

# 论反标架方法对多变量系统鲁棒性设计的改进

毛剑琴 赵军 孟宪仲

(北京航空航天大学)

## 摘 要

Macfarlane 等提出的反标架方法 (Reversed-Frame-Normalizing) 是适用于多变量系统鲁棒性 CAD 的频域方法, 这一方法是基于矩阵赋值函数的奇异值分解. 本文在介绍这一方法的基础上, 着重讨论反标架方法对系统鲁棒性设计的改进, 并对该方法中分频段补偿器的设计提出了改进建议. 通过数值例子说明这一方法较逆奈氏阵列法与特征轨迹法对系统鲁棒稳定性设计具有的优越性, 也说明了这一方法在 PC 机上的可实现性.

**关键词**——多变量系统; 鲁棒性; 奇异值; 反标架.

## 一、引 言

七十年代以来, 多变量控制系统设计的频域方法从理论上日趋成熟和完善, 但实际应用成果远不及理论方面丰硕. 其原因之一是已有的多变量频域方法多是基于精确地描述系统数学模型之上来进行设计的, 但实际系统往往具有某种程度的不确定性. 这种不确定性应包括系统结构的不确定性和参数的不确定性, 比如, 在飞行控制系统中空气动力学系数随着飞行环境而变化, 这些不确定性给系统的设计带来了困难. 因而, 多年来人们一直试图找到一种理想方法, 使设计出来的系统在具有某种程度不确定性时仍能满足一定的性能指标, 即设计出来的系统具有鲁棒性.

在单输入单输出系统中, 控制系统设计原则之一是使 Nyquist 轨迹与  $(-1, 0)$  点保持一定距离, 以保证系统具有一定程度的鲁棒性. 但这一方法不能直接适用于多输入多输出系统.

自六十年代末以来, 随着计算机技术的发展, 适用于控制系统计算机辅助设计的多变量频域设计方法在理论上得到了迅速提高. 其中 INA 方法是一种较为成熟的方法, 这一方法至今仍有发展, 并在工业界得到一定的应用. 然而, 该方法在处理鲁棒性问题时显得不够理想.

**例<sup>[3]</sup>**: 设系统的开环传递函数矩阵为

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} -47s+2 & 56s \\ -42s & 50s+2 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

经过常数补偿后成为严格对角化的系统,即:

$$UGU^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{2}{s+2} \end{bmatrix},$$

其中, 
$$U = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}, \quad U^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -8 \\ -6 & 7 \end{bmatrix}.$$

因而,无论从 INA 或 CL 的观点,无须进一步加校正器,即  $K(s) = I$ . 可事实上这样设计的系统鲁棒性不能适应一般的工程要求.为说明这一问题,假定补偿器  $K(s) = I$  的

参数有扰动,设  $\tilde{K}(s) = I = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}$ , 则在  $(k_1, k_2)$  平面上可画出闭环系统的稳定区域如图 1 所示.

图 1 所示.

图 1 说明  $K(s) = I$  的参数有近于 10% 的扰动就可能使系统不稳定,原因是设计点距离稳定区域的边界太近. 这个例子给设计提出了一个值得注意的问题,即在多变量系统设计时应对鲁棒性指标给以充分重视. 而在这一点上,在某些情况下,INA 与 CL 等方法显得不足.

八十年代以来,学者们在改进多变量系统鲁棒性设计方面做了许多有价值的工作,其中有一类工作是借助于奇异值分解以提高系统设计的鲁棒性和数值计算的稳定性<sup>[4]</sup>.

本文将基于这类工作中有代表性的文献做进一步的讨论,还将重点讨论反标架方法.

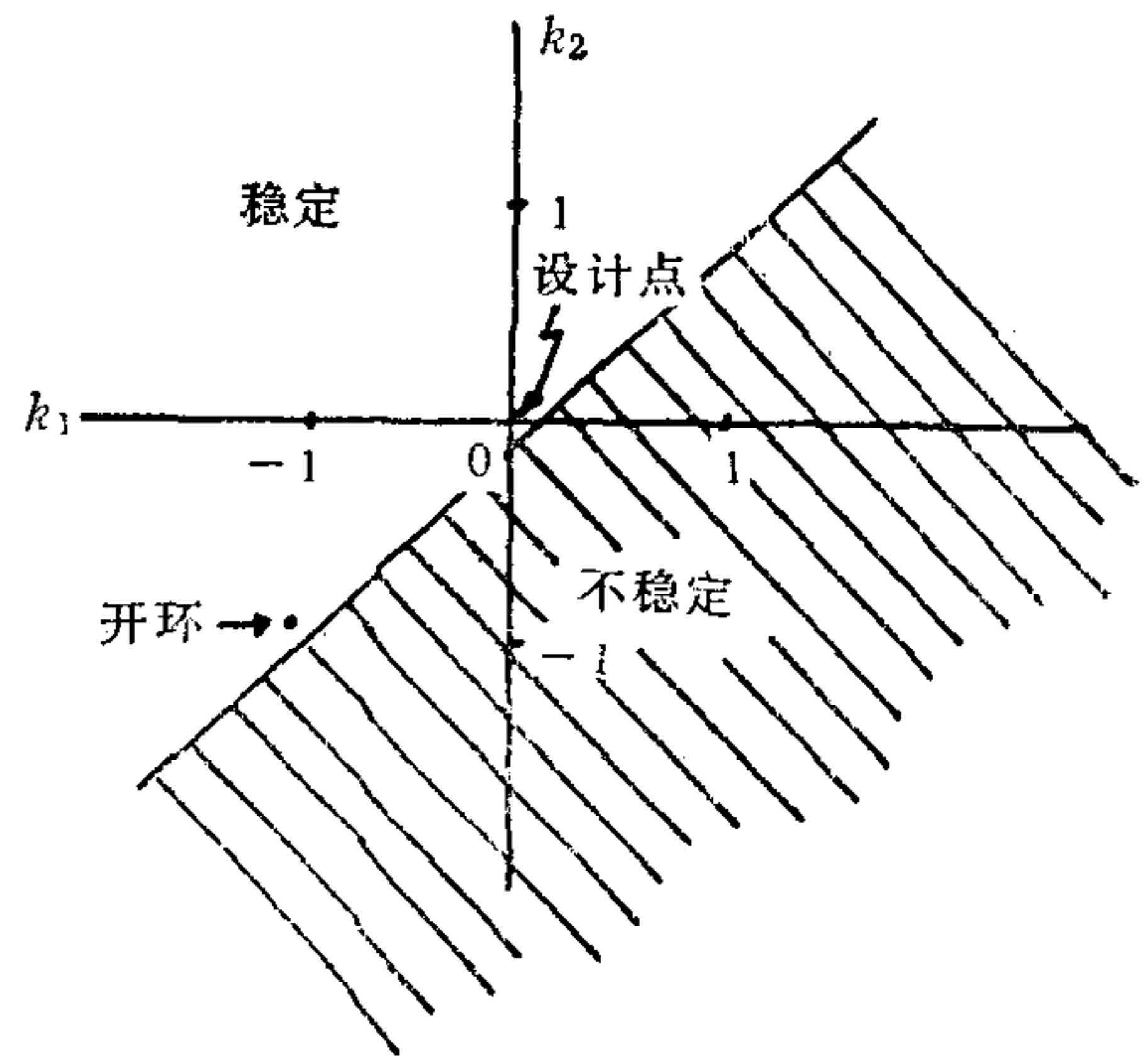


图 1  $\tilde{K}(s)G(s)$  闭环后的稳定区域

## 二、奇异值函数及系统的鲁棒性指标

由设计得到的系统称为名义系统,但物理实现的系统相对名义系统总存在着一定差距,这种差距是由系统的不确定性造成的.所谓鲁棒稳定性是指系统在某一类不确定性存在的条件下,其稳定性不变.

若考虑系统存在非结构不确定性,则有

$$\tilde{G}(j\omega) = G(j\omega) + \Delta G(j\omega).$$

设扰动  $\Delta G(j\omega)$  满足一定的条件,即

$$\|\Delta G(j\omega)\|_2 = \bar{\sigma}[\Delta G(j\omega)] < l_a(\omega), \quad \forall \omega \geq 0. \quad (2)$$

其中  $l_a(\omega)$  是一个正的标量函数;  $\bar{\sigma}[\cdot]$  表示是  $[\cdot]$  的最大奇异值,即对  $\omega \geq 0$ ,  $[\cdot]$  中



矩阵赋值函数的最大的奇异值函数。

矩阵赋值函数的奇异值函数有如下定义:

**定义 1.** 令  $G(s)$  为定义在复数域上的连续的矩阵赋值函数,  $R(s)$  是具有实系数的  $s$  的有理函数域,  $G(s)$  为多项式有理分式矩阵, 即,  $G(s) \in R(s)^{m \times l}$ , ( $m \geq l$ );  $G(s)$  具有奇异值分解为

$$G(s) = U(s)\Sigma(s)V^*(s), \quad (3)$$

则  $G(s)$  的奇异值  $\{\sigma_i(s)\}(i = 1, 2, \dots, l)$  称为定义在复数域上的奇异值函数。

由于奇异值函数的连续性, 使(2)式有可能成立, 并可写成为

$$\left. \begin{aligned} \tilde{G}(j\omega) &= [I + L(j\omega)]G(j\omega), \\ \bar{\sigma}[L(j\omega)] &< l_m(\omega), \forall \omega \geq 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

设计有鲁棒稳定性系统的问题是在满足(4)式的扰动下来设计  $K$ , 除了满足其它各项设计指标外, 还应满足在系统  $GK(I + GK)^{-1}$  是稳定的条件下, 使系统  $\tilde{G}K(I + \tilde{G}K)^{-1}$  仍然稳定。文献[3]中证明了满足上述要求的充分必要条件是

$$\bar{\sigma}[GK(I + GK)^{-1}] < \frac{1}{l_m(\omega)}, \forall 0 \leq \omega < \infty \text{ 和所有的 } L. \quad (5)$$

当  $l_m(\omega) \gg 1$  时有

$$\bar{\sigma}[GK(j\omega)] < \frac{1}{l_m(\omega)}, \forall 0 \leq \omega < \infty \text{ 和所有的 } L. \quad (6)$$

反之, 若违背了式(5), 则在(4)式的范围内可能找到一个扰动  $L(s)$  使系统  $\tilde{G}(j\omega)$  不稳定。

另一方面, 在设计中又要使系统满足一定的性能指标, 一般要求  $\bar{\sigma}[(I + GK)^{-1}]$  尽可能小, 或:

$$ps(\omega) \leq \sigma[I + GK], \forall \omega \leq \omega_0. \quad (7)$$

其中  $ps(\omega)$  是一个大的正函数, 将  $\tilde{G}$  代入(7)式, 有

$$\frac{ps(\omega)}{1 - l_m(\omega)} \leq \sigma[GK(j\omega)]. \quad (8)$$

其中  $\sigma[\cdot]$  表示[]中矩阵赋值函数的最小奇异值。即对于  $l_m(\omega) < 1$  要求:

$$\sigma[GK(j\omega)] \gg 1, \forall \text{ 所有的 } \omega \leq \omega_0.$$

综合条件(6)和(8), 设计者需要选择折衷的方案。换言之, 由奇异值函数不等式表示的(6)式和(8)式构成了具有一定鲁棒稳定性和动态特性系统的多变量设计指标。

### 三、正规矩阵及其对扰动的相对不敏感性

**定义 2.** 若矩阵  $G \in C^{m \times m}$  有以下性质:

$$G^*G = GG^*, \quad (9)$$

则称  $G$  为正规矩阵。

不难证明,  $G$  为正规矩阵的充分必要条件是  $G$  的特征分解有以下形式:

$$G = U\Lambda U^*.$$

其中  $U$  为酉矩阵,  $\Lambda$  为对角阵, 其对角元为  $G$  的特征值,  $G$  的奇异值即为其特征值的模.

关于矩阵正规程度的度量, 有下述定义:

**定义3.**  $m$  维方阵  $G$  的舒尔 (Schur) 三角分解表示为

$$G = U(D + T)U^*.$$

其中  $U$  为酉阵;  $D$  为对角阵, 其对角元素是  $G$  的特征值;  $T$  为严格上三角阵, 则称

$$MS(G) = \frac{\|T\|_F}{\|G\|_F} \quad (10)$$

为  $G$  的斜度. 显然, 正规矩阵的斜度  $MS = 0$ , 并且有  $0 \leq MS(G) \leq 1$ .

设非正规矩阵  $Q$  扰动后成为  $Q(I + \Delta)$ , 则对于  $Q(I + \Delta)$  的任一特征值  $\lambda$ , 存在  $Q$  的一个特征值  $\lambda_i$ , 有关系式:

$$\frac{|\lambda - \lambda_i|}{\|Q\|_2} \leq \left(1 + \frac{MS(Q)}{\alpha} + \dots + \frac{MS(Q)^{m-1}}{\alpha^{m-1}}\right) \|\Delta\|_2. \quad (11)$$

其中,  $\alpha \triangleq \frac{|\lambda - \lambda_i|}{\|Q\|_F}$ .

(11) 式说明矩阵的特征值对扰动的敏感程度与矩阵本身的斜度有关. 当  $MS(Q) = 0$ , 即矩阵  $Q$  为正规矩阵时, (11) 式的右端为最小. 换言之, 正规矩阵相对于一般矩阵来说, 其特征值对于扰动的敏感程度最小.

**定理 1<sup>[1]</sup>.** 令  $Q \in C^{m \times m}$ , 扰动后为  $Q(I + \Delta) \in C^{m \times m}$ , 设  $\lambda$  为  $Q(I + \Delta)$  的任一特征值,  $\lambda_i$  为  $Q$  的某一特征值, 则当  $Q$  为正规矩阵时,  $|\lambda - \lambda_i|$  具有最小的上界.

正规矩阵的这一性质是反标架设计方法的基本指导思想之一.

## 四、反标架正规化设计方法

由定理 1 和条件(6)、(8)可以得出一种考虑到鲁棒性指标的多变量设计方法, 这种方法的基本思想是以反标架设计为手段达到补偿后的开环传递函数正规化为目的, 该方法称为反标架正规化方法<sup>[1,2]</sup>.

设  $G(s)$  有奇异值分解:

$$G(s) = Y(s)\Sigma_G(s)U^*(s), \quad (12)$$

若设计  $K(s)$  为

$$K(s) = U(s)(\Sigma_G^{-1}(s)\Gamma_Q(s))Y^*(s), \quad (13)$$

则得到  $Q(s)$  为

$$Q(s) = G(s)K(s) = Y(s)\Gamma_Q(s)Y^*(s). \quad (14)$$

其中  $\Gamma_Q(s)$  应为满足系统各性能指标, 包括考虑到条件(6)和(8)所希望的设计形式.

关于  $K(s)$  的实现, 文献[1]给出了详细的描述, 但是作法比较复杂. 这里提出一种简化方法, 对于某些系统这种方法是有用的.

首先采用文献[1]中分频段设计的思想.

考虑  $\omega = 0$  时, 有

$$G(0) = Y_0\Sigma_0U_0^T,$$



取  $K_0$  为

$$K_0 = U_0 \text{diag}(k_i^0) Y_0^T \quad (15)$$

当  $|s| \rightarrow \infty$  时, 设  $G(s)$  为以下形式:

$$G(s) = Y(s) \text{diag} \left( \frac{v_i}{s^{r_i}} \right) U^*(s) \quad (16)$$

其中  $\{v_i\} (i=1, \dots, m)$  为实数;  $\{r_i\} (i=1, \dots, m)$  为  $G(s)$  的无穷零点次数;  $Y(s)$ ,  $U(s)$  分别趋于正交矩阵  $Y_\infty$  和  $U_\infty$ .

若对  $k_i \in R$ , 取

$$K_\infty(k_1, \dots, k_m) \triangleq U_\infty \text{diag}(k_i) Y_\infty^T,$$

则  $k_\infty(k_1, \dots, k_m)$  为实方阵. 于是当  $j\omega \rightarrow j_\infty$  时, 有

$$G(j\omega)k_\infty \rightarrow Y_\infty \text{diag} \left( \frac{r_i k_i}{(j\omega)^{r_i}} \right) Y_\infty^T \quad (17)$$

由(15)式和(17)式可以设计  $K(s)$  为如下 PI 控制器:

$$K(s) = K_\infty + \alpha \frac{K_0}{s} \quad (18)$$

这里较文献[1]不同的是建议在  $K(s)$  中加了一个可调参数  $\alpha$ , 其目的是为了使得  $G(s)K(s)$  在所考虑的频率范围内得到较好的正规程度, 即调整  $G(s)K(s)$  的斜度, 以提高系统的鲁棒性. 下面的数值例子将说明, 在某些情况下, 由于  $\alpha$  的调节作用, 对  $G(s)K(s)$  的斜度有明显改进.

## 五、数值例子

这里仍以系统(1)为例, 用上述方法对其进行重新分析和设计, 全部计算是借助 CCSCAD 中的线性代数基础库 BLINAL 在 PC 机上完成的.

首先通过计算  $G(s)$  的斜度  $MS(G)$ , 如图 2 所示. 可以看出, 当  $[0.1 < \omega < \infty]$  时,  $G(s)$  的斜度大于 0.9. 即若不对  $G(s)$  进行补偿, 其正规程度极差, 也即系统的鲁棒性不好. 为此用反标架方法进行设计, 以求改善系统的正规性, 并满足条件(6)、(8).

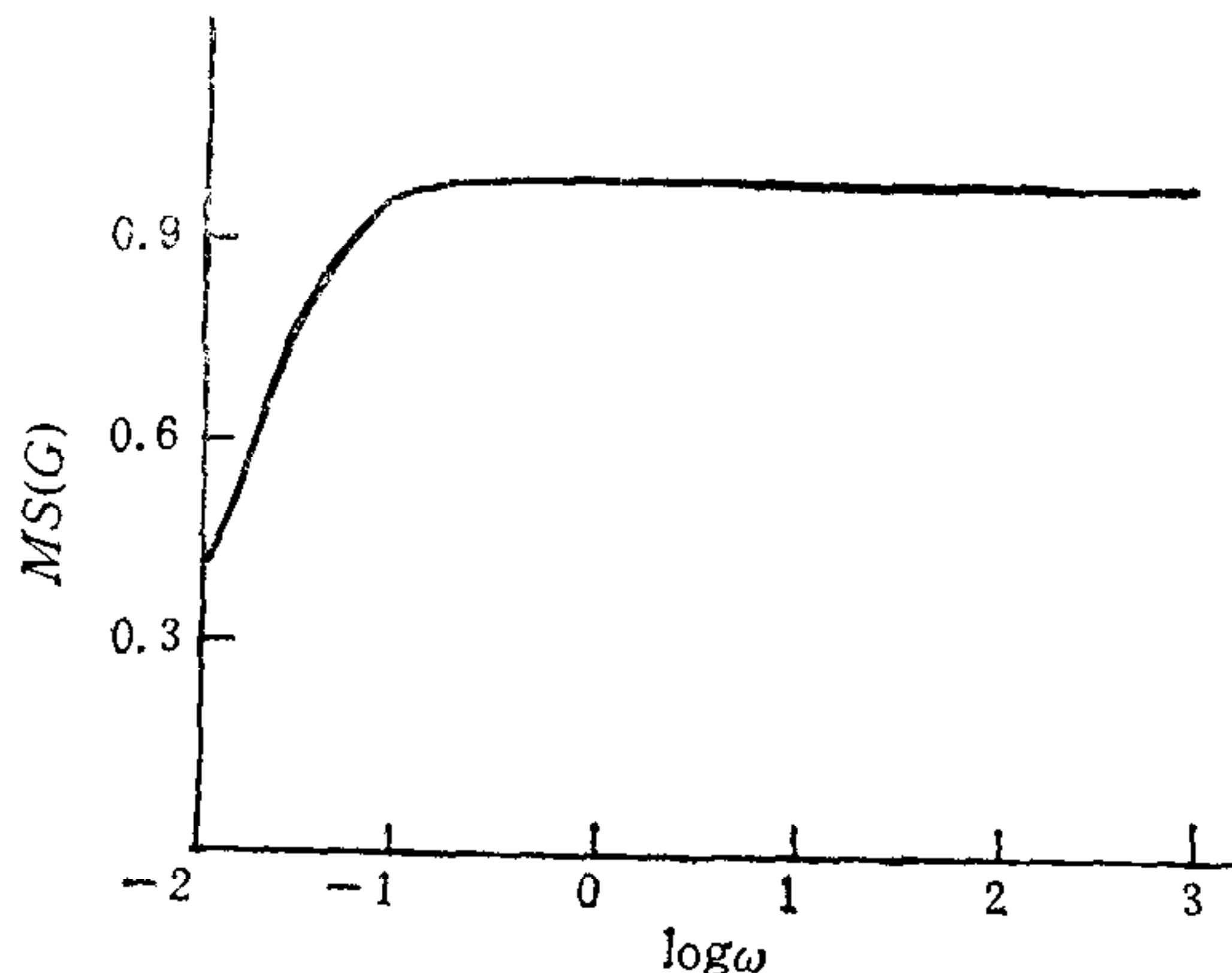


图 2  $G(s)$  的斜度  $MS(G)$

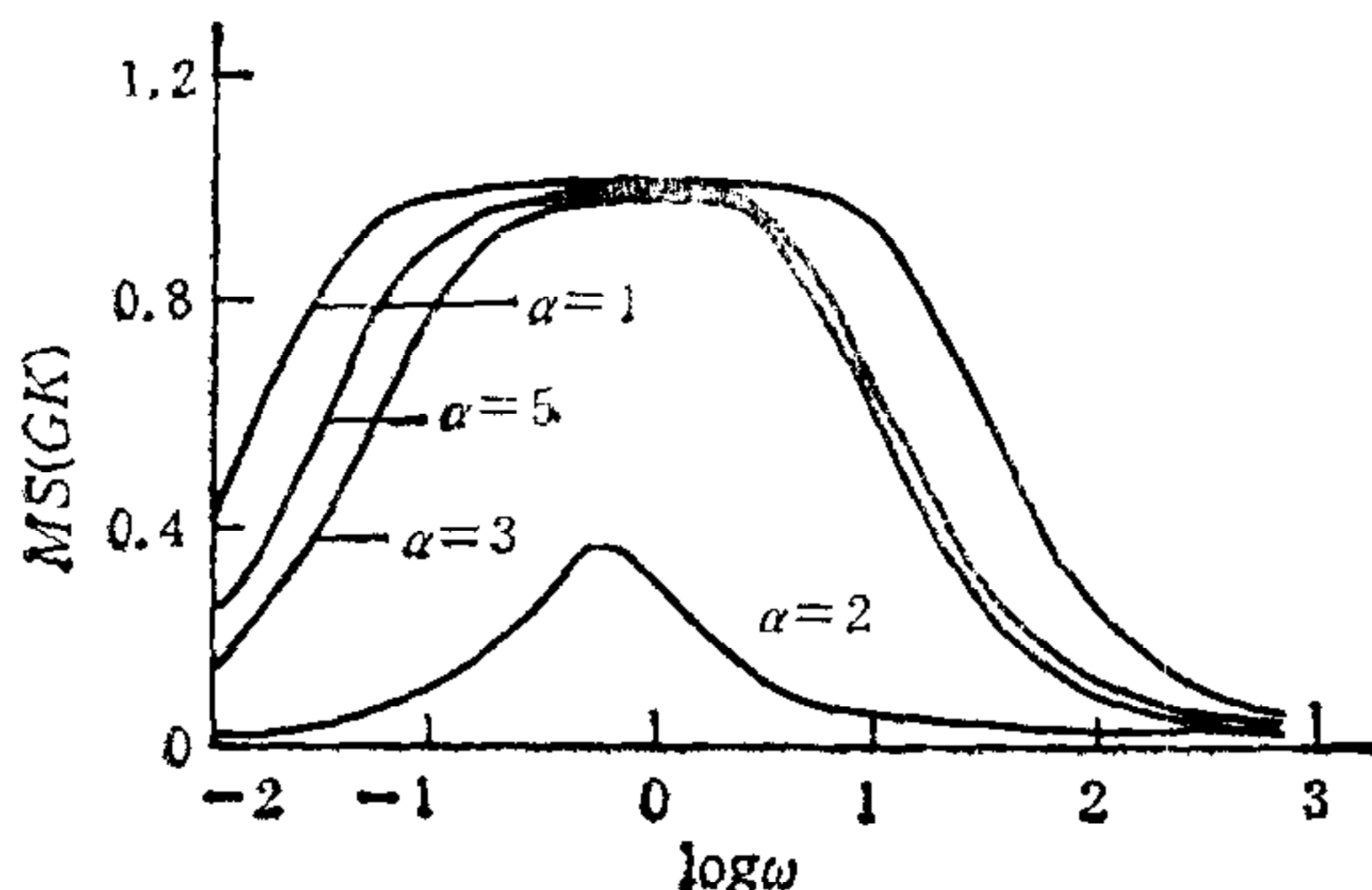


图 3  $G(s)K(s)$  的斜度随  $\alpha$  的变化

当  $s = 0$  时, 有  $G(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ , 因而选取  $K_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

当  $|s| \rightarrow \infty$  时, 有

$$G(j\omega) = \begin{bmatrix} -0.7458 & -0.6661 \\ -0.6661 & 0.7458 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{98.03}{j\omega} & 0 \\ 0 & \frac{0.02}{j\omega} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.6430 & -0.7659 \\ -0.7659 & -0.6430 \end{bmatrix},$$

考虑到增益平衡, 取  $k_1^\infty = 0.1$ ,  $k_2^\infty = 100$ , 于是选取

$$K_\infty = \begin{bmatrix} 50.969 & -57.164 \\ 42.887 & -47.904 \end{bmatrix}.$$

最后得到 PI 控制器为

$$K(s) = K_\infty + \alpha \cdot \frac{K_0}{s}.$$

调整  $\alpha$ , 得到  $G(s)K(s)$  的斜度随  $\alpha$  而变化的规律, 如图 3 所示. 经比较选取  $\alpha = 2$ , 则控制器为

$$K(s) = \begin{bmatrix} \frac{50.969s + 2}{s} & -57.164 \\ 42.887 & \frac{-49.904s + 2}{s} \end{bmatrix}.$$

比较图 2、3, 得知补偿后的系统对于扰动敏感性相对地降低了. 再考虑条件(5), 不难证明它等价于

$$l_m(\omega) < \sigma[I + GK(j\omega)^{-1}], \quad 0 \leq \omega < \infty. \quad (19)$$

图 4 表示补偿前系统的奇异值  $\sigma$  图. 由图不难看出, 该系统稳定性的鲁棒性是不好的. 因为当  $\omega = 2(\text{rad/s})$  时  $\sigma$  约为 0.1, 这意味着:  $l_m(2) = 0.1$  (比如增益有约 10% 的变

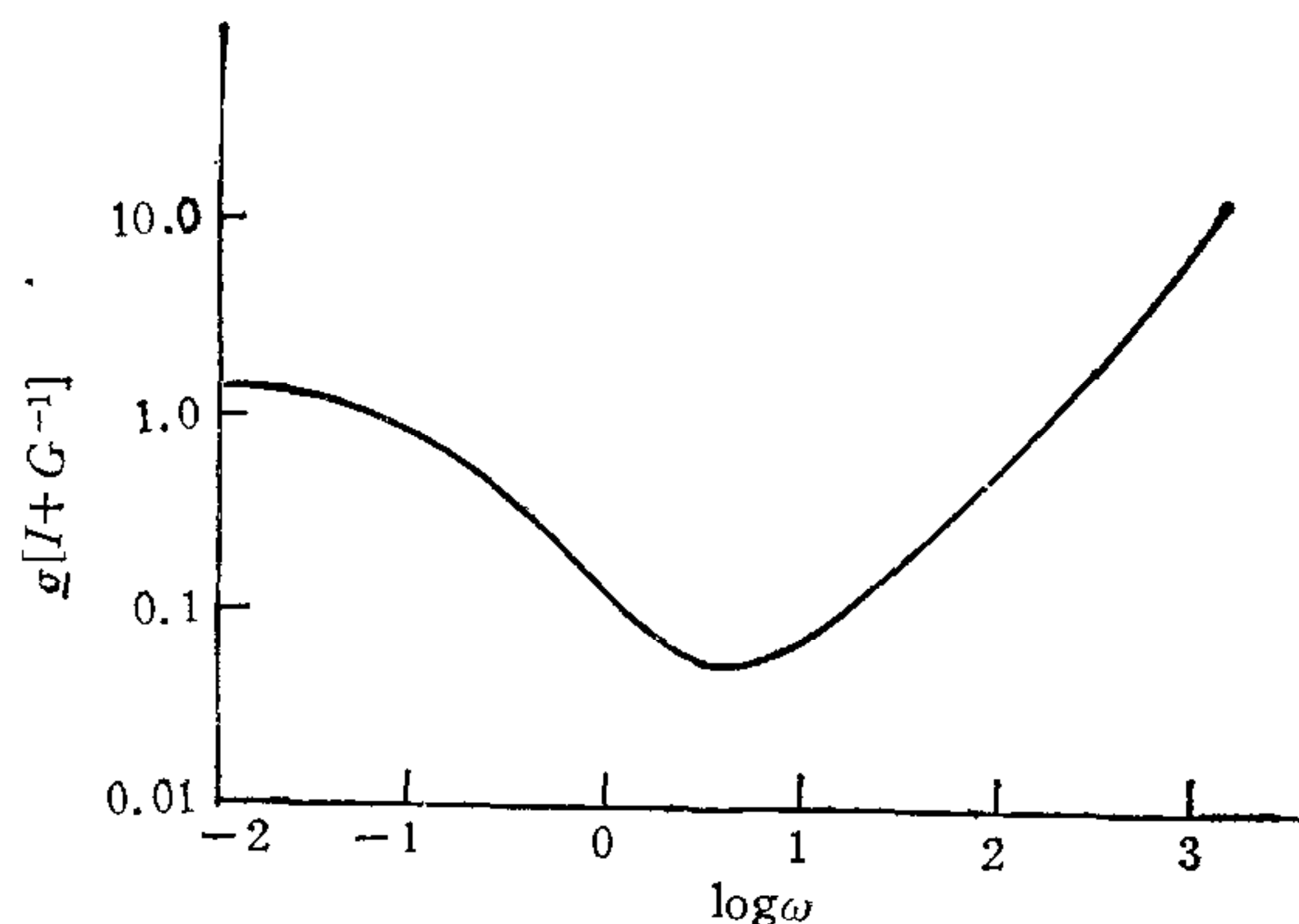


图 4 补偿前系统  $I + G^{-1}$  的  $\sigma$  图

化,相角有约  $6^\circ$  变化时),就可能使系统出现不稳定,这是对图 1 本质上的说明。

由图 5 看到,选择 PI 控制器后的系统使  $\sigma$  提高到大于 0.990,在  $\omega \approx 0.3(\text{rad/s})$  处  $\sigma[I + (GK)^{-1}]$  达到极小,近似为 0.996。这意味着非结构不确定性高达  $l_m(s) \approx 1$  时,系统仍是稳定的,从而使系统稳定性的鲁棒性得到较大改进。另外,仿真结果表明,补偿后的系统不仅鲁棒性好了,系统的动态特性也有明显的改善。

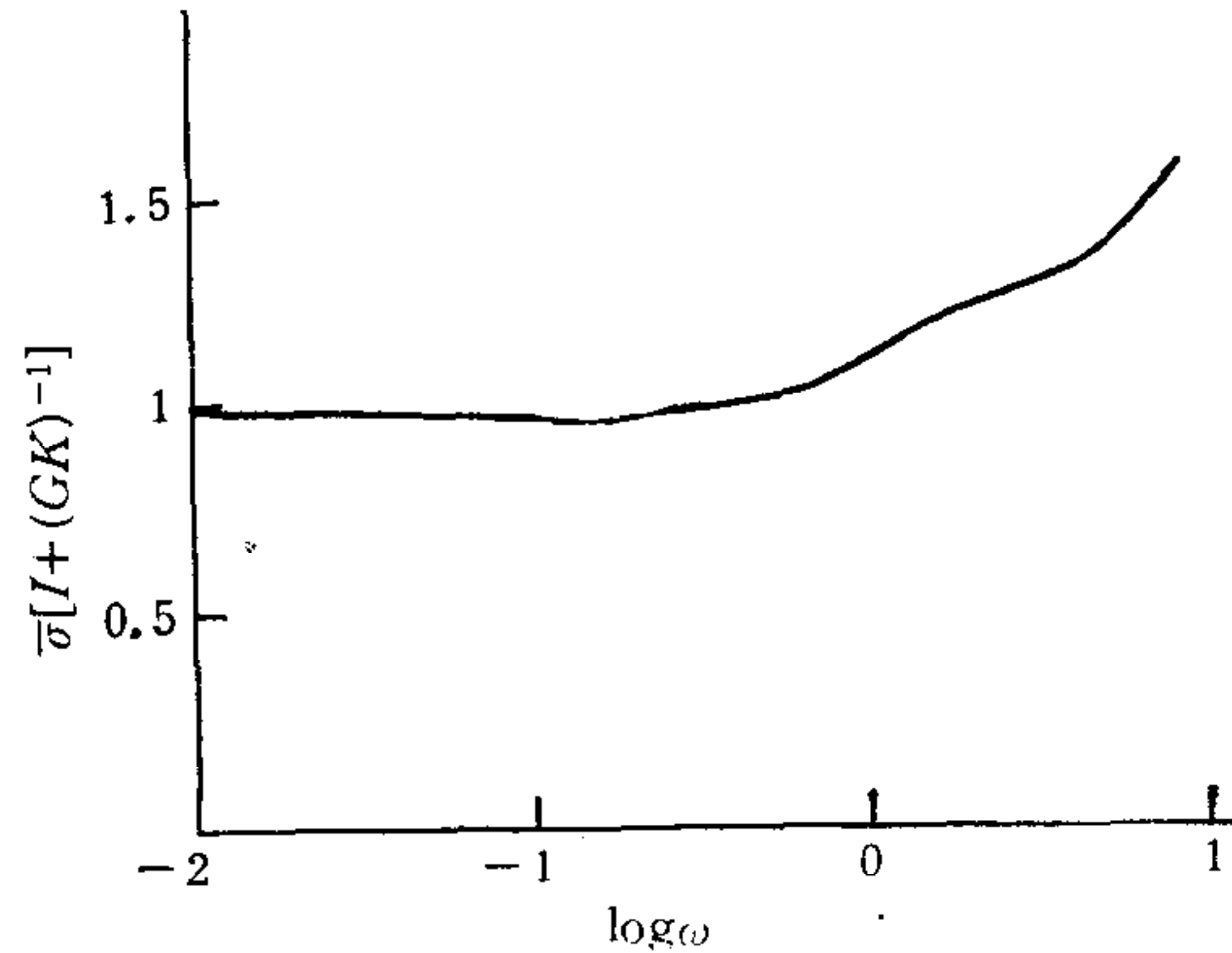


图 5 补偿后系统  $I + (GK)^{-1}$  的  $\sigma$  图

## 六、结 论

上述分析和数值例子说明,反标架方法是一种以矩阵赋值函数的奇异值分解为基础,以正规化为目的,以反标架技术为手段的多变量系统的频域设计方法。与已有的频域法比较,这种方法的优点在于不仅考虑了控制系统的一般性能指标,同时进一步定量地考虑了系统的鲁棒性指标。这也是八十年代以来,多变量系统设计方法的发展方向之一。本文既在 PC 机上实现了反标架方法,也对其中分频段设计的 PI 补偿器的选择提出了改进建议,为控制系统的 CAD 提供了一种可行的方法。

## 参 考 文 献

- [1] Hung, Y. S. and Macfarlane, A. G. J., *Multivariable Feedback: A Quasi-Classical Approach*, Springer-Verlag, 1982.
- [2] Macfarlane, A. G. J. and Hung, Y. S., *A Quasi-Classical Approach to Multivariable Feedback Systems Design*, IFAC Computer Aided Design, Indiana, USA, 1982.
- [3] Doyle, J. C. and Stein, G., *Multivariable Feedback Design: Concepts for a Classical/Modern Synthesis*, *IEEE T-AC*, **AC-26**(1981), No. 1.
- [4] 吴智铭,许晓鸣,王伟,多变量控制系统频域分析和设计的综述,控制理论与应用,第三卷,第二期,1986.
- [5] Munro, N., *Modern Approaches to Control System Design*, 1979.

## ON THE IMPROVEMENT OF ROBUSTNESS DESIGN FOR MULTIVARIABLE SYSTEMS BY USING RFN METHOD

MAO JIANQIN ZHAO JUN MENG XIANZHONG

*(Beijing Institute of Aeromautics and Astronautics)*

### ABSTRACT

The RFN (Reversed-Frame-Normalizing) method developed by Hung and MacFarlane (1982) is a frequency approach of robustness CAD for multivariable systems. The foundation of this approach is the singular value decomposition of a matrix valued function. After a brief introduction to RFN, this paper focus its attention on the improvement of robustness design by using RFN. To improve the design procedure, a compensator model of divided frequency range is proposed. Numerical example shows that the RFN method is superior to the INA method in system robustness design, and the design procedure can be implemented on an IBM PC/XT.

**Key words** ——Multivariable system; robustness; Singular value; reverse frame.