第 15 卷 第 4 期 1989 年 7 月
自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA
Vol. 15, No. 4 July, 1989

离散多变量动态经济控制系统

夏 绍 玮
(清 华 大 学)

摘 要

本文以多年延滞的动态投入产出模型为基础，介绍了一种线性多输入多输出经济控制系统. 应用 Yokoyama 提出的相变量规范型算法，可得出结构紧凑的离散型传递函数，从而可方便地将这种系统结构应用到多变量动态经济系统中，计算出各变量的时间序列值. 本文最后给出了几个数字例子.

关键词——动态投入产出，离散状态方程，多变量经济控制系统.

一、引 言

动态经济系统是个多输入多输出的复杂系统，由于投资的多年延滞效应，使系统的动态特性具有较高的阶次. 用离散状态空间方程来描述这样一个高阶的多部门多年延滞的经济系统，常使计算上发生一定的困难. 本文从动态投入产出的基本模型出发，引用了 Yokoyama 和 Kinnen 提出的相变量规范型方法[1,2]，使该动态经济控制模型的计算量大为紧缩，这就有可能使之用于研究经济系统的规划、控制和优化问题.

二、动态投入产出的离散控制模型

国民经济发展过程中，各部门间的动态综合平衡关系是经济系统要研究的一个重要问题，它不仅涉及多部门的生产、积累和消费的综合平衡关系，而且要考虑技术进步和资源条件随时间变化时，技术系数的变化趋势.

动态投入产出模型是一种能反映投资延滞效应的多部门综合平衡模型. Leontief 曾提出具有一年延滞的动态投入产出模型[3]，Mickle-Vogt 将供需差额[4]引入 Leontief 动态模型，并用该动态控制系统研究了社会上出现供需差额时的响应能力. 但由于该模型仅考虑了一年延滞效应，使其应用受到了限制.

近几年，我们已将具有多年延滞的动态投入产出模型应用于中长期综合经济规划中[5]. 动态投入产出模型可分为向前递推（Forward Recursive）和向回递推（Backward Recursive）两类[6,7]，因为投资系数矩阵常为奇异阵，使向前递推算法难以实现，本文仅就向回递推算法进行讨论.

本文于 1987 年 11 月 17 日收到.

具有多年延滞效应的动态投入产出模型为

$$G_k x_k = \sum_{\tau=1}^{l} H_k(\tau) x_{k+\tau} + yc_k, \tag{1}$$

$$s_k = \sum_{\tau=1}^{l} B_k(\tau)\gamma_k(\tau)\Delta x_{k+\tau}, \tag{2}$$

$$G_k = I - A_k + B_k(1)\gamma_k(1), \tag{3}$$

$$H_k(\tau) = B_k(\tau)\gamma_k(\tau) - B_k(\tau+1)\gamma_k(\tau+1). \tag{4}$$

其中，$x_k \in R^n$ 为 k 年的产出量，$yc_k \in R^n$ 为 k 年的最终净需求量，$s_k \in R^n$ 为 k 年的投资额，$A_k \in R^{nn}$ 为 k 年的投入系数阵，$B_k(\tau) \in R^{nn}$ 为 k 年投资延滞 τ 年增产的投资系数矩阵，$\gamma_k(\tau) \in R^{nn}$ 为决策系数对角阵，它反映不同建设周期投资项目所占的比重，n 为部门数，l 为最长延滞期.

本文将产出量 x_k 作为状态变量，最终净需求量 yc_k 作为控制变量，投资的大小与生产增长密切相关. 因此，可将投资变量 s_k 内生化，隐含在产出的增长额 Δx_k 中.

用动力学的状态空间法来描述以上动态投入产出方程式. 可得如下离散状态方程组. 令:

$$\begin{aligned}
u_k &= yc_k, \\
\xi_{k+l-1} &= x_{k+l}, \\
\xi_{k+l-2} &= x_{k+l-1}, \\
&\vdots \\
\xi_k &= x_{k+1}, \\
x_k &= G_k^{-1}H_k(1)x_{k+1} + G_k^{-1}H_k(2)x_{k+2} + \cdots + G_k^{-1}H_k(l)x_{k+l} + G_k^{-1}u_k, \\
y_k &= s_k.
\end{aligned} \tag{5}$$

于是可得.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}_k &= D_k \boldsymbol{x}_{k+1} + E_k u_k, \\
y_k &= F_k(\boldsymbol{x}_{k+1} - \boldsymbol{x}_k).
\end{aligned} \tag{6}$$

其中

$$\boldsymbol{x}_k = (\xi_{k+l-2}\xi_{k+l-3}\cdots\xi_k x_k)^T,$$

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = (x_{k+l}x_{k+l-1}\cdots x_{k+2}x_{k+1})^T,$$

$$D_k = \begin{pmatrix} 0 & I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I \\ G_k^{-1}H_k(l) & G_k^{-1}H_k(l-1) & \cdots & G_k^{-1}H_k(1) \end{pmatrix},$$

$$E_k = (0\ \ 0 \cdots 0\ \ G_k^{-1})^T,$$

$$F_k = [B_k(l)\gamma_k\ (l)B_k(l-1)\gamma_k(l-1)\cdots B_k(1)\gamma_k(1)].$$

(6)式表示 k 年的产出量是根据 k 年的最终需求和后几年产值的增长来确定的，即由 $\boldsymbol{x}_{k+1}$ 和 u_k 向回递推算出 $\boldsymbol{x}_k$，而一般工程控制系统是由 $\boldsymbol{x}_k$ 和 u_k 递推出 $\boldsymbol{x}_{k+1}$ 的.

三、动态投入产出离散状态方程的 z 变换及传递函数

对(6)式进行 z 变换后，可得.

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{x}}(z) &= D_k z[\tilde{\boldsymbol{x}}(z) - \boldsymbol{x}_0] + E_k\tilde{u}(z),\\ \tilde{y}(z) &= F_k(z-1)\tilde{\boldsymbol{x}}(z) - F_k z\boldsymbol{x}_0.\end{aligned} \tag{7}$$

这里 $\boldsymbol{x}_0 = 0$，故有

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{x}}(z) &= (I - D_k z)^{-1}E_k\tilde{u}(z) = V_k(z)\tilde{u}(z),\\ \tilde{y}(z) &= F_k(z-1)(I - D_k z)^{-1}E_k\tilde{u}(z) = W_k(z)\tilde{u}(z).\end{aligned} \tag{8}$$

(8)式中，$V_k(z)$ 和 $W_k(z)$ 为两项传递函数，在定常系统中，其下标 k 可略去. 即使对于定常系统，$V(z)$ 和 $W(z)$ 的运算也是较复杂的. 因为阶次愈高，$(I-Dz)^{-1}$ 的运算愈是困难. 例如，系统的部门数 n 为 20，最长延滞期 l 为 5，则有 $D \in R^{100100}$. 对于这样一个带 z 变量的高维矩阵求逆，往往使人望而怯步.

应用相变量规范型传递函数，可直接利用低维的子矩阵表示，从而可得到较为简单紧凑的函数式.

传递函数 $V(z)$ 和 $W(z)$ 的相变量规范型可写成下式:

$$V(z) = [\phi_1(z)\phi_2(z)\cdots\phi_{l-1}(z)\phi_l(z)]^T. \tag{9}$$

其中

$$\phi_i(z) = z^{l-i}\phi_l(z),\quad (i = 1,2,\cdots,l-1). \tag{10}$$

$$\begin{aligned}\phi_l(z) = [I &- G^{-1}H(1)z - G^{-1}H(2)z^2 - \cdots - G^{-1}H(l-1)z^{l-1}\\ &- G^{-1}H(l)z^l]^{-1}G.\end{aligned} \tag{11}$$

同理可得

$$W(z) = F(z-1)V(z) = [\phi_1(z)\phi_2(z)\cdots\phi_{l-1}(z)\phi_l(z)]. \tag{12}$$

于是，问题转化为先求 $\phi_l(z)$，再导出 $V(z)$ 和 $W(z)$，使复杂经济控制系统的求解得以简化.

四、应 用 实 例

例 1. 有一由工业、农业和商业三个部门构成的经济系统，投资生效的延滞期均为一年，求离散的需求脉冲输入响应曲线. 已知该系统的投入系数 A 和投资系数 B 矩阵分别为

$$A = \begin{pmatrix} .328 & .171 & .175\\ .075 & .171 & .039\\ .037 & .123 & .018\end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} .510 & .018 & .102\\ .157 & .008 & .053\\ .079 & .003 & .021\end{pmatrix}.$$

由(9)，(11)式和(8)式，有

$$V(z) = \phi_1(z) = (I - Dz)^{-1}G.$$

可以算出

$$|I - Dz| = 1 - .486z + .00467z^2 - .000006z^3.$$

如果在规划期末各部门的最终需求均有单位增长，则有

$$\tilde{u}(z) = (1\ 1\ 1)^T.$$

$$x(z) = V(z)\tilde{u}(z) = \begin{pmatrix} 1.051 + .598z + .285z^2 + .136z^3 + \cdots \\ 1.073 + .491z + .226z^2 + .107z^3 + \cdots \\ 1.081 + .108z + .049z^2 + .024z^3 + \cdots \end{pmatrix}.$$

经反变换可得 x_k 曲线,与 Leontief 所得结果形式上基本一致[3],波及年限可回溯到 6 年以上.

例 2. 如将经济系统集结为工业和农业两个部门,最长延滞期 l 为两年,求其响应曲线. 已知其系数矩阵分别为

$$A = \begin{pmatrix} .328 & .171 \\ .075 & .171 \end{pmatrix},\ \gamma(1) = \begin{pmatrix} .2 & 0 \\ 0 & .6 \end{pmatrix},\ \gamma(2) = \begin{pmatrix} .8 & 0 \\ 0 & .4 \end{pmatrix},$$

$$B(1) = \begin{pmatrix} .510 & .018 \\ .157 & .008 \end{pmatrix},\ B(2) = \begin{pmatrix} .620 & .027 \\ .173 & .009 \end{pmatrix}.$$

可以得出

$$|I - Dz| = 1 + .51z - .65z^2 - .0017z^3 + .0033z^4.$$

如果输入函数为 $\tilde{u}(z) = (10)^T$, 则有

$$\tilde{x}(z) = \begin{pmatrix} 1.29 - .67z + 1.19z^2 - .17z^3 + .68z^4 - \cdots \\ .068 + .019z - .0098z^2 + .0071z^3 - .0025z^4 + \cdots \end{pmatrix}.$$

可以看出,所得 x_k 响应曲线是逆向衰减振荡的,其振荡周期 $T = 2$.

不同延滞期的经济控制系统, 由响应曲线可揭示其变量间的内在联系和部门间的综合动态平衡关系. 同理,利用传递函数 $W(z)$ 可求出投资的时间响应曲线,有利于分析投资的合理分配. 如果系数是时变的,响应曲线的计算也将更复杂,这个问题另行讨论.

参 考 文 献

[1] Yokoyama, R., and Kinnen, E., Phase-Variable Canonical Forms for Linear, Multi-Input, Multi-Output Systems, *Int. J. Control*, **17**(1973), 1297—1312.

[2] Yokoyama, R., Transfer Function Matrix of Linear, Multi-Input and Multi-Output System, *Int. J. Control*, **18**, (1973), 369—375.

[3] Leontief, W., Essays in Economics, Vol. II, White Plains Press, (1977), 50—77.

[4] Vogt, W. G. and Mickle, M. H., A Dynamic Leontief Model for A Productive System, Proc. IEEE, **63**(1975), 438—443.

[5] 夏绍玮、赵纯均,经济综合规划中的动态投入产出分析,《系统理论中的科学方法与哲学问题》,清华大学出版社,(1984)258—285.

[6] 夏绍玮、赵纯均,动态投入产出的投资模型,清华大学学报 **24**,(1984), 103—113.

[7] Xia, S. W. and Zhao, C. J., Dynamic Input-Output Economical Models with Multiple-Year Lags, Proc. of the 4th IFAC/IFORS Symposium, Zurich, (1986).

DISCRETE MULTIVARIABLE DYNAMIC ECONOMIC CONTROL SYSTEM

XIA SHAOWEI
(*Tsinghua University*)

ABSTRACT

In this paper, based on the dynamic input-output model with multiple-year lags, a linear, multi-input, multi-output economic control system is introduced. Using the phase-variable canonical form suggested by Yokoyama, the discrete transfer function with a compact rational structure is obtained. It is shown that this structure may be used to calculate the time sequential value of the multivariable economic system conveniently. Finally, some numerical examples are given.

Key words ——Dynamic input-output; discrete state equation; multivarable economic control system.