第 15 卷 第 4 期 1989 年 7 月
自动化学报
ACTA AUTOMATICA SINICA
Vol. 15, No. 4 July, 1989

多变量时滞系统的结构辨识

张志湧
（福州大学）

摘　　要

本文利用投影技术提出一种辨识结构的新方法．它能在多变量系统模型参数被估计之前，直接从输入输出数据中确定该模型的时滞因子集．可观指数集及最小估计参数集．

关键词——结构辨识，多变量系统，时滞系统，建模，参数估计．

一、问题的表述

许多多变量时滞系统可用标准向量差分方程描述为

$$\boldsymbol{y}(t)=A(q^{-1})\boldsymbol{y}(t)+B(q^{-1})\boldsymbol{u}(t)=\sum_{k=1}^{\nu_m}A^{(k)}\boldsymbol{y}(t-k)+\sum_{k=\mu}^{\nu_m}B^{(k)}\boldsymbol{u}(\cdot),\tag{1}$$

式中 $\boldsymbol{y}(\cdot)\in R^m$，$\boldsymbol{u}(\cdot)\in R^r$．约定时滞因子满足 $\mathrm{Min}\{\tau_j: j=1,\cdots,r\}=0$ 时，$\mu\triangleq 0$，否则 $\mu=1$．同时不失一般记可观指数 $\nu_1\leqslant\nu_2\leqslant\cdots\leqslant\nu_m$．当 $\nu_0\triangleq 0$；$\nu_{i-1}<k\leqslant\nu_i$；$i=1,\cdots,m$ 时，$A^{(k)}$ 的上 $(k-1)$ 行全是零元素平凡行．对于 $\{A^{(k)}: k=1,\cdots,\nu_m\}$，在第 i 行位置上所含的非平凡行数目等于第 i 子系统的可观指数 ν_i[1]．$B^{(k)}$ 的情况大致与 $A^{(k)}$ 相似．式(1)的第 i 分量差分方程为

$$y_i(t)=A_i(q^{-1})\boldsymbol{y}(t)+B_i(q^{-1})\boldsymbol{u}(t),\tag{2}$$

式中

$$A_i(q^{-1})=\left[\left(\sum_{k=\nu_1-1}^{0}a_{i1k}q^{k-\nu_i}\right)\cdots\left(\sum_{k=\nu_{i-1}-1}^{0}a_{i(i-1)k}q^{k-\nu_i}\right)\right.$$
$$\left.\times\left(\sum_{k=\nu_i-1}^{0}a_{iik}q^{k-\nu_i}\right)\cdots\left(\sum_{k=\nu_i-1}^{0}a_{imk}q^{k-\nu_i}\right)\right],\tag{3}$$

$$B_i(q^{-1})=\left[\left(\sum_{k=\nu_i-\mu_1}^{0}b_{i1k}q^{k-\nu_i-\tau_1+\mu_1}\right)\cdots\left(\sum_{k=\nu_i-\mu_r}^{0}b_{irk}q^{k-\nu_i-\tau_r+\mu_r}\right)\right].\tag{4}$$

时滞因子 $\tau_j\geqslant 0$；$j=1,\cdots,r$．且若 $\tau_j=0$，取 $\mu_j=0$；否则 $\mu_j=1$．式(3)的前 $(i-1)$ 个 Σ 的下限分别是 $(\nu_1-1),\cdots,(\nu_{i-1}-1)$，而其余 Σ 的下限均是 (ν_i-1)．$A_i(q^{-1})$，$B_i(q^{-1})$ 中的非平凡参数构成最大独立参数组．结构确定前，$\nu_1,\cdots,\nu_m$ 相对

本文于 1987 年 1 月 23 日收到．

大小未知，为了辨识应把 $A_i(q^{-1})$ 的前 $(i-1)$ 个 Σ 的下限扩充为 (ν_i-1)，即

$$A_i(q^{-1})=\left[\left(\sum_{k=\nu_i-1}^{0}a_{i1k}q^{k-\nu_i}\right)\cdots\left(\sum_{k=\nu_i-1}^{0}a_{imk}q^{k-\nu_i}\right)\right]. \tag{5}$$

这种修改可能使非独立参数产生过参数化，从而使应用递推参数估计穷试法或不可靠或不可能[2]。

考虑输出噪声时，记 $\boldsymbol{z}(t)=\boldsymbol{y}(t)+\boldsymbol{v}(t)$，代入式(1)得

$$\boldsymbol{z}(t)=A(q^{-1})\boldsymbol{z}(t)+B(q^{-1})\boldsymbol{u}(t)+\boldsymbol{w}(t),\quad \boldsymbol{w}(t)=[I-A(q^{-1})]\boldsymbol{v}(t).$$

由式(2)，(4)，(5)，使用观测数据可写出

$$\boldsymbol{z}_i(t)=\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=\nu_i-1}^{0}a_{ijk}\boldsymbol{z}_j(t+k-\nu_i)+\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=\nu_i-\mu_j}^{0}b_{ijk}\boldsymbol{u}_j(t+k-\nu_i-\tau_j+\mu_j)+\boldsymbol{w}_i(t), \tag{6}$$

式中 $\boldsymbol{z}_j(\cdot)$，$\boldsymbol{u}_j(\cdot)$，$\boldsymbol{w}_i(\cdot)$ 是N维向量。本文目标是利用式(6)，不经参数估计，从观测数据中直接确定符合参数简炼原则[2]的模型结构。

二、时滞因子的确定

与以往残差穷算法[3]估计参数置信检验法[4]不同，本文由因果律出发，通过变差的分解，经 F 检验确定时滞因子。

设噪声 $\boldsymbol{v}(t)=C(q^{-1})D(q^{-1})\boldsymbol{e}(t)$，$\boldsymbol{e}(t)$ 是各分量独立的零均值高斯白噪声。输入 $\boldsymbol{u}(t)$ 是独立的零均值高斯白信号或 PRBS，且与 $\boldsymbol{v}(t)$ 独立。

向量 $\boldsymbol{z}_i(t)$（记 $\boldsymbol{z}$）向 $\boldsymbol{u}_j(t-\xi)$（记 $\boldsymbol{u}$）投影得 $\boldsymbol{z}_u=\beta\boldsymbol{u}$，$\beta=(\boldsymbol{z}^T\boldsymbol{u})/\|\boldsymbol{u}\|^2$. β 是 $\boldsymbol{z}$ 分量的线性组合，可证 $\beta\sim N(\mu_\beta,\sigma_z^2/\|\boldsymbol{u}\|^2)$，其中 σ_z^2 是 $z_i(\cdot)$ 的方差[5]。因

$$E\{\|\boldsymbol{z}_u\|^2\}=E\{\beta^2\}\|\boldsymbol{u}\|^2=[D(\beta)+E^2(\beta)]\|\boldsymbol{u}\|^2=\sigma_z^2+\mu_\beta^2\|\boldsymbol{u}\|^2,$$

所以 $\boldsymbol{z}_u$ 的余向量 $\tilde{\boldsymbol{z}}\triangleq\boldsymbol{z}-\boldsymbol{z}_u$ 有 $E\{\|\tilde{\boldsymbol{z}}\|^2\}=E\{\|\boldsymbol{z}\|^2-\beta^2\|\boldsymbol{u}\|^2\}=(N-2)\sigma_z^2$. 据以上两式知：$\|\tilde{\boldsymbol{z}}\|^2\sim\sigma_z^2\chi^2(N-2)$，以及在 $\mu_\beta=0$ 的假设下 $\|\boldsymbol{z}_u\|^2\sim\sigma_z^2\chi^2(1)$. 为表达统计量简洁引入相对投影长度 $\gamma=(\boldsymbol{z}^T\boldsymbol{u})/(\|\boldsymbol{z}\|\|\boldsymbol{u}\|)=\beta\|\boldsymbol{z}\|/\|\boldsymbol{u}\|$. 于是在假设 $H:\beta=0$ 或 $\gamma=0$ 时，统计量

$$f_{ij}=\frac{\|\boldsymbol{z}_u\|^2}{\|\tilde{\boldsymbol{z}}\|^2}\cdot(N-2)=\frac{\gamma^2}{1-\gamma^2}\cdot(N-2)\sim F(1,N-2).$$

因为式(6)表明 $E\{\boldsymbol{z}^T\boldsymbol{u}\}=0$（$\xi\leqslant\tau_j-1$ 时），所以在水平 α 下若有 $f_{ij}\leqslant F_\alpha(1,N-2)$，便接受$H$假设，即 $\boldsymbol{z}_i(t)$ 不含 $\boldsymbol{u}_j(t-\xi)$. 由此估得一组 $\{\hat{\tau}_{ij}: i=1,\cdots,m;\ j=1,\cdots,r\}$，并取 $\hat{\tau}_j=\mathrm{Min}\{\hat{\tau}_{ij}:\ i=1,\cdots,m\}$，$\hat{\mu}_j$ 随之确定. 对于时滞因子随 i,j 变化的更一般的系统，只要条件 $\tau_{ij}\leqslant\tau_{kj}+1$，$(k=1,\cdots,m)$ 满足，此法同样适用.

三、可观指数的确定

若用 H_n 记式 (6) 在可观指数试验值为 n 时所有N维向量 $\boldsymbol{z}_j(\cdot)$，$\boldsymbol{u}_j(\cdot)$ 组成的矩

阵,则 $\boldsymbol{z}_i(t)$ 向 $\boldsymbol{S}_n = \mathrm{Span}\{H_n\}$ 投影后得残差 $\boldsymbol{r}_n = M_n\boldsymbol{z}_i(t)$, $M_n = (I - H_nH_n^+)$.

在 $n \leqslant \nu_i$ 时，可分解 $\boldsymbol{S}_\nu = \boldsymbol{S}_n \oplus \bar{\boldsymbol{S}}_n$，并相应有 $M_n = M_\nu + P_n$，P_n 是 $\bar{\boldsymbol{S}}_n$ 投影算子. 利用正交幂等性得

$$\|\boldsymbol{r}_n\|^2 = \|\boldsymbol{r}_\nu\|^2 + \|P_n\boldsymbol{z}_i(t)\|^2. \tag{7}$$

在 $n \geqslant \nu_i$ 时,由于 $[\boldsymbol{z}_i(t) - \boldsymbol{w}_i(t)]$ 在 $\boldsymbol{S}_n$ 中,故 $\boldsymbol{r}_n = M_n\boldsymbol{w}_i(t)$. 若被识系统渐近稳定,虑及 $\boldsymbol{w}(t)$,$\boldsymbol{v}(t)$ 形式,可写

$$\boldsymbol{w}_i(t) = \sum_{k=1}^{n_r} q_{ik}\boldsymbol{w}_i(t-k) + \tilde{\boldsymbol{e}}_i(t),$$

$\tilde{\boldsymbol{e}}_i(t)$ 是白色的. M_n 作用于上式后得

$$\|\boldsymbol{r}_n\|^2 = \|\boldsymbol{d}_n\|^2 + \|\tilde{\boldsymbol{e}}_i(t)\|^2. \tag{8}$$

式中

$$\boldsymbol{d}_n \triangleq \sum_{k=1}^{n_r} q_{ik}M_n\boldsymbol{w}_i(t-k).$$

式(7)表明,仅当 $n = \nu_i$ 时式右边第二项为零，故一般当 $n < \nu_i$ 时 $\|\boldsymbol{r}_n\|^2 \gg \|\boldsymbol{r}_\nu\|^2$. 这正是以往残差法的理论依据. 而式(8)又表明,在 $n \geqslant \nu_i$ 时，由于 $\boldsymbol{w}_i(t)$ 与 H_n 中向量的相关性,使 $\|\boldsymbol{d}_n\|$ 随 n 的增加逐渐减小，即 $\|\boldsymbol{r}_n\|$ 渐渐减到 $\|\tilde{\boldsymbol{e}}_i(t)\|$. 这种结构膨胀时的自滤作用或使残差法确定的结构过大，或使结构无法确定. 引入 span $\{\boldsymbol{r}_n(t-k): k = 1,\cdots,n_r\}$ 的补投影算子 M_r,在它滤波作用下 $\boldsymbol{r}_n(t)$ 白化,得 $\hat{\boldsymbol{e}}_i(t) = M_r\boldsymbol{r}_n(t)$. 由此绘得的曲线

$$\hat{\sigma}_i(n) = \|\tilde{\boldsymbol{e}}_i(t)\|/\sqrt{N},$$

从 $n = \hat{\nu}_i$ 起转折为一条平行 n 轴的直线，并在一定条件下 $\hat{\sigma}_i(\hat{\nu})$ 给出 $e_i(t)$ 的标准差估计值[6].

四、最小估计参数集的确定

在可观指数确定后，可认定 $\hat{\nu}_1 \leqslant \hat{\nu}_2 \leqslant \cdots \leqslant \hat{\nu}_m$ 而不失一般. 设第 i 子系统的 L 个非平凡参数组成 θ_L 集. 对于每个具体给定的被识系统，θ_L 中可能存在零值参数. 零值参数的全体记 $\bar{\theta}_l$,而它的补集 θ_l 即是待定的最小估计参数集.

记式(6)中那些与 θ_L, θ_l 参数相应的向量 $\boldsymbol{z}_i(\cdot)$,$\boldsymbol{u}_i(\cdot)$为$\{\boldsymbol{h}_1,\cdots,\boldsymbol{h}_L\}$, $\{\boldsymbol{h}_{p_1},\cdots,\boldsymbol{h}_{pl}\}$, 并构成 $\boldsymbol{S}_L = \mathrm{Span}\{\boldsymbol{h}_1,\cdots,\boldsymbol{h}_L\}$, $\boldsymbol{S}_l = \mathrm{Span}\{\boldsymbol{h}_{p_1},\cdots,\boldsymbol{h}_{pl}\}$ 以及满足 $\boldsymbol{S}_L = \boldsymbol{S}_l \oplus \bar{\boldsymbol{S}}_l$ 的 $\bar{\boldsymbol{S}}_l$. 又记 $\boldsymbol{S}_L$,$\boldsymbol{S}_l$ 的N维补空间投影算子为 M_L, M_l, 以及 $\bar{\boldsymbol{S}}_l$ 的投影算子为 P_l. 于是 $\boldsymbol{z}_i(t)$ 向 $\boldsymbol{S}_l$ 投影后的残差向量 $M_l\boldsymbol{z}_i(t)$ 可分解为两个正交向量 $P_l\boldsymbol{z}_i(t)$ 及 $M_L\boldsymbol{z}_i(t)$, 且由正交幂等性知

$$\|M_l\boldsymbol{z}_i(t)\|^2 = \|P_l\boldsymbol{z}_i(t)\|^2 + \|M_L\boldsymbol{z}_i(t)\|^2.$$

由于 θ_L 是最大可能独立参数集，因此有残差平方和 $\|M_L\boldsymbol{z}_i(t)\|^2 \sim \sigma^2\chi(N-L)$[7]. 若 $\bar{\theta}_l$ 非空，即 $\bar{\theta}_l$ 中的参数确实为零,那末又有 $\|M_l\boldsymbol{z}_i(t)\|^2 \sim \sigma^2\chi(N-l)$. 据 Cochran 定理知，$\|P_l\boldsymbol{z}_i(t)\|^2 \sim \sigma^2\chi(L-l)$. 于是在假设 H_0:$\bar{\theta}_l$ 非空时

$$f_i = \frac{\|P_l \boldsymbol{z}_i(t)\|^2}{\|M_L \boldsymbol{z}_i(t)\|^2} \cdot \frac{(N-L)}{(L-l)} \sim F(L-l, N-L).$$

当 $f_i \leqslant F_\alpha(L-l,\ N-L)$ 时，接受 H_0 假设。

为消除向量 $\boldsymbol{h}_1, \cdots, \boldsymbol{h}_L$ 间相关性对计算的不利影响及便于投影计算，采用 Schmidt 法递推正交分解 $\boldsymbol{S}_L$，并按向量对残差平方和下降贡献最大原则逐根从 $\{\boldsymbol{h}_1, \cdots, \boldsymbol{h}_L\}$ 中挑选，然后经 F 检验，得 $\{\boldsymbol{h}_{p_1}, \cdots, \boldsymbol{h}_{pl}\}$，于是最小估计参数 θ_l 相应地得到确定。

五、数 值 算 例

算例是由文献[1]引入时滞因子 $\tau_1 = 1$，$\tau_2 = 4$，$\tau_3 = 0$ 后构成的三输入三输出时滞系统

$$\boldsymbol{y}(t) = \sum_{k=1}^{\nu_3} A^{(k)} \boldsymbol{y}(t-k) + \sum_{k=0}^{\nu_3} B^{(k)} \begin{bmatrix} u_1(t-k-\tau_1+\mu_1) \\ u_2(t-k-\tau_2+\mu_2) \\ u_3(t-k-\tau_3+\mu_3) \end{bmatrix},$$

其可观指数 $\nu_1 = 1, \nu_2 = 2, \nu_3 = 3$. 系数矩阵取值列在表 1 的模 I 栏. 输入信号用 PRBS，长 255，幅值 1. 外加噪声 $\boldsymbol{v}(t)$ 生成时取

$C(q^{-1}) = \mathrm{diag}\ \{(1-0.5q^{-1})(1-0.4q^{-1}+0.2q^{-2})(1-0.5q^{-1}+0.24q^{-2}-0.02q^{-3})\}$,

$D(q^{-1}) = \mathrm{diag}\ \{(1+0.35q^{-1})(1-0.2q^{-1}+0.37q^{-2})(1-q^{-1}+0.57q^{-2}-0.082q^{-3})\}$.

$\boldsymbol{e}(t)$ 是与输入独立的零均值高斯白噪声，各分量标准差 $\sigma_1 = 0.25, \sigma_2 = 0.35, \sigma_3 = 0.15$. 检验水平 $\alpha = 0.05$. 辨识结果分别见图 1，表 1.

表 1　算例与辨识结果结构比较

	$A^{(1)}$	$A^{(2)}$	$A^{(3)}$	$B^{(0)}$	$B^{(1)}$	$B^{(2)}$	$B^{(3)}$
模 I	$\begin{matrix} 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & -1.1 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0.5 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.28 & 0 \\ 0.1 & -0.5 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.4 & -0.4 \\ 0.5 & -1 & -0.25 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0 \end{matrix}$
模 II	$\begin{matrix} 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & -1.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.28 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.4 & -0.4 \\ 0 & -1 & -0.25 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0 \end{matrix}$
模 III	$\begin{matrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ * & * & * \\ 0 & * & * \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ * & * & * \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * \end{matrix}$	$\begin{matrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 0 & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * \\ * & * & * \end{matrix}$
模 IV	$\begin{matrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & * & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \circledast & * \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * \end{matrix}$	$\begin{matrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & * & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 \end{matrix}$

在确定可观指数时，白化滤波器取阶数 $n_r = 1$. 图 1 中虚线由残差法所得. 而实线是由本文方法所得，它清晰地指示了 $\hat{\nu}_1 = 1$，$\hat{\nu}_2 = 2$，$\hat{\nu}_3 = 3$，同时给出 $\hat{\sigma}_1 = 0.2672$，$\hat{\sigma}_2 = 0.3716$，$\hat{\sigma}_3 = 0.1952$.

表中模 II 是算例经变换所得的等价标准向量差分方程. 时滞因子估计值 $\hat{\tau}_1 = 1$，

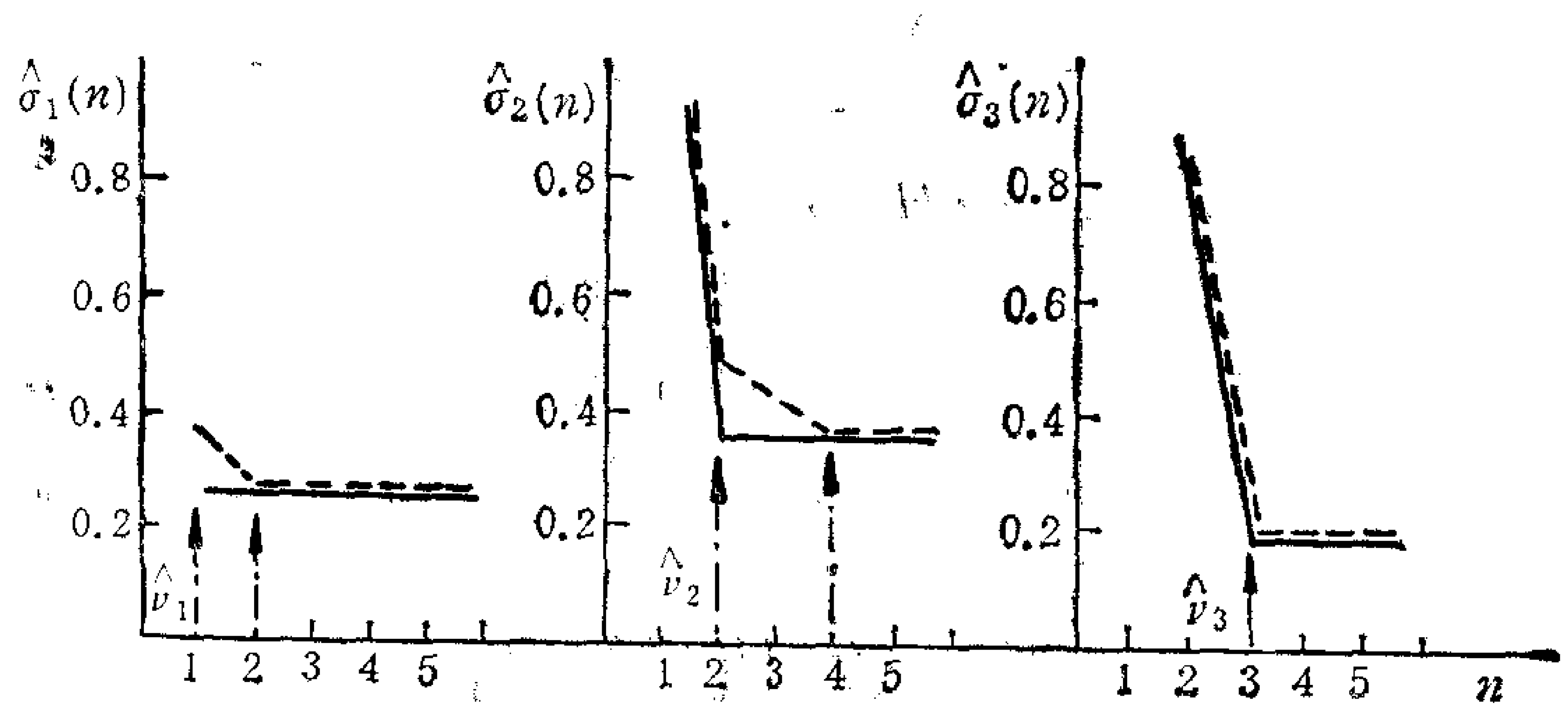

图 1 可观指数的确定

$\hat{\tau}_2=4$，$\hat{\tau}_3=0$ 与原例一致．模 III 是在可观指数确定后所得．它的 θ_L 集有 35 个待估参数，而在模 IV 最小估计参数集 θ_l 中仅有 17 个待估参数．比较模 II，IV，可以看出两者结构(包括时滞，可观指数及参数位置)很好吻合．模 IV 中"⊛"被判定为对系统贡献最小的参数．

参 考 文 献

[1] Bokor, J. and Keviczky, L., Structure Properties and Structure Estimation of Vector Difference Equations, *Int. J. Control*, 36(1982), 461—475.

[2] Ljung, L. and Soderstrom, T., Theory and Practice of Recursive Identification, MIT Press, 1983.

[3] Hsia, T. C., System Identification-Least Squares Methods, Lexington Books, Mass., 1977.

[4] 邓自立，郭一新，多变量 CARMA 模型的结构辨识，自动化学报，1(1986)，18—24.

[5] 陈希孺，数理统计引论，科学出版社，1981.

[6] 张志湧，辨识 VDE 结构的白化残差技术，控制理论与应用，3(1988)，13—19.

[7] Astrom, K. J., Lecture on the Identification Problem- The Least Squares Method, Report 6806, Lund, Sweden, 1968.

THE STRUCTURE IDENTIFICATION OF MULTIVARIABLE SYSTEMS WITH TIME-LAGS

Zhang Zhiyong

(Fuzhou University)

ABSTRACT

Based on projection technique, a new method proposed here for structure identification, makes it possible to directly determine the time-lag set, the observability indices set and the minimal set of parameters to be estimated for a multivariable system's model from input-output data prior to the estimation of parameters in the model.

Key words ——Structural identification; multivariable system; time-lag system; modelling; parameter estimation.