中立型时滞系统在 C_1 空间中的稳定性

章 毅　　钟守铭
(电子科技大学)

摘　　要

本文中研究了中立型时滞系统在 C_1 空间中的稳定性，获得了半线性和非线性中立型时滞系统在 C_1 空间中稳定性的一些充分条件.

关键词——中立型;时滞;空间;稳定性.

一、引　　言

在时滞系统的稳定性理论中,对于中立型时滞系统的稳定性的研究进展很慢[1]-[9],这主要是由于问题本身的困难性及缺少方法所致. 文[2]和[3]研究了中立型系统在通常意义下的稳定性. 文[4]—[7]则在 C_1 空间中对中立型时滞系统的稳定性进行了研究，获得了稳定、渐近稳定性方面的定理. 众所周知，这比在通常意义下研究稳定性更加困难. 在文[8]、[9]中,笔者提出了中立型时滞系统的零解在 C_1 空间中的大范围指数稳定性问题. 本文将利用另一种方法来继续研究中立型时滞系统在 C_1 空间中的大范围指数稳定性,进一步改进了过去的研究结果.

我们总是假定本文所考虑的系统的解是存在、唯一和连续的.

二、半线性系统

研究如下的中立型系统:

$$\left.\begin{aligned}&\dot{x}(t)=A(t)x(t)+f[t,x(t-\Delta(t)),\dot{x}(t-\Delta(t))],\\&x(t)=\varphi(t),\quad \dot{x}(t)=\dot{\varphi}(t),\quad t_0-\Delta\leqslant t\leqslant t_0,\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

其中 $x=\mathrm{col}(x_1,\ x_2,\cdots,\ x_n)$; $A(t)$ 为 $n\times n$ 阶连续函数矩阵，且有 $\sup\limits_{t\geqslant t_0}\|A(t)\|\leqslant a<+\infty$. $f:R\times R^n\times R^n\to R^n$, $f(t,0,0)\equiv 0$; 时滞 $\Delta(t)$ 是非负连续有界函数，即 $0\leqslant\Delta(t)\leqslant\Delta$, Δ 是某一常数. $\varphi(t)$, $\dot{\varphi}(t)$ 在 $t_0-\Delta\leqslant t\leqslant t_0$ 上连续,记

$$\|R\|=\sup_{t_0-\Delta\leqslant t\leqslant t_0}[\|\varphi(t)\|+\|\dot{\varphi}(t)\|].$$

本文于 1986 年 10 月 22 日收到.

定义. 如果存在常数 $\lambda > 0$，且对任意的 $\alpha > 0$，存在 $K(\alpha) > 0$，使得当 $\|R\| \leqslant \alpha$ 时，有:

$$\|x(t)\| + \|\dot{x}(t)\| \leqslant K(\alpha)\|R\|e^{-\lambda(t-t_0)}, \quad t \geqslant t_0,$$

则称系统(1)的零解在 C_1 空间中大范围指数稳定.

设 $y(s, t)$ 满足

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y(s, t)}{\partial t} = A(t)y(s, t), \\ Y(s, s) = I, \quad (I \text{ 是单位矩阵}). \end{cases}$$

定理 1. 若系统(1)满足以下条件:

(i) $\|Y(s, t)\| \leqslant e^{-r(t-s)}$, $(t, s \geqslant t_0)$, $r > 0$;

(ii) $\|f[t, x(t-\Delta(t)), \dot{x}(t-\Delta(t))]\| \leqslant b\|x(t-\Delta(t))\| + c\|\dot{x}(t-\Delta(t))\|$, 其中 $b \geqslant 0$, $c > 0$;

(iii) $\dfrac{b+ac}{r} + c < 1$;

则系统(1)的零解在 C_1 空间中大范围指数稳定.

证. 构造函数

$$f(\lambda) = \frac{e^{\lambda\Delta}(b+ac)}{r-\lambda} + e^{\lambda\Delta}c,$$

显然，$f(\lambda)$ 在原点的某一足够小的区域内是连续的，因为:

$$f(0) = \frac{b+ac}{r} + c < 1,$$

故必有足够小的 $\lambda_1(\lambda_1 < r)$，使得:

$$f(\lambda_1) = \frac{e^{\lambda_1\Delta}(b+ac)}{r-\lambda_1} + e^{\lambda_1\Delta}c \overset{\text{def}}{=\!=} \delta < 1.$$

对系统(1)利用参数变易法，可得:

$$x(t) = y(t_0, t)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} y(s, t)f[s, x(s-\Delta(s)), \dot{x}(s-\Delta(s))]ds,$$

代入(1)式得到:

$$\dot{x}(t) = A(t)Y(t_0, t)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} A(t)Y(s, t)f[s, x(s-\Delta(s)), \dot{x}(s-\Delta(s))]ds + f[t, x(t-\Delta(t)), \dot{x}(t-\Delta(t))].$$

利用条件 (i)、(ii) 可推得:

$$\|x(t)\| \leqslant e^{-r(t-t_0)}\|R\| + \int_{t_0}^{t} e^{-r(t-s)}[b\|x(s-\Delta(s))\| + c\|\dot{x}(s-\Delta(s))\|]ds$$

$$\|\dot{x}(t)\| \leqslant e^{-r(t-t_0)}a\|R\| + \int_{t_0}^{t} ae^{-r(t-s)}[b\|x(s-\Delta(s)]\| + c\|\dot{x}(s-\Delta(s))\|]ds + [b\|x(t-\Delta(t))\| + c\|\dot{x}(t-\Delta(t))\|].$$

(a) 若 $b \neq 0$，令

$$P(t) = [b\|x(t)\| + c\|\dot{x}(t)\|]e^{\lambda_1(t-t_0)}, \quad t \geqslant t_0 - \Delta,$$

不难推得:

$$P(t) \leqslant (b+c+ac)\|R\| + e^{\lambda_1\Delta}(b+ac)\int_{t_0}^{t} e^{-r(t-s)}P(s-\Delta(s))ds$$
$$+ ce^{\lambda_1\Delta}P(t-\Delta(t)), \quad t \geqslant t_0. \tag{2}$$

现将证明,对一切 $t \geqslant t_0$, 有:

$$P(t) \leqslant \frac{2(b+c+ac)}{1-\delta}\|R\| \overset{\text{def}}{=\!=} M.$$

注意到当 $t_0 - \Delta \leqslant t \leqslant t_0$ 时,有:

$$P(t) \leqslant (b+c)\|R\| < (b+c+ac)\|R\| < M, \tag{3}$$

于是,假如上面的结论不成立,则必有 $t_1 > t_0$, 使得:

$$P(t_1) = M, \quad P(t) < M, \quad t_0 - \Delta \leqslant t < t_1. \tag{4}$$

将 $P(t) \leqslant M$, $t_0 - \Delta \leqslant t \leqslant t_1$ 代入(2)式右端,有:

$$P(t) \leqslant (b+c+ac)\|R\| + \delta M, \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1,$$

结合(3)式,则有:

$$P(t) \leqslant (b+c+ac)\|R\| + \delta M, \quad t_0 - \Delta \leqslant t \leqslant t_1.$$

下面用数学归纳法证明下式成立:

$$P(t) \leqslant (b+c+ac)\|R\|[1+\delta+\delta^2+\cdots+\delta^{n-1}] + \delta^n M,$$
$$t_0 - \Delta \leqslant t \leqslant t_1. \tag{5}$$

当 $n=1$ 时,显然(5)式成立. 设 $n=k$ 时,(5)式成立,即有:

$$P(t) \leqslant (b+c+ac)\|R\|[1+\delta+\delta^2+\cdots+\delta^{k-1}] + \delta^k M \overset{\text{def}}{=\!=} M_k,$$
$$t_0 - \Delta \leqslant t \leqslant t_1.$$

将 $P(t) \leqslant M_k$, $t_0 - \Delta \leqslant t \leqslant t_1$ 代入(2)式右端,则有:

$$P(t) \leqslant (b+c+ac)\|R\| + \delta M_k, \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1.$$

结合(3)式,则有:

$$P(t) \leqslant (b+c+ac)\|R\| + \delta M_k$$
$$= (b+c+ac)\|R\|(1+\delta+\delta^2+\cdots+\delta^k) + \delta^{k+1}M,$$
$$t_0 - \Delta \leqslant t \leqslant t_1.$$

即当 $n=k+1$ 时, (5)式亦成立, 从而证明了对一切自然数 n, (5) 式成立. 特别地有:

$$P(t_1) \leqslant (b+c+ac)\|R\|[1+\delta+\delta^2+\cdots+\delta^{n-1}] + \delta^n M.$$

令 $n \to \infty$ 时,注意到 $\delta < 1$, 于是得到:

$$P(t_1) \leqslant \frac{(b+c+ac)}{1-\delta}\|R\| < M,$$

这与(4)式中 $P(t_1) = M$ 相矛盾. 这样便证明了不等式

$$P(t) < \frac{2(b+c+ac)}{1-\delta}\|R\|, \quad t \geqslant t_0,$$

成立,由此式可推得:

$$\|x(t)\| + \|\dot{x}(t)\| \leqslant \frac{2(b+c+ac)}{(1-\delta)\min(b, c)}\|R\|e^{-\lambda_1(t-t_0)}, \quad t \geqslant t_0.$$

此式表明系统(1)的零解在 C_1 空间中大范围指数稳定.

(*b*) 若 $b=0$，则条件(iii)成为 $ac/r+c<1$. 此时，必有足够小的 $\varepsilon>0$，使得 $(\varepsilon+ac)/r+c<1$.

令 $P(t)=(\varepsilon\|x(t)\|+c\|\dot{x}(t)\|)e^{\lambda_1(t-t_0)}$，$t\geqslant t_0-\Delta$，可推得：

$$P(t)\leqslant(\varepsilon+c+ac)\|R\|+e^{\lambda_1\Delta}(\varepsilon+ac)\int_{t_0}^{t}e^{-r(t-s)}P(s-\Delta(s))ds$$
$$+ce^{\lambda_1\Delta}P(t-\Delta(t)),\quad t\geqslant t_0.$$

然后类似于前面的推导，可得到：

$$\|x(t)\|+\|\dot{x}(t)\|\leqslant\frac{2(\varepsilon+c+ac)}{(1-\delta)\min(\varepsilon,c)}\|R\|e^{-\lambda_1(t-t_0)},\quad t\geqslant t_0.$$

所以系统(1)的零解在 C_1 空间中大范围指数稳定. 证毕.

考虑系统：

$$\left.\begin{aligned}&\dot{x}(t)=A(t)x(t)+D(t)x(t-\Delta(t))+f[t,\ x(t-\Delta(t)),\ \dot{x}(t-\Delta(t))],\\&x(t)=\varphi(t),\quad \dot{x}(t)=\dot{\varphi}(t),\quad t_0-\Delta\leqslant t\leqslant t_0.\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

其中 $D(t)$ 是 $n\times n$ 阶连续函数矩阵，且有 $\sup\limits_{t\geqslant t_0}\|D(t)\|\leqslant d<+\infty$. 其它条件与系统(1)一样.

设 $y_1(s,t)$ 满足

$$\begin{cases}\dfrac{\partial y_1(s,t)}{\partial t}=[A(t)+D(t)]y_1(s,t),\\ y_1(s,s)=I,\quad (I\ \text{是单位矩阵})\end{cases}$$

定理 2. 若系统(6)满足以下条件：

(i) $\|y_1(s,t)\|\leqslant e^{-r(t-s)}$，$(t,s\geqslant t_0)$，$r>0$；

(ii) $\|f[t,x(t-\Delta(t)),\dot{x}(t-\Delta(t))]\|\leqslant b\sup\limits_{t-\Delta\leqslant\theta\leqslant t}\|x(\theta)\|+c\sup\limits_{t-\Delta\leqslant\theta\leqslant t}\|\dot{x}(\theta)\|$，

其中 $b\geqslant0$，$c>0$；

(iii) $\dfrac{b+ac}{r}+\Delta d+c<1$；

则系统(6)的零解在 C_1 空间中大范围指数稳定.

证. 只要注意到：

$$\|x(t-\Delta(t))-x(t)\|\leqslant\Delta\sup_{t-\Delta\leqslant\theta\leqslant t}\|\dot{x}(\theta)\|,$$

类似定理 1 的证明，可推证本定理.

推论. 考虑系统：

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=ax(t)+bx(t-\Delta(t))+c\dot{x}(t-\Delta(t)),\\ x(t)=\varphi(t),\quad \dot{x}(t)=\dot{\varphi}(t),\quad t_0-\Delta\leqslant t\leqslant t_0.\end{cases}$$

若下面任一条件满足：

(i) $a<0$，$\left|\dfrac{b}{a}\right|+2|c|<1$，

(ii) $a<0$，$\Delta|b|+2|c|<1$，

则其零解在 C_1 空间中大范围指数稳定.

三、非线性系统

考虑系统:

$$\left.\begin{aligned}&\dot{x}(t)=F[t\ x(t),\ x(t-\Delta(t)),\ \dot{x}(t-\Delta(t))],\\&x(t)=\varphi(t),\quad \dot{x}(t)=\dot{\varphi}(t),\quad t_0-\Delta\leqslant t\leqslant t_0,\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

其中 $F:R\times R^n\times R^n\times R^n\to R^n$, $F(t,0,0,0)\equiv 0$. 时滞 $\Delta(t)$ 是一个非负有界连续函数,即 $0\leqslant\Delta(t)\leqslant\Delta$, Δ 是某一常数. $\varphi(t)$、$\dot{\varphi}(t)$ 在 $t_0-\Delta\leqslant t\leqslant t_0$ 上连续,记

$$\|R\|=\sup_{t_0-\Delta\leqslant t\leqslant t_0}[\|\varphi(t)\|+\|\dot{\varphi}(t)\|].$$

条件 I: $\|F(t,x_1,y_1,z_1)-F(t,x_2,y_2,z_2)\|$

$$\leqslant a\|x_1-x_2\|+b\|y_1-y_2\|+c\|z_1-z_2\|,$$

其中 $a>0$, $b\geqslant 0$, $c>0$.

条件 II: 存在 $V(t,x)$ 满足下列不等式:

(i) $(\alpha\|x\|)^2\leqslant V(t,x)\leqslant(\beta\|x\|)^2$, $\alpha>0$, $\beta>0$;

(ii) $\left|\dfrac{\partial V(t,x)}{\partial x}\right|\leqslant 2\delta\sqrt{V(t,x)}$, $\delta>0$;

(iii) $\dfrac{\partial V(t,x)}{\partial x}F[t,x(t),0,0]+\dfrac{\partial V(t,x)}{\partial t}\leqslant -2rV$, $r>0$.

条件 III: $\dfrac{\delta(b+ac)}{\alpha r}+c<1$.

定理 3. 若条件 I、II、III 成立,则系统 (7) 的零解是在 C_1 空间中大范围指数稳定.

证. 设 $x(t)$ 是(7)的解,记 $V(t)=V(t,x(t))$, 则由条件 I、II 可得:

$$\begin{aligned}\dot{V}(t)=&\frac{\partial V(t,x)}{\partial x}F[t,x(t),0,0]+\frac{\partial V(t,x)}{\partial t}\\&+\frac{\partial V(t,x)}{\partial x}\{F[t,x(t),x(t-\Delta(t)),\dot{x}(t-\Delta(t))]-F[t,x(t),0,0]\}\\\leqslant&-2rV(t)+2\delta\sqrt{V(t)}(b\|x(t-\Delta(t))\|+c\|\dot{x}(t-\Delta(t))\|).\end{aligned}$$

令: $V_1(t)=\sqrt{V(t)+\|R\|^2e^{-2r(t-t_0)}}$, $t\geqslant t_0$, 则有:

$$V_1(t)\geqslant\sqrt{V(t)}\geqslant\alpha\|x\|,\quad t\geqslant t_0;\quad V_1(t_0)\leqslant\sqrt{\beta^2+1}\,\|R\|.\tag{8}$$

并且不难计算得:

$$\dot{V}(t)\leqslant-2V_1(t)+\delta(b\|x(t-\Delta(t))\|+c\|\dot{x}(t-\Delta(t))\|),$$

从而有:

$$\frac{d[V_1e^{-r(t-s)}]}{ds}\leqslant\delta e^{-r(t-s)}(b\|x(s-\Delta(s))\|+c\|\dot{x}(s-\Delta(s))\|).\tag{9}$$

将上式从 t_0 到 t 两端积分,得到:

$$V_1(t)\leqslant V_1(t_0)e^{-r(t-t_0)}+\delta\int_{t_0}^{t}e^{-r(t-s)}(b\|x(s-\Delta(s))\|+c\|\dot{x}(s-\Delta(s))\|)ds.$$

由(8)式有：

$$\|x(t)\| \leqslant K\|R\| + \frac{\delta}{\alpha}\int_{t_0}^{t} e^{-r(t-s)}(b\|x(s-\Delta(s))\| + c\|\dot{x}(s-\Delta(s))\|)ds, \quad t \geqslant t_0,$$

其中 $K = \sqrt{\beta^2+1}/\alpha$。

利用条件 I 可推得：

$$\|\dot{x}(t)\| \leqslant aK\|R\| + \frac{a\delta}{\alpha}\int_{t_0}^{t} e^{-r(t-s)}(b\|x(s-\Delta(s))\| + c\|\dot{x}(s-\Delta(s))\|)ds$$

$$+ (b\|x(t-\Delta(t))\| + c\|\dot{x}(t-\Delta(t))\|), \quad t \geqslant t_0.$$

令：$P(t) = b\|x(t)\| + c\|\dot{x}(t)\|$，$t \geqslant t_0 - \Delta$，则有：

$$P(t) \leqslant (b+ac+c)(k+1)\|R\| + \frac{\delta(b+ac)}{\alpha}\int_{t_0}^{t} e^{-r(t-s)}P(s-\Delta(s))ds$$

$$+ cP(t-\Delta(t)), \quad t \geqslant t_0.$$

以下的证明类似定理 1，此不赘述。

条件 IV：存在 $V(t, x)$ 满足下列不等式：

(i) $(\alpha\|x\|)^2 \leqslant V(t, x) \leqslant (\beta\|x\|)^2$，$\alpha > 0$，$\beta > 0$；

(ii) $\left|\frac{\partial V(t, x)}{\partial x}\right| \leqslant 2\delta\sqrt{V(t, x)}$，　$\delta > 0$；

(iii) $\frac{\partial V(t\ \ x)}{\partial x} F[t, x(t), x(t), 0] + \frac{\partial V(t, x)}{\partial t} \leqslant -2rV$.　$r > 0$.

条件 V：$\frac{\delta ac}{\alpha r} + \Delta b + c < 1$.

定理 4. 若条件 I、IV、V 成立，则系统 (7) 的零解是在 C_1 空间中大范围指数稳定。

参　考　文　献

[1] 钱学森、宋健，工程控制论，科学出版社，1980.
[2] 秦元勋、刘永清、王联，带有时滞的动力系统的运动稳定性，科学出版社，1963.
[3] Hale, J.K., Theory of Functional Differential Equations, Springer-Verlag, New York, 1977.
[4] Эльстольц Л.Э., Вестн. Моск. уН-Та., **5**(1959), 65—71.
[5] 斯力更，数学学报，**17** (1974), 3, 197—204.
[6] 李森林，科学通报，**23** (1978), No. 2,88—93.
[7] Liao Xiaoxin, *SCIENTIA SINCA*, **A** (1986), No.3, 225—240.
[8] 斯力更，章毅，科学通报，**31** (1986),No.20,1527—1530.
[9] 章毅，科学通报，**31** (1986), No.5.

THE STABILITY IN C_1 SPACE FOR NEUTRAL DELAY SYSTEMS

Zhang Yi　　Zhong Shouming

(University of Electronic Science and Technology of China)

Abstract

In this paper, the stability in C_1 space for neutral delay systems is studied. Some new sufficient conditions for stability in C_1 space are obtained.

Key words ——Neutral type; Delay; Space; Stabitity.