

非线性系统的变结构控制

高为炳

(北京航空航天大学)

摘要

本文研究了一般非线性系统的变结构控制。将系统变换为正则型，并引入趋近律这一新概念，保证动态过程品质，减弱抖振。对控制作用受限情况及系统受到摄动时的鲁棒性也进行了研究。仿真支持本文结果的有效性。

关键词：非线性控制系统，变结构控制，控制受限。

一、引言

变结构控制作为控制系统的一种综合方法是50年代发展起来的，已有专著^[1-3]。人们逐渐认识到这种控制策略的一个突出优点，就是系统对摄动及干扰的鲁棒性，甚至是不变性，而且被推广应用于跟踪系统、自适应系统、不确定系统、机器人、航空航天、大系统等。对于非线性系统，文[4]研究了高阶方程的简单情况，文[5,6]给出了初步研究成果。

本文首先利用非线性状态变换，将系统化为正则型，然后建立系统的变结构控制。非线性状态变换已有很多研究，例如微分几何控制方法^[7,8]，一般解析方法^[9,10]。

研究非线性系统(1)，设它的控制 $u \in R^m$ 是线性的：

$$\dot{x} = A(x) + B(x)u, \quad (1)$$

其中 $x \in R^n$ 为状态向量。设计一个变结构控制 (VSC) 在于确定：

- 1) 切换向量函数 $s(x)$, $s = [s_1, \dots, s_m]^T \in R^m$,
- 2) 变结构控制 $u(x)$:

$$u(x) = \begin{cases} u^+(x), & \text{当 } s(x) > 0, \\ u^-(x), & \text{当 } s(x) < 0, \end{cases}$$

使得从任意初状态 $x^0 \in R^n$ 出发的轨线均走向并于有限时间内到达切换空间： $S_i = \{x | s_i(x) = 0\}$, $S_{i_1} \cap S_{i_2}, \dots$, $S_0 = \{x | s(x) = 0\}$, 并最终地进入 S_0 且渐近地趋向原点。在流形 S_i, \dots, S_0 上的运动常称之为滑动运动或滑动模态^[11]。

由于系统(1)是非线性的，问题的解是比较困难的，可以指出以下途径：(1)利用状态变换和状态反馈将(1)线性化^[7-10]，(2)利用状态变换将(1)简化成所谓的可控正则型，然后再建立 VSC，后者正是本文所采取的途径。

二、关于非线性系统可控正则型的结果

考虑一般形式的非线性系统

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x \in R^n, \quad u \in R^m. \quad (2)$$

有以下引理.

引理. 系统(2)可以经状态变换 $\tilde{x} = T(x)$ 化为可控正则型:

$$\dot{\tilde{x}} = A^0 \tilde{x} + \alpha^0(\tilde{x}) + B^0 u, \quad (3)$$

$$A^0 = \begin{bmatrix} A_1^0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_m^0 \end{bmatrix}, \quad \alpha^0(\tilde{x}) = \begin{bmatrix} \alpha_1^0(\tilde{x}) \\ \vdots \\ \alpha_m^0(\tilde{x}) \end{bmatrix}, \quad B^0 = \begin{bmatrix} B_1^0 \\ \vdots \\ B_m^0 \end{bmatrix},$$

$$A_i^0 = \begin{bmatrix} 0 & | & I_{n_i-1} \\ \hline & & \\ 0 & & \end{bmatrix}, \quad \alpha_i^0(\tilde{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \alpha_i(\tilde{x}) \end{bmatrix}, \quad B_i^0 = \begin{bmatrix} O_{n_i-1 \times m} \\ \hline e_i \end{bmatrix}.$$

其中 A_i^0 为 $n_i \times n_i$ 阵, $\alpha_i^0(\tilde{x})$ 为 $n_i \times 1$ 阵, B_i^0 为 $n_i \times m$ 阵, $\alpha_i(\tilde{x})$ 为标量函数, e_i 为 $1 \times m$ 阵, 其第 i 元为 1, 其余元为零, 必要条件是 $f(x, u)$ 对 u 是线性的, 即 $f(x, u) = A(x) + B(x)u$. 这就是取(1)为模型的原因.

先讨论单输入情况: $m = 1$.

定义 1. 对非线性函数 $T_1(x)$, 定义

$$T_{1A}^{(j)} \triangleq \nabla T_{1A}^{(j-1)}(x)^T A(x), \quad (4)$$

其中 $\nabla = \left[\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right]$, 且有:

$$T_{1A}^{(0)}(x) = T_1(x), \quad \alpha(x) = T_{1A}^{(n)}(x), \quad \alpha(0) = 0, \quad (5)$$

同时定义变换

$$\tilde{x} = T(x) = [T_1(x), \dots, T_n(x)]^T, \quad T_i(x) = T_{1A}^{(i-1)}(x). \quad (6)$$

有以下定理.

定理 1. 变换(6)可将系统

$$\dot{x} = A(x) + b(x)u, \quad u \in R^1 \quad (7)$$

化为可控正则型:

$$\dot{\tilde{x}} = A^0 \tilde{x} + b^0 u + b^0 \alpha(x), \quad (8)$$

$$A^0 = \begin{bmatrix} 0 & | & I_{n-1} \\ \hline & & \\ 0 & & \end{bmatrix}, \quad b^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

的充要条件为

$$\begin{aligned} \nabla T_{1A}^{(j)}(x)^T b(x) &= 0, \quad 0 \leq j \leq n-2, \\ 1, \quad j &= n-1. \end{aligned} \quad (9)$$

这个结果已含于文献[7,10], 但变换(6)及条件(9)中均包含一个未定函数 $T_1(x)$. 下

定理给出了 $T_1(x)$ 存在的充分必要条件的一般解析形式及构造方法。

定理 2. 系统(7)可化为可控正则形(8)的必要条件为矩阵

$$R(x) = [b(x), b_A^{(1)}(x), \dots, b_A^{(n-1)}(x)] \quad (10)$$

满秩. 又若 $R(x)^{-1}$ 的末行 $[R^{-1}(x)]_n$ 有原函数存在, 即存在某函数 $v(x)$, 使得 $\nabla v(x)^T = [R^{-1}(x)]_n$, 则条件(10)也是充分的. 式(10)中,

$$b_A^{(k)}(x) = \nabla A(x)^T b_A^{(k-1)}(x) - \nabla b_A^{(k-1)}(x)^T A(x), \quad k = 1, \dots, n-1.$$

此定理可以推广到多输入情况: $m > 1$.

定理 3. 系统(1)可以变换为可控正则型(3)的必要条件为: 存在正数 n_1, \dots, n_m , 其和 $\sum(n_i + 1) = n$, 使得

$$R(x) = [b_1(x), \dots, b_{1A}^{(n_1)}(x); \dots; b_m(x), \dots, b_{mA}^{(n_m)}(x)] \quad (11)$$

为满秩阵.

众所周知, 线性系统 (A, B) 可化为正则型的充要条件为 (A, B) 是一可控对. 对一般控制系统来说, 这常是成立的. 但对非线性系统来说, 条件(10)及(11)是比较苛的. 尽管如此, 对不少系统它们仍然成立, 如力学系统, 高阶系统, 以及三角系统等^[10].

三、单输非线性系统的变结构控制

研究已化为正则型的系统:

$$\dot{x} = A^0 x + b^0 \alpha(x) + b^0 u, \quad A^0 = \begin{bmatrix} 0 & I_{n-1} \\ 0 & \end{bmatrix}, \quad b^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (12)$$

构造切换函数:

$$s(x) = c^T x, \quad c^T = [c_1, c_2, \dots, c_{n-1}, 1], \quad (13)$$

由于现在有 $\dot{x}_i = x_{i+1} (i = 1, \dots, n-1)$, 若切换面

$$S: s(x) = c^T x = 0$$

上存在滑动模态, 其运动方程为

$$c_1 x_1 + c_2 \dot{x}_1 + \dots + c_{n-1} x^{(n-2)} + x_1^{(n-1)} = 0.$$

这是 $(n-1)$ 维线性系统, 其动态特性可通过选择 c 来确定.

现在研究到达条件并确定控制 $u(x)$. 对 $s(x)$, 求其沿系统(12)之解的导数, 有:

$$\begin{aligned} \dot{s} &= c^T \dot{x} = c^T A^0 x + c^T b^0 \alpha(x) + b^T b^0 u \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} c_i x_{i+1} + \alpha(x) + u. \end{aligned}$$

一定的到达条件确定出相应的控制函数, 分述如下.

1) 到达条件:

$$s\dot{s} < 0. \quad (14)$$

此时可求得:

$$\begin{aligned} u(x) &= u^+(x) < -u^0(x), \quad \text{当 } s(x) > 0, \\ u(x) &= u^-(x) > -u^0(x), \quad \text{当 } s(x) < 0, \end{aligned}$$

$$u^0(x) = \sum_{i=1}^{n-1} c_i x_{i+1} + \alpha(x). \tag{15}$$

形如(14)式的到达条件是最早被提出并广泛得到应用的到达条件^[1-3]。但条件(14)不能保证到达过程的品质,如快慢及偏差大小等。

2) 等速到达条件、到达律及控制为:

$$\dot{s} = -\varepsilon \operatorname{sgn}s, \quad \varepsilon > 0, \tag{16}$$

$$u(x) = -u_0(x) - \varepsilon \operatorname{sgn}(c^T x). \tag{17}$$

此趋近律(16)很简单,但有缺点: ε 小时品质不好, ε 大时易于引起强抖振。

3) 指数趋近律

$$\dot{s} = -\varepsilon \operatorname{sgn}s - ks, \quad k > 0. \tag{18}$$

这是一种又简单又具有良好品质的趋近律。适当选取 ε 与 k 的值,可以使过程品质好,趋近快而且抖振小,偏差也小。

4) 幂次趋近律

$$\dot{s} = -k|s|^\alpha \operatorname{sgn}s, \quad 0 < \alpha < 1. \tag{19}$$

可望得到与(3)类似的效果。

最后,给出一般形式的趋近律:

$$\dot{s} = -\varepsilon \operatorname{sgn}s - f(s), \tag{20}$$

其中 $f(0) = 0, sf(s) > 0$ 。(3)与(4)式均为此一一般形式的特例。相应的控制为:

$$u^*(x) = -u^0(x) - \varepsilon \operatorname{sgn}s - f(s). \tag{21}$$

控制系统的结构图如图 1(a) 所示。

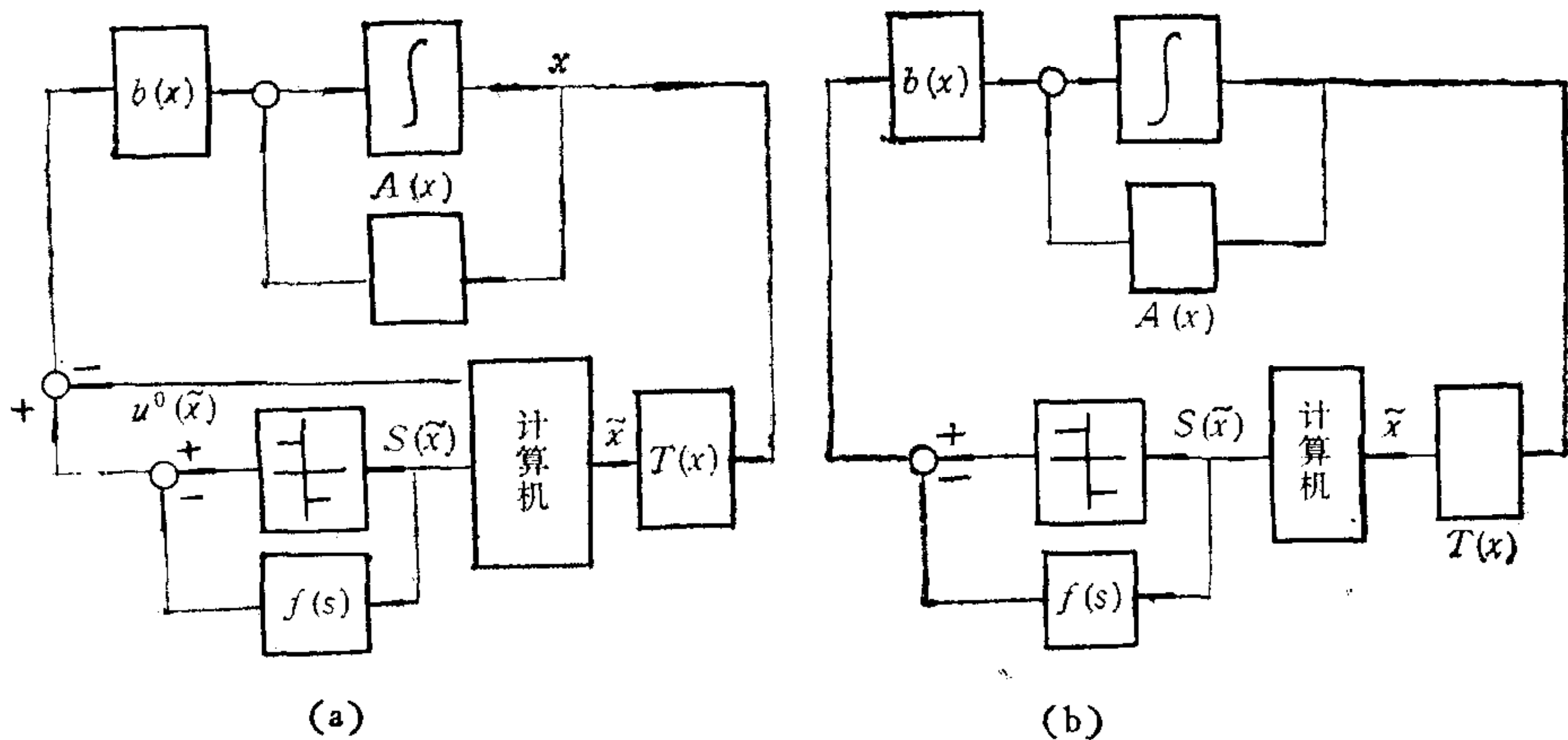


图 1

四、控制受限情况

控制受限情况,由于任意控制的执行器所具有的能源都是有限的,故产生的控制也是有限的。设 $|u| \leq k$,为了产生快速控制,设计构造简单可靠的控制器,可以采用继电器式控制器,使得

$$u = -K \operatorname{sgn}s(x). \tag{22}$$

现在来检查到达条件,由(17)式得:

$$\dot{s} = -u^0(x) - K < 0, \text{ 当 } s > 0,$$

$$\dot{s} = -u^0(x) + K > 0, \text{ 当 } s < 0.$$

考虑到 $u^0(0) = 0$, 到达条件成立于区域:

$$-K \leq u^0(x) \leq K.$$

现在可知切换面 S 上的滑动模态区 S_0 为边界 L_+ 与 L_- 所围成的单连区,图 2 上的单影区,而边界方程为:

$$L_+: u^0(x) = K, s(x) = 0;$$

$$L_-: u^0(x) = -K, s(x) = 0.$$

值得注意的是,和控制不受限时相比,控制律已有很大简化,这从(17)式及(22)式或相应的图 1 之 (a) 及 (b) 可以看出来, (b) 为控制受限情况. 但滑动模态区由 S 缩小为 S_0 , 其边界可以离线进行估算.

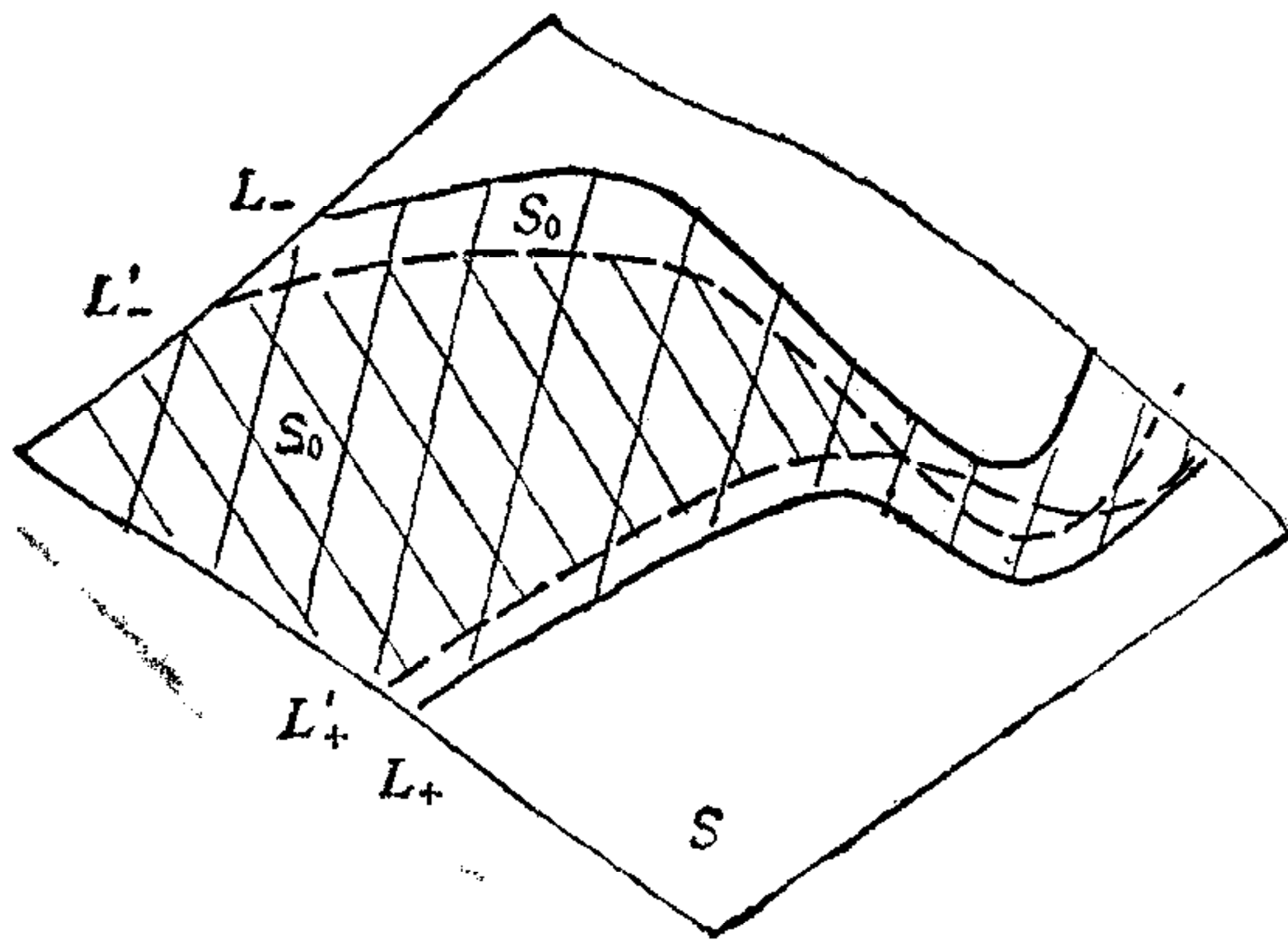


图 2

五、对扰动及干扰的自适应性

已经知道^[1-3,12,13], 变结构控制的最突出优点是在一定条件下,其滑动模态具有完全的自适应性(不变性,不敏感性). 考虑最一般的系统:

$$\dot{x} = A(x) + b(x)u + D(x)f(x, p, t). \quad (23)$$

其中 $D(x)f(x, p, t)$ 表示对系统的总扰动,它包括:

若不采用继电控制,仅考虑加在控制上的限制,则控制律应为:

$$u(x) = \begin{cases} +K, & \text{当 } u^*(x) > K, \\ u^*(x), & \text{当 } |u^*(x)| < K, \\ -K, & \text{当 } u^*(x) < -K. \end{cases}$$

现在原点的吸引区不能保证是全状态空间. 系统中的不确定参数 $p \in P \subseteq R^l$, P 为 l 维空间的含原点的开域,如 $A(x, p)$ 可表为 $A_0(x) + \Delta A(x, p)$, $\Delta A(x, p)$ 可归入此项中,时变项、不确定的未建模动力学项、外扰动项等,它可以是已知的或不确定的. 但现在假设“完全匹配条件”成立:

$$D(x)f(x, p, t) = b(x)d(x, p, t). \quad (24)$$

匹配条件是自适应系统、不确定系统、干扰不变性等情况中常见的较苛的假定条件,不再多述.

现在,线性变换 $\tilde{x} = T(x)$ 可将(23)化为

$$\dot{\tilde{x}} = A^0\tilde{x} + b^0\alpha(\tilde{x}) + b^0u + b^0d(x, p, t). \quad (25)$$

一般可以对不确定项某种估计,如

$$d'(\tilde{x}) = \text{Inf}_{p \in P, t \geq t_0} d(\tilde{x}, p, t) \leq d(\tilde{x}, p, t) \leq \text{Sup}_{p \in P, t \geq t_0} d(\tilde{x}, p, t) = d''(\tilde{x}).$$

现在控制(21)式可表为:

$$u = -u_0(\tilde{x}) - d(\tilde{x}, p, t) - \varepsilon \operatorname{sgn} s - f(s). \quad (26)$$

为了消除 $d(x, p, t)$ 的不确定性,从

$$\dot{s} = u^0(\tilde{x}) + d(\tilde{x}, p, t) + u \leq 0, \text{ 当 } s \geq 0,$$

应有:

$$\dot{s} = u^0(\tilde{x}) + d''(\tilde{x}) + u < 0, \text{ 当 } s > 0,$$

$$\dot{s} = u^0(\tilde{x}) + d'(\tilde{x}) + u > 0, \text{ 当 } s < 0.$$

或表示成:

$$\dot{s} = u^0(\tilde{x}) + d_0(x) + d_1(\tilde{x}) \operatorname{sgn} s + u,$$

$$d_0(\tilde{x}) = \frac{1}{2} (d'' + d'), \quad d_1(\tilde{x}) = \frac{1}{2} (d'' - d') \operatorname{sgn} s.$$

控制得到为

$$u = u_1(\tilde{x}) + u_2(\tilde{x}) \operatorname{sgn} s - f(s), \quad (27)$$

$$u_1(\tilde{x}) = -u^0(\tilde{x}) - d_0(\tilde{x}),$$

$$u_2(\tilde{x}) = -\varepsilon - d_1(\tilde{x}).$$

若控制受限,此时,切换面上滑动模态区为 S'_0 (图 2 上的双影区),其边界线 L'_+ 与 L'_- 分别为:

$$L'_+: u^0(\tilde{x}) + d''(\tilde{x}) = -K, \quad s(\tilde{x}) = 0, \quad (28)$$

$$L'_-: u^0(\tilde{x}) + d'(\tilde{x}) = K, \quad s(\tilde{x}) = 0.$$

六、多输入系统的变结构控制

研究多输入系统并设它已化为可控正则型(3)式. 现在系统可以视为由 m 个子系统组成的:

$$S_i: \dot{x}_i = A_i^0 \tilde{x}_i + b_i^0 u_i + b_i^0 \alpha(x), \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (29)$$

其中 (A_i^0, b_i^0) 是孤立子系统, $\alpha(x)$ 为交联项. 切换函数

$$s_i = c_i^T x_i, \quad c_i^T = [c_{i1}, \dots, c_{in_i-1}, 1],$$

视为子系统的积结函数,则滑动模态

$$s_i = c_{i1} x_{i1} + c_{i2} \dot{x}_{i1} + \dots + x_{i1}^{(n_i-1)} = 0$$

是分散解耦线性化后的子系统. 控制(21)式可表为

$$u_i = -u_i^0(x) - \varepsilon_i \operatorname{sgn} s_i - f_i(s_i), \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

亦是一种多层控制,这里是两层控制. 第一层是局部分散控制,只用到信息 x_i :

$$u_{i1} = -\varepsilon_i \operatorname{sgn} s_i - f_i(s_i), \quad s_i = c_i^T x_i,$$

第二层则是全局控制,用到全部信息 x :

$$u_{i2} = -u_i^0(x).$$

上面的过程是单输入情况的类似重复, \tilde{x}_i 为简单计,代之以 x_i . 对于有摄动,系统控制受限,都可进行与单输入情况一样的分析. 由于采用了可控正则型,使十分复杂的问题得到相当大的简化. 系统先经过一个过程,其品质由趋近律来控制,然后进入 m 个完全解耦了

的独立线性滑动模态,形成一种滑动模态分散解耦及分散线性化的结果。

七、抖动的削弱与仿真

这里提出的趋近律,除了保证趋近过程的品质,大大减化多输入情况下控制的寻求,还可以通过适当选取参数 ϵ 与 k , 达到削弱抖振的目的。研究以下三阶系统:

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad s = c^T x, \quad A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c^T = [1 \quad 2 \quad 1],$$

趋近律 $\dot{s} = -\epsilon \text{sgn } s - ks$, 得控制 $u = 2x_1 - x_2 - 3x_3 - \epsilon \text{sgn } s - ks$ 。仿真结果见图 3 至图 6。图 3 中 $\epsilon = 6, k = 15$, 抖动, u 切换也强。图 4 中 $\epsilon = 1, k = 4$, 抖动甚微, 切换强度不大, 趋近过程比其它情况长。图 5 中 $\dot{s} = -15|s|^{1/2} \text{sgn } s$, 抖动甚微。图 6 中 $\epsilon = 1, k = 4$, 外干扰 $f(t) = 0.5 \sin \omega t, f = 2$, 和无扰动情况(图 4)相比, 可见系统确具有对摄动的“完全自适应性”。仿真结果相当好地支持文中提出的趋近律综合方法。

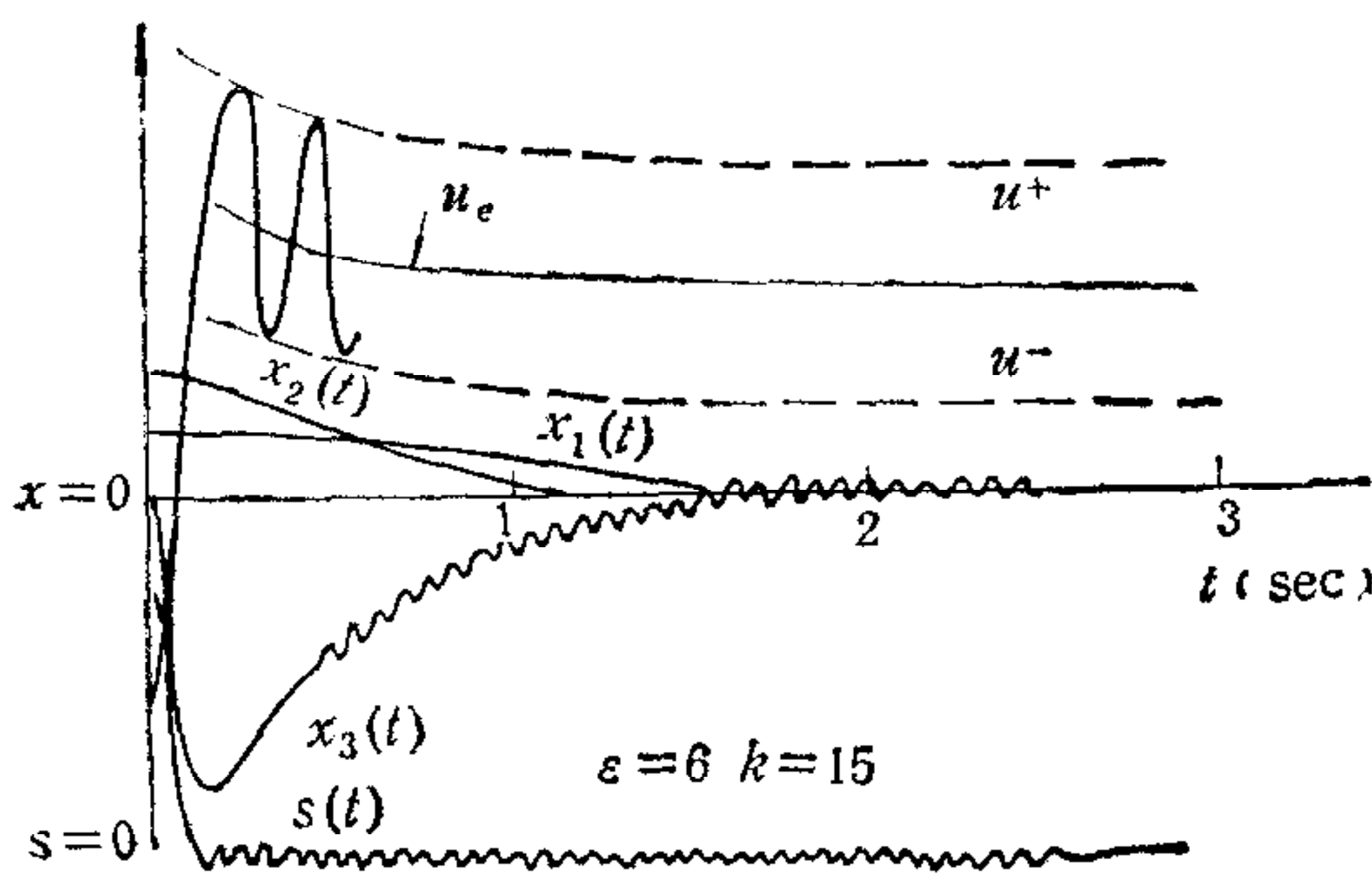


图 3

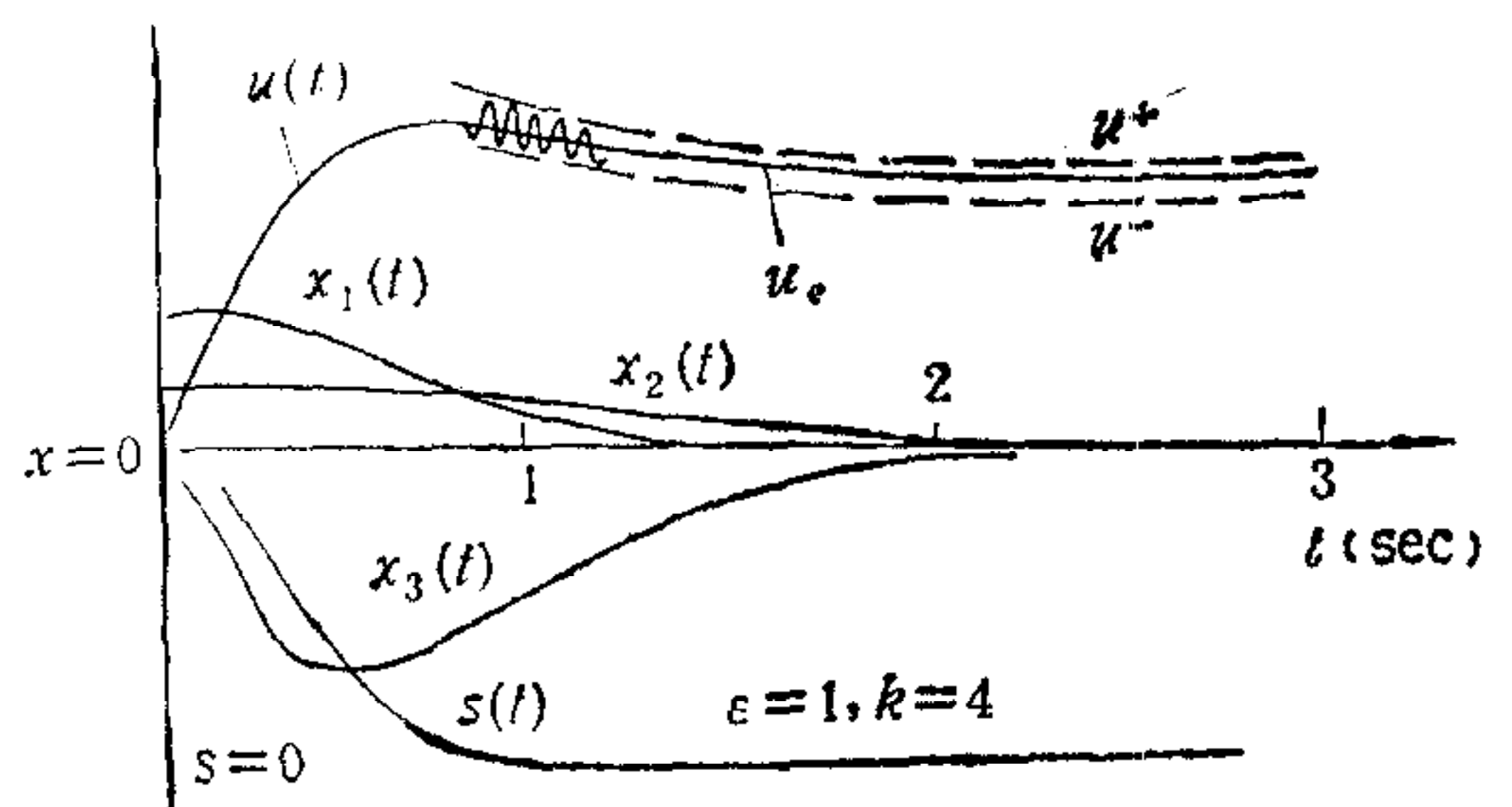


图 4

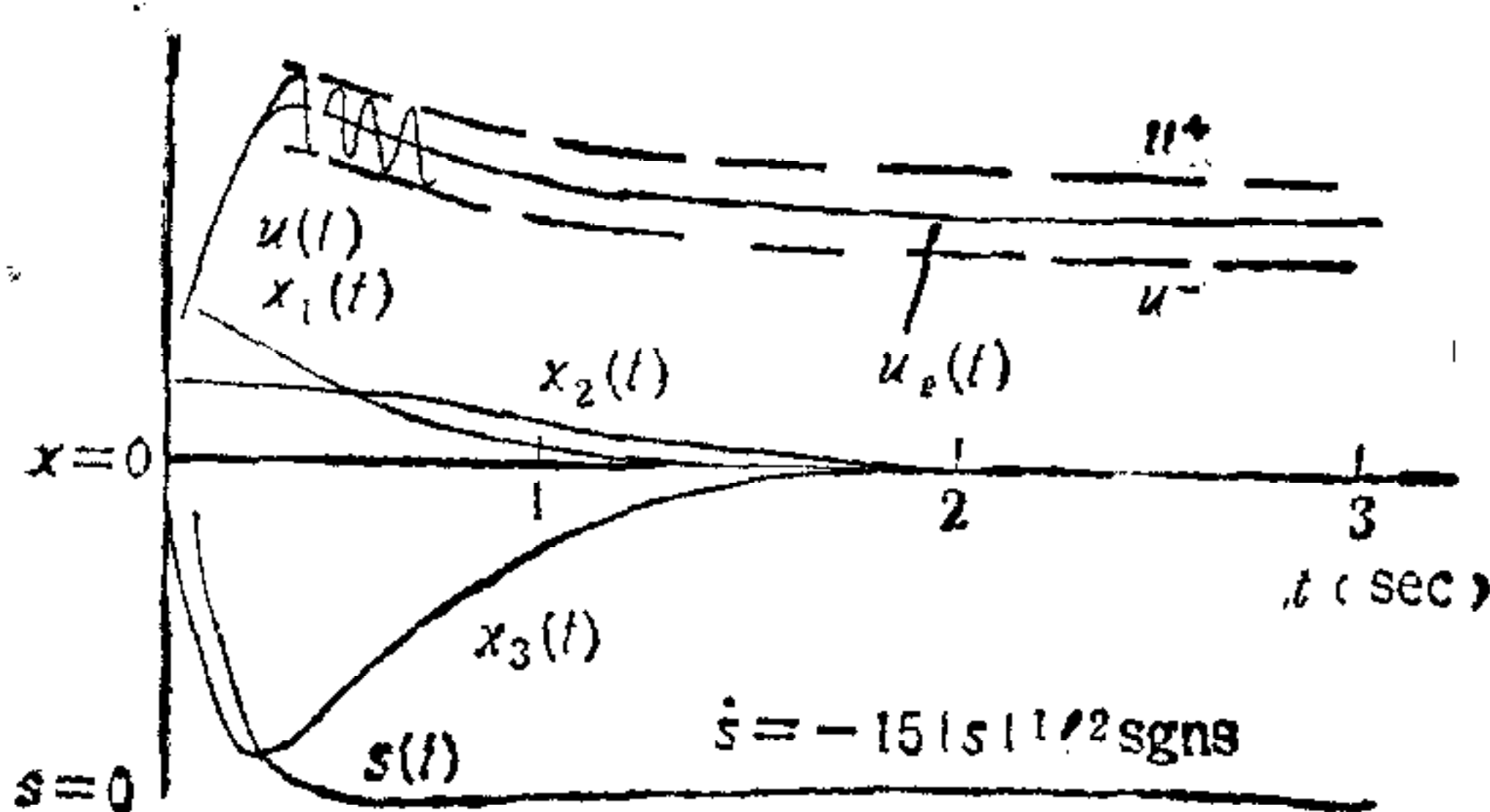


图 5

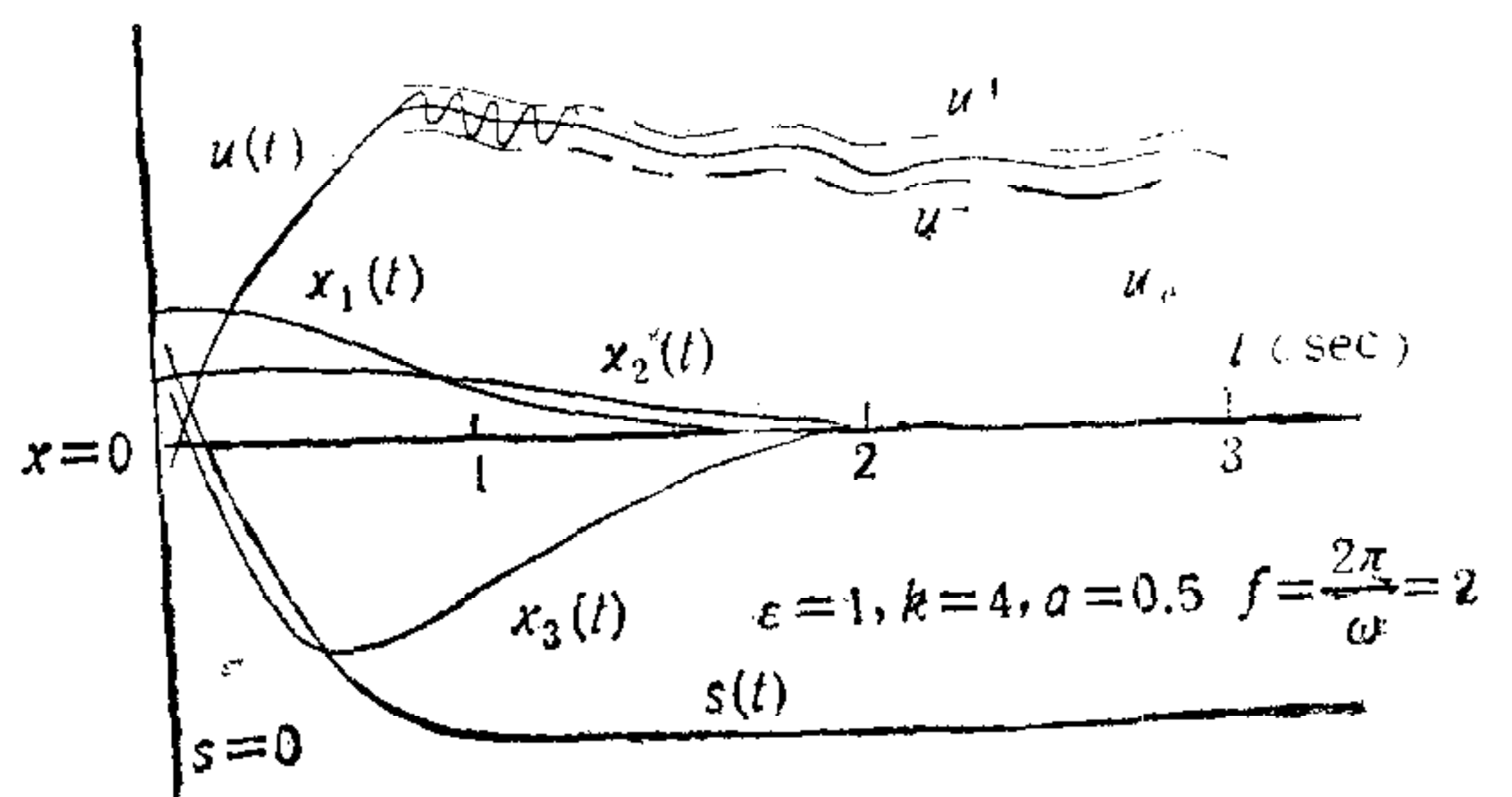


图 6

八、结 论

本文利用非线性控制系统的可控正则型,研究了用变结构方法对系统进行综合的问题。引入了新的趋近律的概念及公式,一方面保证了趋近过程的品质,也提供了求控制的

有效简便方法, 还能在提高过程运动品质的同时解决削弱抖振的途径. 文中还考虑了控制受限的情况, 给出了非全局滑动模态的新结果, 其意义在于大大减少实时计算, 简化控制反馈函数. 还考虑了系统滑动模态对摄动的完全自适应性. 最后给出了仿真结果.

参 考 文 献

- [1] Емельянов, С. В., Систем автоматического управления с переменной структурой, М. Наука (1967).
- [2] Utkin, V. I., Sliding Modes and Their Applications to Variable Structure Control, MIR Publishers, Moscow, 1978.
- [3] Itkins, U., Control Systems of Variable Structure Control, New York, Wiley, 1976.
- [4] Slotine, J. J., Sastry S. S., Tracking Control of Nonlinear Systems Using Sliding Surfaces, With Application to Robot Manipulators, *Int. J. Control*, **38**(1983), 465—492.
- [5] Bartolini, G., Zolezzi, T., Control of Nonlinear Variable Structure Systems, *J. of Mathematics Analysis & Applications*, **118**(1986), 42—62.
- [6] 高为炳, 程勉, 孙德滨, 非线性变结构系统的一些新结果, 全国第四届一般力学学术会议论文集, 1987年12月, 桂林.
- [7] Su, R., On the Linear Equivalence of Nonlinear Systems, *Systems and Control Letters*, **2** (1982).
- [8] Cheng, D., Tarn, T. J. Isidori, A., Global Linearization of Nonlinear Systems via Feedback, *IEEE Trans. Automatic Control*, **AC-30**(1985), 808—811.
- [9] Freund, E., The Structure of Decoupled Nonlinear Systems, *Int. J. Control*, **21** (1975), 443—450.
- [10] 高为炳, 吴东南, 关于非线性系统的线性化问题, 中国科学 A 辑(1987), 740—748.
- [11] Андронов, А. А., Витт. А. А., Хайкин, С. Э., Теория Колебания, Фи матги (1959); 中译本: 高为炳等: 振动理论, 科学出版社(1981).
- [12] Drazenovic, B., The Invariance Conditions in Variable Structure Systems, *Automatica*, **5** (1969), 287—295.
- [13] 程勉, 非线性变结构系统的一些性质, 航空学报, **9**(1988), A361—367.
- [14] 高为炳, 变结构控制系统的品质控制, 控制理论与应用年会, 曲阜(1988), 156—159.

VARIABLE STRUCTURE CONTROL TO NONLINEAR SYSTEMS

GAO WEIBING

(Beijing University of Aeronautics and Astronautics)

ABSTRACT

The variable structure control (VSC) to general nonlinear systems is studied in this paper. The system is first transformed into the canonical form. A new concept called the approaching law is introduced to ensure quality of the dynamical process and to alleviate the chattering. Constraints on the control activity and robustness to perturbations on the system are also considered. Simulation which supports the results is presented.

Key words —— Nonlinear control system; variable control system; constrained control.