各为适当维数的实矩阵,且, $\det E=0$, 而 $\det[sE-A]\neq 0$, $s\in C$[1].

给定系统的参数 E, A 后,许多实际问题中感兴趣的是满足怎样条件的 B 将使系统 θ 能控? 如果对 B 的选取是随机的,那么是否存在一个最小列数,使得按这个列数选取的 B 使系统 θ 能控的概率为 1? 这就是所谓的广义系统的最小能控结构问题. 本文结果表明: 上述问题中的最小列数恰为使系统 θ 能控的所有 B 阵的列数中的最小者(下称这种列数为 B 的最小结构列数), 这与正常系统(即 $\det E\neq 0$) 的结果是一致的. 对于正常系统的最小能控结构问题,黄琳[4] 曾在 1982 年利用代数生成元理论进行过讨论, 本文旨在将那里的结果推广到广义系统上去. 以下所讨论的几种能控性均各自对偶于与其相应的能观性[5],故下面的结果对能观性也成立.

二、预 备 知 识

定义 1[4]. $A\in R^{n\times n}$, $\boldsymbol{b}_i\in R^n$, $1\leqslant i\leqslant k$, 若

$$R^n=\bigoplus_{i=1}^{k}\langle A|\boldsymbol{b}_i\rangle, \tag{1}$$

且 A 在 $\boldsymbol{b}_i$ 的最小多项式 $\alpha_i(\lambda)$ 满足

本文于 1987 年 5 月 9 日收到.

1) 在不发生混淆的情况下,我们也记 C 为复数域.

$$\alpha_{i+1}(\lambda)|\alpha_i(\lambda),\ 1\leqslant i\leqslant k-1,$$

则称 k 为 A 的循环指数，记为 $\mathrm{Cir}(A)$. 其中:

$$\langle A|\boldsymbol{b}_i\rangle \triangleq \mathrm{Im}\,\boldsymbol{b}_i + A\,\mathrm{Im}\,\boldsymbol{b}_i + \cdots + A^{n-1}\,\mathrm{Im}\,\boldsymbol{b}_i.$$

引理 1[4]. 对于 $\forall A\in R^{n\times n}$, $\mathrm{Cir}(A)$ 均存在且唯一，且 $\mathrm{Cir}(A)=\#(\lambda I-A)$ 的非常数不变因子的个数，即 A 的 Jordan 标准形中所有同一特征值对应的 Jordan 块数中的最大数. $\mathrm{Cir}(A)$ 的几何意义就是使(1)式成立所需 $\boldsymbol{b}_i$ 的最少个数，这一点下面要经常用到.

例 1. $A=I_n$, 则按引理 1 知 $\mathrm{Cir}(A)=n$.

例 2. 设

$$A=\begin{bmatrix}1&&&&&&\\&3&&&&&\\&&0&1&&&\\&&&0&&&\\&&&&0&1&\\&&&&&0&1\\&&&&&&0\end{bmatrix}^{1)}.$$

则按引理 1 知 $\mathrm{Cir}(A)=\max\{1,1,2\}=2$.

三、广义系统的最小能控结构

取 $\lambda\in C$, 使 $\det(\lambda E-A)\neq 0$, 作变量替换

$$\boldsymbol{x}\to e^{\lambda t}\boldsymbol{x}. \tag{2}$$

则系统 θ 变为

$$\theta'\begin{cases}\hat{E}\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{x}+\hat{B}\boldsymbol{v},\\ \boldsymbol{y}=C\boldsymbol{w}.\end{cases}$$

其中 $\hat{E}=(\lambda E-A)^{-1}E$, $\hat{B}=(\lambda E-A)^{-1}B$, $\boldsymbol{v}=e^{-\lambda t}\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{w}=e^{\lambda t}\boldsymbol{x}$. 显然 θ' 的各种能控性与 θ 一致. 令

$$V=R^n/\mathrm{Im}(I_n-\hat{E}\hat{E}^d). \tag{3}$$

其中 $\hat{E}^d$ 为 $\hat{E}$ 的 Drazin 逆，I_n 为 n 阶单位阵.

显然

$$\mathrm{Ker}\,\hat{E}^d=\mathrm{Im}(I_n-\hat{E}\hat{E}^d). \tag{4}$$

从而若取 π: $R^n\to V$ 为自然投影，则由式(4)知必有唯一的 $\bar{\hat{E}}^d$: $V\to V$ 使得

$$\bar{\hat{E}}^d\pi=\pi\hat{E}^d. \tag{5}$$

我们有

判据 1. 系统 θR-能控当且仅当

1) 矩阵中空白处均为零元，下同.

$$\langle \bar{\hat{E}}^d | \bar{B} \rangle = V, \tag{6}$$

特别地若设 $V \subsetneqq R^r$, 在 V 中取定一组基,则(6)式化为

$$\langle \bar{\hat{E}}^d | \bar{B} \rangle = R^r. \tag{7}$$

其中 $\bar{B} = \pi \hat{B}$. 限于篇幅这里略去判据 1 的证明, 参见邹云华东工学院硕士学位论文(1986).

判据 2[3]. 设 M 为一行压缩变换,

$$M(sE - A, B) = \begin{bmatrix} sE_1 - A_1 & B_1 \\ -A_2 & B_2 \end{bmatrix}. \tag{8}$$

其中 E_1 行满秩. 则 θ 脉冲能控[5]当且仅当

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} E_1 & \\ A_2 & B_2 \end{bmatrix} = n. \tag{9}$$

判据 3[1]. 系统 θ 完全能控(或称 C-能控)当且仅当 θ 既 R-能控又能正常化. 即

$$\operatorname{rank}(E, B) = n \tag{10}$$

与(7)式同时成立.

判据 4[1]. 系统 θ 强能控当且仅当 θ 既 R-能控又脉冲能控.

注意到判据 1 中 $\langle \bar{\hat{E}}^d | \bar{B} \rangle = R^r$, 实质上就是, 选取 $\bar{B} = (\bar{\boldsymbol{b}}_1, \cdots, \bar{\boldsymbol{b}}_l)$, $\bar{\boldsymbol{b}}_i \in R^r$, $i = 1, \cdots, l$ 使得

$$\sum_{i=1}^{l} \langle \bar{\hat{E}}^d | \bar{\boldsymbol{b}}_i \rangle = R^r. \tag{11}$$

关于使(11)式成立的最小列数,由文献[4]我们可得如下定理:

定理 1. 若 $\operatorname{Cir}(\bar{\hat{E}}^d) = l$, 则使 (11) 式成立的最小列数为 l. 且若随机地独立选取 $\bar{\boldsymbol{b}}_1, \cdots, \bar{\boldsymbol{b}}_l \in R^r$, 则(11)式成立的概率为 1.

为得出我们的主要结果,下面给出几个必要的引理,证明见附录.

引理 2. 设 $\hat{E}$ 的 Jordan 形为

$$\begin{bmatrix} D & \\ & N \end{bmatrix} = P\hat{E}P^{-1}. \tag{12}$$

其中 D 可逆,而 N 为幂零阵. 则

$$\operatorname{Cir}(\bar{\hat{E}}^d) = \operatorname{Cir}(\hat{E} | \operatorname{Im}\hat{E}\hat{E}^d) = \operatorname{Cir}(D). \tag{13}$$

由定理 1 不难知广义系统的最小 R-能控结构必与 $\operatorname{Cir}(\bar{\hat{E}}^d)$ 有关, 而引理 2 指出 $\operatorname{Cir}(\bar{\hat{E}}^d) = \operatorname{Cir}(\hat{E} | \operatorname{Im}\hat{E}\hat{E}^d)$. 这样我们自然会想到广义系统的最小 R-能控结构应该与构成 $\hat{E} = (\lambda E - A)^{-1} E$ 的具体 λ 无关. 下面的引理肯定了这一想法.

引理 3. $\operatorname{Cir}(\hat{E})$, $\operatorname{Cir}(\hat{E} | \operatorname{Im}\hat{E}\hat{E}^d)$ 均与使 $\det(\lambda E - A) \neq 0$ 的具体 λ 无关.

引理 2 还有个特殊情形,就是当 $EA = AE$ 时, $\operatorname{Cir}(\bar{\hat{E}}^d)$ 与 E 的关系尤为明显, 这就是:

引理 4. 若 $EA = AE$, 则 $\operatorname{Cir}(\hat{E}) = \operatorname{Cir}(E)$, $\operatorname{Cir}(\hat{E} | \operatorname{Im}\hat{E}\hat{E}^d) = \operatorname{Cir}(E | \operatorname{Im}EE^d)$. 特别地:

$$\operatorname{Cir}(\bar{\hat{E}}^d) = \operatorname{Cir}(E | \operatorname{Im}EE^d). \tag{14}$$

设：

$\alpha_\lambda = \#(\mu I_n - \hat{E})$ 对应于 λ 的(即形如 $(\mu-\lambda)^r$, $r \geq 1$ 的)初等因子的个数。即 $\hat{E}$ 的 Jordan 形中对角元为 λ 的 Jordan 块个数。

$\alpha_R = \max\limits_{\substack{\lambda\in\sigma(\hat{E})\\ \lambda\neq 0}} \{\alpha_\lambda\}$,

$\alpha_C = \max\limits_{\lambda\in\sigma(\hat{E})} \{\alpha_\lambda\} = \mathrm{Cir}\,(\hat{E})$,

$\alpha_I = \#(\mu I_n - \hat{\hat{E}})$ 的形如 $s^r(r>1)$ 的初等因子的个数.即 $\hat{E}$ 的 Jordan 标准形中大于 1 阶的幂零 Jordan 块的个数(亦即对角元为 0 的 Jordan 块数)。

$\alpha_s = \max\{\alpha_R, \alpha_I\}$.

则有

定理 2. 若记系统 θR-能控、强能控。 C-能控及脉冲能控所需 B 的最小结构列数分别为 $N_R(B)$, $N_S(B)$, $N_C(B)$ 及 $N_I(B)$, 则有

(i) $N_R(B) = \alpha_R$; (15)

(ii) $N_C(B) = \alpha_C = \max\{\alpha_R, n - \mathrm{rank}\, E)$; (16)

(iii) $N_I(B) = \alpha_I = n - \mathrm{rank}\begin{bmatrix} E_1 \\ A_2 \end{bmatrix}$, (17)

其中 E_1, A_2 如(9)式所示；

(iv) $N_S(B) = \alpha_S$. (18)

证明。

(i) 显然这是定理 1、判据 1、引理 1 及引理 2 的直接推论。

(ii) 由 $\alpha_C = \mathrm{Cir}(\hat{E})$ 及判据 3 知：欲证(16)式,只须证：

$$\mathrm{Cir}\,(\hat{E}) = \max\{\alpha_R, n - \mathrm{rank}\, E\}. \tag{19}$$

显然,由(12)式,即

$$\hat{E} = P^{-1}\begin{bmatrix} D & \\ & N \end{bmatrix} P,$$

注意到 $\mathrm{Cir}(\hat{E})$ 的几何意义即易证。参见邹云硕士学位论文。

$$\mathrm{Cir}\,(\hat{E}) = \max\{\mathrm{Cir}\,(D), \mathrm{Cir}\,(N)\}. \tag{20}$$

而 $\mathrm{Cir}\,(N) = \#N$ 中幂零 Jordan 块的个数

$$= N \text{ 的阶数} - \mathrm{rank} N = n - \mathrm{rank}\,\hat{E}. \tag{21}$$

考虑到按引理 1 有 $\alpha_R = \mathrm{Cir}\,(D)$, 从而由式(20),(21)立即可得(19)式。

(iii) 由判据 2 易知

$$N_I = n - \mathrm{rank}\begin{bmatrix} E_1 \\ A_2 \end{bmatrix}.$$

故欲证(17)式只须证：

$N_I = \#\hat{E}$ 的 Jordan 形中所有大于 1 阶的幂零 Jordan 块数。无妨设

$$N = \begin{bmatrix} N_0 & \\ & N_1 \end{bmatrix}, \quad P\bar{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ \hline B_0 \\ B_2 \end{bmatrix}.$$

其中N如(12)式中所示，$N_0 \in R^{f\times f}$为N的所有大于1阶的幂零Jordan块组成的对角阵，$B_0 \in R^{f\times m}$. 易证[1]系统θ脉冲能控的充要条件为：$\text{rank}\,(N_0, B_0) = f$，由此便立即可得我们所要的结论。

(iv) 由判据4及(iii)立即可得。

上面我们讨论了输入阵B对应于系统θ各种能控性的最小结构列数，进一步还有

定理3. 按定理2中的各最小结构列数：$N_R(B)$，$N_C(B)$，$N_I(B)$及$N_S(B)$在R^n中独立地随机选取向量构成的输入阵B分别使系统θ R-能控，C-能控，脉冲能控及强能控的概率为1。

证明。由定理1及定理2不难看出这是显然的，参见邹云硕士学位论文。

利用引理4，我们还可以得到当E，A可交换时的更为简炼的结果，限于篇幅这里不再赘述。

四、结 论

本文讨论了广义系统的最小能控、能观结构，将黄琳关于正常系统的相应结果推广到了广义系统，所得结果表明，当一系统的最小能控结构列数确定以后，一旦输入阵B的列数达到(或超过)这个列数，系统便以概率为1能控，否则必不能控。这就表明广义系统的各种能控性与正常系统一样，其实质即指该系统具有获得足够输入信息量的能力。不同的能控性表征了系统具有不同的信息获得能力。此外，从上节结果还不难看出：通过Drazin逆理论分解系统来讨论最小结构问题十分便于计算，只需对矩阵进行求逆和乘积运算即可(计算Jordan形可通过点图法[2]，十分简便，并不需求中间变换P)，所得的结果与E，A的关系也十分直接和明确，尤其当E，A可交换时。而正则束的正则标准形的计算便显得较为复杂了，且与原系统的参数E，A的关系通过一个中间变换后也显得较为模糊。邹云硕士论文指出广义系统除C-能控外，R-能控、强能控及脉冲能控对参数(E，A，B)的微小扰动均不具有保持能力，但对B的微小扰动(假定E，A是给定不变的)却一致具有保持能力。本文的结果从另一个侧面反映了广义系统的这种抗B扰动的能力。

参 考 文 献

[1] 王朝珠，戴立意，广义动态系统，控制理论与应用，3卷，1期，1986，2—12.
[2] Campbell, S. L., et al., Applications of the Drazin Inverse to Singular Systems, *SIAM J. Appl. Math.*, **31**(1976), 411—425.
[3] Verghese, G., Infinite Frequency Behaviour in Generalized Dynamical Systems, Ph. D Dissertation, Dept. of E. E. Stanford Univ., 1978.
[4] 黄琳，系统与控制理论中的线性代数，科学出版社，1984.
[5] Cobb, D., Controllability, Observability and Duality in Singular Systems, *IEEE Trans.* **AC-29** (1984), 1076—1082.
[6] 杨成梧，邹云，广义系统能控性的鲁棒性，华东工学院学报，1987 年，1期，1—11.

1) 邹云，华东工学院硕士学位论文，1986年。
2) 顾敦和，线性代数，华东工学院讲义，1985.

ON THE MINIMUM CONTROLLABLE STRUCTURE OF SINGULAR SYSTEMS

YANG CHENGWU ZOU YUN
(*East China Institute of Technology*)

ABSTRACT

In this paper, we discuss the minimum controllable structure problems of singular systems, and the minimum structure theorems for the four kinds of main controllability of singular systems are proposed.

Key words——Linear system theory; singular system theory; generalized system theory.

附 录 1

引理 2 的证明. 由(12)式即 $\hat{E} = P^{-1}\begin{bmatrix} D & \\ & N \end{bmatrix} P$,
若令 $P^{-1} = (P_1, P_2)$，其中 P_1 的列数等于 D 的阶数。则

$$\hat{E}\hat{E}^d = (P_1, P_2)\begin{bmatrix} I & \\ & 0 \end{bmatrix}(P_1, P_2)^{-1} = (P_1, 0)(P_1, P_2)^{-1}.$$

故

$$S \triangleq \mathrm{Im}\hat{E}\hat{E}^d = \mathrm{Im}P_1.$$

从而可取 S 一组基为 P_1，注意到

$$\hat{E}^d P_1 = (P_1, P_2)\begin{bmatrix} D^{-1} & \\ & 0 \end{bmatrix}(P_1, P_2)^{-1}P_1 = P_1 D^{-1},$$

故

$$\hat{E}^d | S = D^{-1}, \tag{A.1.1}$$

同理

$$\hat{E} | S = D. \tag{A.1.2}$$

令

$$E_S = \hat{E}^d | S,\quad B_S = \hat{E}\hat{E}^d\hat{B} | S,$$

则显然

$$\langle E_S | B_S \rangle = R^r. \tag{A.1.3}$$

与(11)式等价，从而有

$$\mathrm{Cir}\,(\bar{\hat{E}}^d) = \mathrm{Cir}\,(D^{-1}) = \mathrm{Cir}\,(E_S). \tag{A.1.4}$$

而另一方面，由循环指数的几何意义或引理 1 不难知

$$\mathrm{Cir}\,(D^{-1}) = \mathrm{Cir}\,(D). \tag{A.1.5}$$

由此联系到 $(A.1.4)$，$(A\,1.2)$ 便得 $\mathrm{Cir}\,(\tilde{\hat{E}}^d) = \mathrm{Cir}\,(E|S) = \mathrm{Cir}\,(D)$.

附 录 II

引理 3 的证明. 设 μ 亦使 $\det(\mu E - A) \neq 0$.

令

$$\hat{E}_\mu = (\mu E - A)^{-1}E,\ \hat{E}_\lambda = (\lambda E - A)^{-1}E,$$

则

$$\hat{E}_\mu = (\mu E - A)^{-1}(\lambda E - A)\hat{E}_\lambda = (\mu\hat{E}_\lambda - \hat{A}_\lambda)^{-1}\hat{E}_\lambda. \tag{A.2.1}$$

其中 $\hat{A}_\lambda = (\lambda E - A)^{-1}A$，注意到 $-\hat{A}_\lambda + \lambda\hat{E}_\lambda = I$， (A.2.2)

从而

$$\hat{A}_\lambda\hat{E}_\lambda = \hat{E}_\lambda\hat{A}_\lambda. \tag{A.2.3}$$

由式 $(A.2.1)$ 和 $(A.2.3)$ 便知

$$\hat{E}_\mu = \hat{E}_\lambda(\mu\hat{E}_\lambda - \hat{A}_\lambda)^{-1} = (\mu\hat{E}_\lambda - \hat{A}_\lambda)^{-1}\hat{E}_\lambda. \tag{A.2.4}$$

若 $\mathrm{Cir}\hat{E}_\mu = l$，则有 $\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_l \in R^n$，使得 $\bigoplus_{i=1}^{l}\langle\hat{E}_\mu|\boldsymbol{b}_i\rangle = R^n$. (A.2.5)

从而由 $(A.2.4)$ 即有 $\bigoplus_{i=1}^{l}\langle(\mu\hat{E}_\lambda - \hat{A}_\lambda)^{-1}\hat{E}_\lambda|\boldsymbol{b}_i\rangle = R^n$. (A.2.6)

取

$$\hat{\boldsymbol{b}}_i = (\mu\hat{E}_\lambda - \hat{A}_\lambda)^{-1}\boldsymbol{b}_i,\ 1 \leqslant i \leqslant l,$$

则由式 $(A.2.6)$ 知

$$\bigoplus_{i=1}^{l}\langle\hat{E}_\lambda|\hat{\boldsymbol{b}}_i\rangle = R^n. \tag{A.2.7}$$

由此考虑到循环指数的几何意义即知 $\mathrm{Cir}\,(\hat{E}_\mu) \leqslant \mathrm{Cir}\,(\hat{E}_\lambda)$. 同理可证 $\mathrm{Cir}\,(\hat{E}_\lambda) \leqslant \mathrm{Cir}\,(\hat{E}_\mu)$. 故

$$\mathrm{Cir}\,(\hat{E}_\lambda) = \mathrm{Cir}\,(\hat{E}_\mu). \tag{A.2.8}$$

另一方面由式 $(A.2.4)$ 及 Drazin 逆的性质易知

$$S = \mathrm{Im}\hat{E}_\lambda\hat{E}_\lambda^D = \mathrm{Im}\hat{E}_\mu E_\mu^D. \tag{A.2.9}$$

注意到

$$\hat{E}_\mu|S = \hat{E}_\lambda|S \cdot (\mu\hat{E}_\lambda - \hat{A}_\lambda)^{-1}|S = (\mu\hat{E}_\lambda - \hat{A}_\lambda)^{-1}|S \cdot \hat{E}_\lambda|S,$$

则同理可证

$$\mathrm{Cir}\,(\hat{E}_\mu|S) = \mathrm{Cir}\,(\hat{E}_\lambda|S).$$

附 录 III

引理 4 的证明. 因为 $EA = AE$，所以

$$\hat{E} = (\lambda E - A)^{-1}E = E(\lambda E - A)^{-1}. \tag{A.3.1}$$

同引理 3 证明可得 $S = \mathrm{Im}\hat{E}\hat{E}^d = \mathrm{Im}EE^d$，及

$$\mathrm{Cir}\,(\hat{E}) = \mathrm{Cir}\,(E), \tag{A.3.2}$$

$$\hat{E}|S = (\lambda E - A)^{-1}|S \cdot E|S = E|S \cdot (\lambda E - A)^{-1}|S.$$

由此类似于引理 3 的证明即知 $\mathrm{Cir}\,(\hat{E}|S) = \mathrm{Cir}\,(E|S)$，从而作为引理 2 的一个推论我们有 $\mathrm{Cir}\,(\tilde{\hat{E}}^d) = \mathrm{Cir}\,(E|S)$.