第15卷 第3期 自 动 化 学 报 Vol. 15, No. 3
1989年5月 ACTA AUTOMATICA SINICA May, 1989

非线性变结构控制系统的综合[1)]

孙德滨 程勉 高为炳
（北京航空航天大学）

摘　　要

本文讨论了非线性变结构控制系统的综合问题，提出了滑动模态补偿器的概念．利用本文方法，使用变结构系统理论设计含有参数变化的非线性系统成为可能，控制的设计在某些情况下也相当简单．

关键词——非线性系统；变结构控制；滑动模态．

一、引　言

实际中运行的大量系统都处在一种变化的环境中，用数学模型精确地描述这类系统是不现实的，甚至是不可能的．数学模型的不准确性必然带来误差和不可测干扰．近来在现代控制理论的研究中，系统内部参数变化、外界环境干扰给系统带来的恶劣影响已经受到研究者们的重视，并提出了系统的鲁棒性等问题．

变结构系统（VSS）的理论为解决上述问题提供了有效方法，它允许系统参数有较大的变化和抗大的干扰．VSS 的主要特征是在给定切换域内控制是不连续的，且保证滑动模态存在．主要优点是控制简单，易于实现．当滑动模态发生时，其方程对参数变化不敏感．缺点是有抖振现象．关于 VSS 可见文献 [1—3]．

二、VSS

考察非线性系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t) + B(\boldsymbol{x}, t)\boldsymbol{u}, \tag{1}$$

这里状态向量 $\boldsymbol{x} \in R^n$，控制输入 $\boldsymbol{u} \in R^m$，$m \leqslant n$．控制策略为

$$u_i = \begin{cases} u_i^+(\boldsymbol{x}, t), & \sigma_i(\boldsymbol{x}, t) > 0, \\ u_i^-(\boldsymbol{x}, t), & \sigma_i(\boldsymbol{x}, t) < 0, \end{cases} \quad i = 1, \cdots, m. \tag{2}$$

本文于 1987 年6月5日收到．

1）国家自然科学资金资助课题．

其中 σ_i 是待确定的切换函数，且 $\sigma_i(0,\ t)=0$.

公式(1)称为变结构控制系统，切换域Ω为 $\Omega=\{\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x},t)=0\}$.

迄今，非线性变结构系统切换函数的设计还没有简单易行的方法，只有几条基本原则：

(1) $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x},\ t)$ 可以找到，且尽量简单；

(2) 存在控制 u 使切换域可达，且易于实现；

(3) 切换域足够大；

(4) 滑动模态具有良好品质.

三、变结构系统的综合

1. 问题引出

考虑非线性系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\ t)+B(\boldsymbol{x},\ t)\boldsymbol{u}, \tag{3}$$

式中 $\boldsymbol{x}\in R^n$; $\boldsymbol{u}\in R^m$; $\boldsymbol{t}\in R$; $\boldsymbol{f}(\cdot)\in R^n$; $B(\cdot)\in R^{n\times m}$ 列满. 给出如下形式的切换函数：

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x},\ t)=F(\boldsymbol{x},\ t)-D\boldsymbol{z}, \tag{4}$$

$$\dot{\boldsymbol{z}}=w(\boldsymbol{x},\ t)+E\boldsymbol{z}. \tag{5}$$

式中 $\sigma(\cdot)\in R^m$; $\boldsymbol{z}\in R^m$; (5) 式称为滑动模态补偿器.

下面对系统 (3) 给出假设：

(1) 存在已知的 $\tilde{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x},t)$, 满足

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\ t)-\tilde{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x},\ t)=B(\boldsymbol{x},\ t)\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x},\ t), \tag{6}$$

这里 $\boldsymbol{f}(\cdot)\in R^n$ 非已知但有界；$\tilde{\boldsymbol{f}}(\cdot)\in R^n$; $B(\cdot)\in R^{n\times m}$ 列满，非已知但有界；$h(\cdot)\in R^m$.

(2) 方程 $\dot{\boldsymbol{x}}=\tilde{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x},\ t)$ 具有良好的品质，如渐近稳定等.

2. 滑动模态方程

为简便起见，对式(4)—(5)给出如下选择：

(1) $D=I_m$, $E=0$;

(2) $$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},\ t)=\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{x}}\tilde{\boldsymbol{f}}-\frac{\partial F}{\partial t}. \tag{7}$$

由文[1]等价控制法知，可从 $\dot{\sigma}=0$ 求得等价控制 u^*, 然后将 u^* 代入 (3) 得到滑动模态方程，有

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}&=\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{x}}\dot{\boldsymbol{x}}+\frac{\partial F}{\partial t}-\dot{\boldsymbol{z}}\\&=\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{x}}B\boldsymbol{u}+\frac{\partial F}{\partial t}(\boldsymbol{f}-\tilde{\boldsymbol{f}}),\end{aligned} \tag{8}$$

所以

$$\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{x}}B\boldsymbol{u}^*+\frac{\partial F}{\partial t}(\boldsymbol{f}-\tilde{\boldsymbol{f}})=0,$$

即
$$u^* = -\left[\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{x}} B\right]^{-1} \frac{\partial F}{\partial t}(\boldsymbol{f} - \tilde{\boldsymbol{f}}). \tag{9}$$

将(9)代入(3),则滑动模态方程为
$$\dot{\boldsymbol{x}} = \tilde{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}, t). \tag{10}$$

一般而言, VSS 的设计分为两个阶段: (a) 选择切换函数 $\sigma(\cdot)$, 即设计 $F(\cdot)$ 与 $\boldsymbol{w}(\cdot)$; (b) 选择控制使滑动模态存在.

3. 设计问题

A. 切换函数的设计

从以上推导中可以看出，只要 $\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{x}} B$ 逆存在,(10)式总成立. 因此只要 B 列满,总能找到 $\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{x}}$ 使 $\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{x}} B$ 可逆,如 $\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{x}} = [B^T B]^{-1} B^T$.

B. 控制综合

在文献[3]中给出了滑动模态存在性定理,但只是一般而论,用来求控制比较困难.下面给出滑动模态存在的充分条件:
$$\sigma_i \dot{\sigma}_i < 0, \quad i = 1, \cdots, m, \tag{11}$$
并通过选取 F 使控制尽量简化. 由式(8)有:
$$\dot{\sigma} = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{x}} B\boldsymbol{u} + \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{x}} \boldsymbol{f} + \frac{\partial F}{\partial t} - \boldsymbol{w}. \tag{12}$$

以下将 B 分为几种情况讨论:

(1) B 为已知

取 $\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{x}} = [B^T B]^{-1} B^T$, 则 $\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{x}} B = I_m$.

式(12)为
$$\dot{\sigma} = \boldsymbol{u} + \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{x}} \boldsymbol{f} + \frac{\partial F}{\partial t} - \boldsymbol{w},$$
$$\dot{\sigma}_i = u_i + \frac{\partial F_i}{\partial \boldsymbol{x}} \boldsymbol{f} + \frac{\partial F_i}{\partial t} - w_i, \quad i = 1, \cdots m, \tag{13}$$
$$\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \partial F_1/\partial \boldsymbol{x} \\ \vdots \\ \partial F_m/\partial \boldsymbol{x} \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}.$$

若取控制
$$u_i = \begin{cases} u_i^+, & \sigma_i > 0, \\ u_i^-, & \sigma_i < 0, \end{cases} i = 1, \cdots, m, \tag{14}$$
$$\left.\begin{aligned} u_i^+ &< \min\left[-\left(\frac{\partial F_i}{\partial \boldsymbol{x}} \boldsymbol{f} + \frac{\partial F_i}{\partial t} - w_i\right)\right], \\ u_i^- &> \max\left[-\left(\frac{\partial F_i}{\partial \boldsymbol{x}} \boldsymbol{f} + \frac{\partial F_i}{\partial t} - w_i\right)\right], \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

则 $\sigma_i \dot{\sigma}_i < 0$, ($\sigma_i \neq 0$) $i = 1, \cdots, m$,

即控制使滑动模态存在.

(2) B 为非已知,但有一定结构

设 $$B=\begin{bmatrix}B_1\\B_2\end{bmatrix},\ f=\begin{bmatrix}\boldsymbol{f}_1\\\boldsymbol{f}_2\end{bmatrix},\quad B_2\in R^{m\times m} \text{ 可逆},\ \boldsymbol{f}_2\in R^m,$$

则可取 $\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{x}}=[0,\ I_m]$，有 $\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{x}}B=B_2$

$$\dot{\sigma}=B_2\boldsymbol{u}+\boldsymbol{f}_2+\frac{\partial F}{\partial t}-\boldsymbol{w}. \tag{16}$$

若 B_2 为上三角形

$$B_2=\begin{bmatrix}b_{11} & 0 & \cdots 0\\ b_{21} & b_{22} & \cdots 0\\ \vdots & \vdots & \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots b_{mm}\end{bmatrix},$$

其中 $b_{ij}(i=1,\cdots,m,\ j=1,\cdots,m)$ 有界;

假设 $\sigma_i=0$ 按如下顺序到达:

$$\sigma_1\to\sigma_2\to\cdots\to\sigma_m,$$

则由式(16)有:

$$\dot{\sigma}_1=b_{11}u_1+f_{21}+\frac{\partial F_1}{\partial t}-w_1,$$

$$\dot{\sigma}_2=b_{22}u_2+b_{21}u_1+f_{22}+\frac{\partial F_2}{\partial t}-w_2,$$

$$\vdots$$

$$\dot{\sigma}_m=b_{mm}u_m+\sum_{j=1}^{m-1}b_{mj}u_j+f_{2m}+\frac{\partial F_m}{\partial t}-w_m,$$

$$f_2^T=[f_{21},\cdots,f_{2m}].$$

若满足

$$\left.\begin{aligned} b_{ii}u_i^+ &< \min\left[-\left(\sum_{j=1}^{i-1}b_{ij}u_j+f_{2j}+\frac{\partial F_i}{\partial t}-w_i\right)\right],\\ b_{ii}u_i^- &> \max\left[-\left(\sum_{j=1}^{i-1}b_{ij}u_j+f_{2j}+\frac{\partial F_i}{\partial t}-w_i\right)\right],\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

则有 $\sigma_i\dot{\sigma}_i<0$，$(\sigma_i\neq 0)$，$i=1,\cdots,m$.

由于 b_{ij} 有界,式(17)中的 u_i^+、u_i^- 不难求得.

(3) B 为一般非已知

由式 (16) 有:

$$\dot{\sigma}=B_2\boldsymbol{u}+\boldsymbol{g},\quad \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{x}}=[0,\ I_m],$$

$$\boldsymbol{g}=\boldsymbol{f}_2+\frac{\partial F}{\partial t}-\boldsymbol{w}.$$

可得 $$\dot{\sigma}=B_2^{i-1}\boldsymbol{u}^{i-1}+\boldsymbol{b}_2^iu_i+B_2^{i+1}\boldsymbol{u}^{i+1}+\boldsymbol{g}, \tag{18}$$

其中 $B_2=[B_2^{i-1},\ \boldsymbol{b}_2^i,\ B_2^{i+1}]$，$B_2^{i-1}\in R^{m\times(i-1)}$，$B_2^{i+1}\in R^{m\times(m-i)}$，$\boldsymbol{b}_2^i\in R^m$，

$$u^{i-1}=[u_1,\cdots,u_{i-1}]^T\in R^{i-1},\quad u^{i+1}=[u_{i+1},\cdots,u_m]^T\in R^{m-i}.$$

下面介绍分层递推算法.

定义. 如果滑动模态首先在 $\sigma_p=0$ 上发生,而后有 $\sigma_p=0$ 及 $\sigma_q=0$, 则切换域到达顺序记为 $\sigma_p\to\sigma_q$. 具体算法是:

(*a*) 指定 $\sigma_1\to\sigma_2\to\cdots\to\sigma_m$;

(*b*) 首先从 $i=m$ 开始递推;

(*c*) 假定滑动模态在前 $i-1$ 个切换域上发生, 有 $\sigma_j=0$, $j=1,\cdots,i-1$, 从而得到等价控制 $(\boldsymbol{u}^{i-1})^*=[u_1^*,\cdots,u_{i-1}^*]^T$. 由式(18)有

$$\dot{\sigma}^{i-1}=B_{2(i-1)}^{i-1}\boldsymbol{u}^{i-1}+\boldsymbol{b}_{2(i-1)}^{i}u_i+B_{2(i-1)}^{i+1}\boldsymbol{u}^{i+1}+\boldsymbol{g}^{i-1},$$

所以

$$(\boldsymbol{u}^{i-1})^*=-(B_{2(i-1)}^{i-1})^{-1}[\boldsymbol{b}_{2(i-1)}^{i}u_i+\boldsymbol{B}_{2(i-1)}^{i+1}\boldsymbol{u}^{i+1}+\boldsymbol{g}^{i-1}],\tag{19}$$

$$B_2^{i-1}=\begin{bmatrix}B_{2(i-1)}^{i-1}\\B_{2(i-1)}\end{bmatrix},\quad B_2^{i+1}=\begin{bmatrix}B_{2(i-1)}^{i+1}\\B_{2(i+1)}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{b}_2^i=\begin{bmatrix}\boldsymbol{b}_{2(i-1)}^i\\\boldsymbol{b}_{2i}^i\end{bmatrix},$$

$$B_{2(i-1)}^{i-1}\in R^{(i-1)\times(i-1)},\quad B_{2(i-1)}^{i+1}\in R^{(i-1)\times(m-i)},\quad \boldsymbol{b}_{2(i-1)}^i\in R^{(i-1)\times 1},$$

$$\sigma^{i-1}=[\sigma_1,\cdots,\sigma_m]^T.$$

$(u^{i-1})^*$ 是 u_i、u^{i+1} 及 g 的函数,这里 u^{i+1} 是已知的. 从前几步的运算可得到 u_k^+, u_k^-, $k=i+1,\cdots,m$.

(*d*) 计算 u_i

$$\dot{\sigma}_i=\boldsymbol{b}_{i-1}^T(\boldsymbol{u}^{i-1})^*+b_{ii}u_i+\boldsymbol{b}_{i+1}^T\boldsymbol{u}^{i+1}+g_i,\tag{20}$$

$$\boldsymbol{b}_{i-1}^T=[b_{i1},\cdots,b_{i(i-1)}],\quad \boldsymbol{b}_{i+1}^T=[b_{i(i+1)},\cdots,b_{im}].$$

将(19)代入(20)有

$$\dot{\sigma}_i=\gamma_iu_i+\beta_iu^{i+1}+\alpha_i,\tag{21}$$

$$\gamma_i=b_{ii}-\boldsymbol{b}_{i-1}^T(B_{2(i-1)}^{i-1})^{-1}\boldsymbol{b}_{2(i-1)}^i\in R,$$

$$\boldsymbol{\beta}_i=\boldsymbol{b}_{i+1}^T-\boldsymbol{b}_{i-1}^T(B_{2(i-1)}^{i-1})^{-1}(B_{2(i-1)}^{i+1})\in R^{(m-i)},$$

$$\alpha_i=g_i-\boldsymbol{b}_{i-1}^T(B_{2(i-1)}^{i-1})^{-1}\boldsymbol{g}^{i-1}\in R.$$

若取

$$\gamma_iu_i^+<\min[-(\beta_i\boldsymbol{u}^{i+1}+\alpha_i)],$$

$$\gamma_iu_i^->\max[-(\beta_i\boldsymbol{u}^{i+1}+\alpha_i)],\tag{22}$$

有 $\sigma_i\dot{\sigma}_i<0$.

(*e*) 令 $i=i-1$. 若 $i=0$ 停止运算,否则返到(*c*).

由于(22)式为代数不等式, 因此 α_i、β_i、γ_i 可用估值法得到. 若此法仍不能得到 u_i^+、u_i^-, 可对 B_2 进行在线辨识,然后估算 α_i、β_i、γ_i.

4. 实际滑动模态的近似性

以上是针对理想情况而言,即滑动模态在切换域内发生. 但对实际物理系统来说,由于许多非理想因素存在,如开关延迟等,理想情况很少发生, 一般是 $\sigma\to 0$. 下述定理给出了实际滑动模态与理想模态之间的近似关系.

定理. 考虑非线性系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t)+\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}),\quad \boldsymbol{x}\in R^n,\ \boldsymbol{u}\in R^m.$$

引入下面切换函数:

$$\sigma = F(x, t) + z, \quad \dot{z} = \tilde{f}(x, t), \quad \sigma, z \in R^m.$$

如果 $f(\cdot)$，$B(\cdot)$ 是光滑函数，$g(\cdot) \in R^m$ 为全局可逆，u 为紧集，$(\partial F/\partial x)B$ 可逆，则有

$$\lim_{\Delta \to 0} x(t) = x^*(t), \quad \|\sigma\| < \Delta,$$

其中 x^* 为理想滑动模态，x 为实际滑动模态.

证明：可参看文[4].

四、结　束　语

本文讨论了非线性变结构控制系统，提出了一种新的切换函数设计方法．该方法使利用变结构方法综合非线性系统成为可能.

参　考　文　献

[1] Utink, V. I., Sliding Mode and Their Application to Variable Structure Systems, Moscow; Mir (1978).

[2] Utink, V. I., Variable Structure Systems with sliding Mode: A Survey, *IEEE Trans. Automa. Contr.* **AC-22**(1977), 212—222.

[3] Itkis, U., Control System of Variable Structure, John Wiley, 1976.

[4] Bartolini, G. & Zolezzi, T., Control of Nonlinear Variable Structure Systems, *J. Math. Anal. Appl.*, **118**(1986), 42—62.

THE SYNTHESIS OF NONLINEAR VARIABLE STRUCTURE CONTROL SYSTEMS

Sun Debin　　Cheng Mian　　Gao Weibing

Cheng Mian　　Gao Weibing

(Beijing University of Aeronautics and Astranautics)

Abstract

In this paper, nonlinear variable structure control systems are considered, and a dynamic sliding mode compensator is proposed. It makes it possible to design nonlinear variable structure control systems with parameter variations and disturbances. In some cases, control laws can be designed simply.

Key words ——Nonlinear system; variable structure control; sliding mode.