第 15 卷 第 5 期　　自 动 化 学 报　　Vol. 15, No. 5
1989 年 9 月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　Sept., 1989

人 口 控 制

宋 健
(国家科学技术委员会)

摘 要

这是一篇有关人口控制理论的综述性文章. 人口问题是人类，特别是发展中国家面临的问题. 本文的英文稿曾收集在1987年出版的"系统与控制百科全书"中，文中扼要地叙述了有关人口控制的一些最近的研究结果. 理论的主要部分——人口指数,稳定性理论,人口增长的最优控制等,取材于作者所进行的研究.

关键词: 人口控制,人口指数,稳定性理论.

本世纪以来,世界人口一直在以前所未有的速度增长. 1830 年时，世界总人口为 10 亿,这段过程经历了几百万年漫长的发展时期. 然而从那以后，世界人口每递增 10 亿所需时间却依次缩短为 100 年,30 年,15 年和 10 年. 根据预测,到本世纪末,世界人口总数将超过 60 亿，而第 6 个 10 亿的增长时间可能只需要 5—7 年. 人口如此剧烈地高速增长,已经引起各国政府和人民的广泛关注,人口问题作为最严重、最紧迫的问题之一摆到了我们和将来几代人的面前.

早在 300 多年前,Graunt (1662)、Euler (1767) 和 Malthus (1798) 就开始了从人口进化的数量和年龄分布的角度来进行人口的数量分析. 但到 20 世纪后,Lotka(1907)、Sharpe 和 Lotka (1911) 以及 Leslie (1945) 等人才开始用决定性模型来研究人口动力学的解析理论,现代人口控制理论则问世得更晚一些. 影响人口的动态发展过程有多种因素,既有社会的,也有环境的;但归根结底,一定社会中人口的增长取决于人口的出生率、死亡率和迁移率. 人口的数量和年龄分布被定义为人口的状态,而出生率和迁移率则是生育个体和政府实施人口控制计划和政策的主要控制参数.

1. 人口方程

人口方程有多种形式的数学模型，它们都准确地描述了人口系统的动力学. 人口方程通常用于分析、预测和控制,它可以是连续的，也可以是离散的. 下面的三类方程就是人口控制中广泛使用的三类闭合型方程.

1.1 连续型人口方程

令 $F(r,t)$ 表示 t 时刻小于年龄 r 的人口数,并定义年龄分布为 $\partial F/\partial r = P(r,t)$,那么特定社会中人口变化的动态过程就可用如下封闭系统的连续方程所描述:

本文为本刊特约稿.

$$\frac{\partial P}{\partial t}+\frac{\partial P}{\partial r}+\mu(r,t)P=f(r,t),$$
$$P(r,0)=P_0(r),$$
$$P(0,t)=\phi(t)=\beta(t)\int_{r_1}^{r_2}K(r,t)h(r,t)P(r,t)dr, \tag{1}$$

式中，$\mu(r,t)$ 和 $f(r,t)$ 分别表示特定的死亡率和迁移率，$P_0(r)$ 是 $t=0$ 时的初始年龄分布，$K(r,t)$ 和 $h(r,t)$ 分别表示女性性别比和女性的生育类型，$\beta(t)$ 是总体生育率，(r_1,r_2) 是妇女的生育周期. 容易看出，$P(0,t)$ 的表达式在第一个方程中以增益 $\beta(t)$ 起着正反馈的作用，$\beta(t)$ 也被看做双线性控制变量.

1.2 离散型人口方程

与人口统计学中人口普查系统的实践相一致，连续型方程(1)可以被离散化，并转化为逐年递归的方程:

$$X_{i+1}(t+1)=(1-\mu_i(t))X_i(t)+w_i(t),\ t=0,1,\cdots,m-1,$$
$$X_0(t)=\beta(t)\sum_{j=r_1}^{r_2}K_j(t)h_j(t)X_j(t), \tag{2}$$

整个人口被划分成不同的年龄组 X_i，m 是目前达到的最高年龄，$\mu_i(t)$、$K_j(t)$ 和 $h_j(t)$ 是与年龄组相关的年度平均参数，$w_i(t)$ 表示年龄组中的个体 t 年内迁移的数目.

业已证明，如果妇女的生育类型保持不变，总体生育率 $\beta(t)$ 就具有每个妇女一生中平均生育数的意义. 很明显，方程(2)描述了带有正反馈增益 $\beta(t)$ 的闭环人口动力学系统. 尽管方程(2)可从方程(1)经过离散化而推导出来，但 Bernardelli (1941) 和 Leslie (1945)还是对它进行了独立的修正.

1.3 随机型人口方程

如果把 $F(r,t)$ 当作时间 t 的随机过程来考虑，那么介于 r_1 和 r_2 之间年龄段的人口数目就是一个随机变量，可以用斯蒂捷积分来表示:

$$\int_{r_1}^{r_2}dF(r,t).$$

如果决定性函数 $P(r,t)$、$Q(r,t)$ 和 $R(r,s,t)$ 定义如下:

$$EdF(r,t)=P(r,t)dr+O(dr),$$
$$\operatorname{var}dF(r,t)=Q(r,t)dr+O(dr),\quad r\neq s, \tag{3}$$
$$\operatorname{cov}\{dF(r,t),dF(s,t)\}=R(r,s,t)drds+O(drds),$$

年龄分布函数 $P(r,t)$ 的期望值严格满足方程(1)的同样系统，方差函数 $Q(r,t)$ 就可由下式决定:

$$\frac{\partial Q}{\partial t}+\frac{\partial Q}{\partial r}+\partial\mu(r,t)Q=\mu(r,t)P(r,t),$$
$$Q(r,0)=q_0(r),$$
$$Q(0,t)=\beta^2(t)\left(\int_{r_1}^{r_2}\int_{r_1}^{r_2}b(r,t)b(s,t)R(r,s,t)drds\right). \tag{4}$$

此处 $b(r,t)=K(r,t)h(r,t)$，$q_0(r)$ 是初始年龄分布的方差，它是根据人口普查的数据进行估计的.

协方差 $R(r, s, t)$ 由下列关系式给出：

$$\frac{\partial R}{\partial t} + \frac{\partial R}{\partial r} + \frac{\partial R}{\partial s} + (\mu(r, t) + \mu(s, t))R = 0,$$

$$R(0, s, t) = \beta(t) \int_{r_1}^{r_2} b(r) R(r, s, t) dr,$$

$$R(r, 0, t) = \beta(t) \int_{r_1}^{r_2} b(s) R(r, s, t) ds,$$

$$R(r, s, 0) = R_0(r, s) = \mathrm{cov}\{P_0(r), P_0(s)\}. \tag{5}$$

2. 人口系统的外推和稳定性

社会中人口数量和状态的变化是一个缓慢的动态过程，它的时间常数接近人的预估生命，现行人口控制政策的反应要几十年后才会体现出来．因此，人口增长的外推或预测对于人口政策的评价是极为重要的．上面列举的三类人口方程的任一种，都可用于预测人口状态的变化．下面对系统(1)的明确解答似乎有助于说明这一点：

$$\begin{aligned} P(r, t) = & \left[\phi(t - r) + \int_0^r f(x, x + t - r)\right. \\ & \left.\times \exp\left(\int_0^x \mu(\rho, \rho + t - r) d\rho\right) dx\right] \\ & \times \exp\left(-\int_0^r \mu(\rho, \rho + t - r) d\rho\right] \\ & + \left[P_0(r - t) + \int_0^t f(x + r - t, x)\right. \\ & \left.\times \exp\left(\int_0^x \mu(\rho + r - t, \rho) d\rho\right) dx\right] \\ & \times \exp\left(-\int_{r-t}^r \mu(\rho, \rho + t - r) d\rho\right). \end{aligned} \tag{6}$$

对于无迁移的封闭性人口系统以及死亡率 $\mu(r)$ 独立于 t 的情况，(6) 式可大大简化：

$$P(r, t) = \begin{cases} P_0(r - t)\exp\left(-\int_{r-t}^r \mu(\rho) d\rho, \ 0 \leqslant t \leqslant r, \right. \\ \phi(t - r)\exp\left(-\int_0^r \mu(\rho) d\rho, \ r \leqslant t. \right. \end{cases} \tag{7}$$

由方程(1)和(2)容易看到，没有迁移的任何人口系统都似乎是一个带有正增益 $\beta(t)$ 的闭环反馈系统，任何这样的系统都必然存在 Lyapunov 稳定性问题．对于一定的人口，一定存在一个临界的生育率，它决定系统是否稳定．事实上，下面的定理无论对于人口控制理论还是计划生育实践都是基本的．假定一个给定的人口系统或者 (*a*) 被连续型人口方程所描述：

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial r} + \mu(r)P = 0, \ P(r, 0) = P_0(r),$$

$$P(0, t) = \phi(t) = \beta \int_{r_1}^{r_2} K(r) h(r) P(r, t) dr, \tag{8}$$

或者(b)被与它等价的离散化方程所描述：

$$X_{i+1}(t + 1) = (1 - \mu_i) X_i(t), \ i = 0, 1, \cdots, m - 1,$$

$$X_0(t) = \beta(1-\mu_{00}) \sum_{i=r_1}^{r_2} K_i h_i X_i(t). \tag{9}$$

人口系统在 Lyapunov 意义下稳定的充要条件是实际的总体生育率不大于临界值 β_{cr}. β_{cr} 定义为

$$\beta_{cr} = \left(\int_0^x K(r)h(r)\exp\left(-\int_0^r \mu(\rho)d\rho\right)dr\right)^{-1}, (\text{对 } (a)), \tag{10}$$

和

$$\beta_{cr} = \left(\sum_{i=r_1}^{r_2} K_i h_i(1-\mu_{00})(1-\mu_0)\cdots(1-\mu_{i-1})\right)^{-1}, (\text{对 } (b)), \tag{11}$$

变量 μ_{00} 表示婴儿死亡率，$[r_1, r_2]$ 是妇女的生育周期. 只要总体生育率 β 总是保持大于 β_{cr}，人口就会无限制地增长. 公式(10)和(11)表明，临界生育水平将带来人口增长的停止.

3. 人口指数

人口系统的数量特征称为人口指数，通常都是由政府和人口统计学给出并注释. 任何人口指数都可能对人口控制政策的制订施加某些限制条件. 原始出生率、原始死亡率、自然增长率、工作年龄内的个体百分数等都是最简单的指数. 下面给出的就是静态人口系统的主要动态指数.

1）预估寿命. 年龄为 r_0 的指数个体的预估寿命可由下式计算:

$$\begin{aligned} S(r_0) &= \int_0^\infty \exp\left(-\int_0^t \mu(\rho+r_0)d\rho\right)dt \\ &= \sum_{i=r_0}^{\infty} \exp\left(-\sum_{\alpha=r_0}^{i} \mu_\alpha\right), \ r_0 \geqslant 1, \end{aligned} \tag{12}$$

式中，μ_α 是年龄组 α 的年平均死亡率. 新生婴儿的预估寿命为

$$\begin{aligned} S(0) = S_0 &= \int_0^\infty \exp\left(-\int_0^t \mu(\rho)d\rho\right)dt \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \exp\left(-\mu_{00} - \sum_{\alpha=0}^{i} \mu_\alpha\right). \end{aligned} \tag{13}$$

2）净再生率 (NRR). NRR 值用 R_0 表示，它是描述每个妇女的平均女儿数:

$$\begin{aligned} R_0 &= \beta K_0 \int_{r_1}^{r_2} h(r)\exp\left(-\int_0^r \mu_f(\rho)d\rho\right)dr \\ &= \beta K_0 \sum_{i=r_1}^{r_2} h_i \exp\left(-\sum_{\alpha=0}^{i} \mu_{\alpha f}\right), \end{aligned} \tag{14}$$

式中，K_0 是新生婴儿的女性性别比，$M_{\alpha f}$ 是年龄组 α 中妇女的平均死亡率.

3）平均代人时间. 平均代人时间 T 表示母亲生育儿女的平均年龄，已经证明 T 可表达为

$$\begin{aligned} T &= \frac{\beta K_0}{R_0} \int_0^\infty t\left(\int_{r_1}^{r_2} h(r)P_{f\delta}(r, t)dr\right)dt \\ &= \frac{\beta K_0}{R_0} \sum_{i=r_1}^{r_2} r_i h_i \exp\left(-\sum_{\alpha=0}^{i} \mu_{\alpha f}\right), \end{aligned} \tag{15}$$

式中 $P_{f\delta}(r, t)$ 是方程(8)中 $\mu(r)$ 被妇女死亡率 $\mu_f(r)$ 替代时的特定的广义解.

如上所述，所有的人口指数都可以表达为定义在适当的人口方程的解空间上的某些函数.

4. 合理的人口规模和稳态

每个社会的一个至关重要的特征是,在特定的环境下,它能够供养的人口的最大平均数量，这个数叫做环境承载力. 人类属于也完全依赖于地球的生态系统. 对任何国家来说,生态系统的承载力都是有限的. 可以确信,人类至少还要存在几亿年之久，所以任何常正的自然增长理论上都会产生无限制的人口增长. 从将来人类的生存权利和生存需要出发,把总体生育率降低到临界值之下,并产生零增长的人口的稳定状态,是绝对必要的.

令 N_d 表示封闭型人口系统的合理规模，稳定的年龄分布 P_s 则由如下条件决定:

$$\frac{dP_s}{dr} + \mu(r)P_s = 0,\ P_s(0) = \phi_s(t) = \text{const}, \tag{16}$$

这是令方程(1)中 $f(r,t) \equiv 0$ 和 $\partial P/\partial t \equiv 0$ 而得到的. 稳定的年龄结构由方程(16)的解给出:

$$P_s(r) = \phi_s \exp\left(-\int_0^r \mu(\rho)d\rho\right).$$

对上式的两边积分,并注意到(13)式对新生婴儿预估寿命的定义,便得到合理人口的年龄结构:

$$P_s(r) = \frac{N_d}{S_0}\exp\left(-\int_0^r \mu(\rho)d\rho\right), \tag{17}$$

和稳态出生率:

$$\phi_s(t) = \frac{N_d}{S_0} = \text{const}. \tag{18}$$

因此,对于稳态人口而言,年龄组 X_{is}, $i = 0, 1, \cdots, m$ 的规模可由下式计算:

$$X_{is} = \int_{i-1}^{i} P_s(r)dr \approx \frac{N_d}{S_0}\exp\left(-\sum_{\alpha=0}^{i}\mu_\alpha\right), \tag{19}$$

式中，μ_i 是年龄组 X_i 的年度死亡率.

5. 生育控制政策的优化

为了人类长久的将来,我们必须在这几个世纪内担负起遏制人口爆炸性增长的责任. 毫无疑问,人类的智慧、创造性和合作将能够解决这个巨大的问题. 在人口控制政策的制订中,控制理论和优化技术能够提供有力的科学工具. 由于卫生条件、公共健康服务和医药事业的发展,全世界的死亡律普遍降低,平均寿命普遍提高，使得可以用作控制变量的参数只有总体生育率 $\beta(t)$ 了.

假定 N_d 为一给定社会的适度人口规模，$P_d(r)$ 是相应的稳定年龄分布，如方程(17)所定义;并规定 $C(r) = P_d(r)/P_0(r)$，则对一个闭合人口系统来说，生育控制政策的优化就成为一个二次型的最优控制问题——寻找一个最优总体生育率 $\beta^*(t)$，使满足

$$J(\beta^*(t)) = \min_{\beta(t)}\int_0^{r_m}\int_0^\infty \frac{1}{2}[P(r,t) - P_d(r)]^2 dr\,dt$$

$$+\frac{\alpha}{2}\int_0^\infty[\beta(t)-\beta_d(t)]^2dt, \tag{20}$$

式中，$\beta_d(t)=1\Big/\int_0^\infty C(r)h(r)dr$，$\alpha$ 是加权因子．最优总体生育率 $\beta^*(t)$ 就是下列 Lagrange 方程的解：

$$\frac{\partial P}{\partial t}+\frac{\partial P}{\partial r}+\mu(r,t)P=0,$$

$$P(0,t)=\beta^*(t)\int_0^\infty K(r)h(r)P(r,t)dr,$$

$$P(r,0)=P_0(r),$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial t}+\frac{\partial\lambda}{\partial r}-\mu(r,t)P(r,t)=P(r,t)-P_d(r)$$

$$-\lambda(0,t)\beta^*(t)K(r)h(r),$$

$$\lambda(r\to\infty,t)=0,\ \lambda(r,t\to\infty)=0,$$

$$\beta^*(t)=\beta_d(t)+\frac{\lambda(0,t)}{2}\int_0^\infty K(r)h(r)P(r,t)dr. \tag{21}$$

对于离散人口方程，优化问题可以类似地进行．用向量 $X=(X_0,X_1,\cdots,X_m)$ 表示稳定人口分布，X_i 是指 i 年龄组的人数，用 $X_d=(X_{0d},\cdots,X_{md})$ 表示适度人口结构，问题就变成在一个给定的年限周期 $[0,T]$ 上，寻找最优总体生育率 $\beta^*(t)\in U$，以使

$$J(\beta^*(t))=\min_{\beta(t)\in U}J(\beta(t))$$

$$=\min_{\beta\in U}\frac{1}{2}\sum_{t=0}^{T}\left[\sum_{i=0}^{m-1}(X_i(t)-X_{id})^2\right] \tag{22}$$

其中 U 是 $\beta(t)$ 受到某些人口指数限制的可行集．

已经证明，最优总体生育率 $\beta^*(t)$ 应该满足如下条件：存在一个协向量函数 $\psi(t)=(\psi_0(t),\psi_1(t),\cdots,\psi_m(t))$，使 $\beta^*(t)$ 满足 Pontryagin 的最大准则：

$$\beta^*(t)(\psi(t),\beta(t-1)X^*(t-1))$$

$$=\max_{\beta(t)\in U}(\psi(t),\beta(t-1)X^*(t-1))\beta(t-1), \tag{23}$$

其中 $\psi(t)$ 为下面的矩阵方程的解：

$$\psi(t)=H^*(t)\psi(t-1),$$

$$H^*(t)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2(X^*(t)-X_d(t) & A^*(t)+\beta^*(t)B(t)\end{bmatrix}, \tag{24}$$

$A(t)$ 和 $B(t)$ 是依据人口方程(2)推导出来的传递矩阵．

世界各国有许多科学家已经研究了全世界各国人口的优化问题，得出了各种结论．英国的生态学家估计英伦三岛的承载力为 3 千万人而不是 1983 年时的 5 千 6 百万人． 荷兰科学家认为荷兰 4 万平方公里国土仅能支撑 500 万人，而 1983 年已达到 1440 万人．美国的一些人口统计学家认为他们目前的 23400 万人已经超过了美国的最优水平．中国科学家也得出了结论，尽管目前人口已达 11 亿，但中国的最优人口数量是 7 亿．为了制订中国的长期人口控制政策，已经提出了许多建议．其中之一如表 1 所示，它是在社会的和

表 1　中国的最优计划生育政策

年　　份	1982	2000	2020	2040	2060	2080	2100
$\beta^*(t)$	2.45	1.70	1.70	1.70	2.04	2.16	2.16
$N(t)^a$	1.00	1.17	1.20	1.09	0.91	0.78	0.70
$W(t)$	0.4	0.48	0.57	0.62	0.62	0.60	0.58
$P(t)$	0.9	0.54	0.50	0.69	0.70	0.70	0.70

a：单位为 10 亿

人口统计学的限制之下，根据最优控制理论和优化技术推导出来的.表中所用的注释如下：

(*a*) $\beta^*(t)$ 表示最优总体生育率，它被当作唯一的可控参数.

(*b*) $N(t)$ 为总人口.

(*c*) $W(t)$ 为年龄的指数，它表示人口的平均年龄与其预估寿命之比.

(*d*) 社会有关的指数 $P(t)$ 表示与工作的人口有关的比率.

参 考 文 献

[1] Coale, A. J., The Growth and Structure of Human Populations. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1972.

[2] Falkenburg, D. R., Optimal Control in Age-Dependent Population. Proc. JACC. 1973, 112—117.

[3] Keyfitz, N., Intruduction to the Mathematics of Population, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1968.

[4] Kwakernaak, H., Application of Control Theory to Population Policy, In: Bensoussan, A., Lions, J. L., (eds.) New Trends in System Analysis, Springer, Berlin, 1977, 359—379.

[5] Malthus, T., Principles of Population, Reeves and Turner, London, 1978.

[6] Pielou, E. C., Mathematical Ecology, Wiley, New York, 1977.

[7] Pollard, J. H., Mathematical Models for the Growth of Human Populations, Cambridge University Press, Cambridge, 1973.

[8] Song, J., Some Developments in Mathematical Demography and Their Application to PRC, *Theor. Popul. Biol.* **22**(1982), 382—391.

[9] Song, J., Yu, J. Y., On Stability Theory of Population Systems and Critical Fetility Rates, *Math. Modell.* **2**(1981), 109—121.

[10] Song, J., Yu, J. Y., Population System Control, Springer, Berlin, 1986.

THE PROBLEM OF POPULATION CONTROL

J. Song

(*The State Science And Technology Commission*)

Abstract

This is a survey paper on the problems of population control theory, the most important one confronting mankind and, particularly, the developing countries. Its English version was included in SYSTEM & CONTROL ENCYCLOPEDIA, Pergamon Press, 1987. It summarizes the latest results of population control studies. The main parts of the theory: population indices, stability theory, optimal control of population growth, etc. are drawn from the investigations of the author.

Key words ——Population control; population indices; stability theory.