

多自由度串联系统传递函数的辨识

张永光 陈福根 丘杰

(中科院系统科学所) (航天部二院206所)

摘 要

本文考虑多自由度串联振动系统传递函数的辨识问题。分析表明,从输入输出结构看这是一个多级闭环系统,如用模态分析技术建模,需解 $2n$ 阶状态方程的特征值问题,随着 n 的增大,计算量增大,参数估计精度下降。本文从系统辨识角度提出一种二阶振荡系统传递函数辨识方法,分别处理各个自由度的传递函数辨识,仿真计算结果表明该方法比模态分析法简便有效。

关键词——非线性回归,多自由度振动系统,可辨识性,ARMAX模型。

一、引言

图1所示系统是某些振动系统的简化,是机械振动(如铁路车辆)中最基本的模型。这种系统形式上是开环结构,但从输入输出结构看,是一个多级闭环系统,其扰动输入至观测输出之间的关系是 $2n$ 阶的,随着 n 的增大,辨识系统将会遇到很大的困难。近年来,模态分析技术成为解决结构振动的一种有力方法。在分析文献[1—3]的基础上,基于系统辨识方法^[4,5]建立图2所示的输入输出关系。它具有两个特点:(1)正向回路中的各环节都是二阶振荡系统;(2)反馈回路中只包含相邻两个环节的物理参数,也具有标准的二阶振荡系统形式,故不必专门辨识反馈回路。利用这些特点及非线性最小二乘拟合方法,构成了本文所提出方法的基本内容。

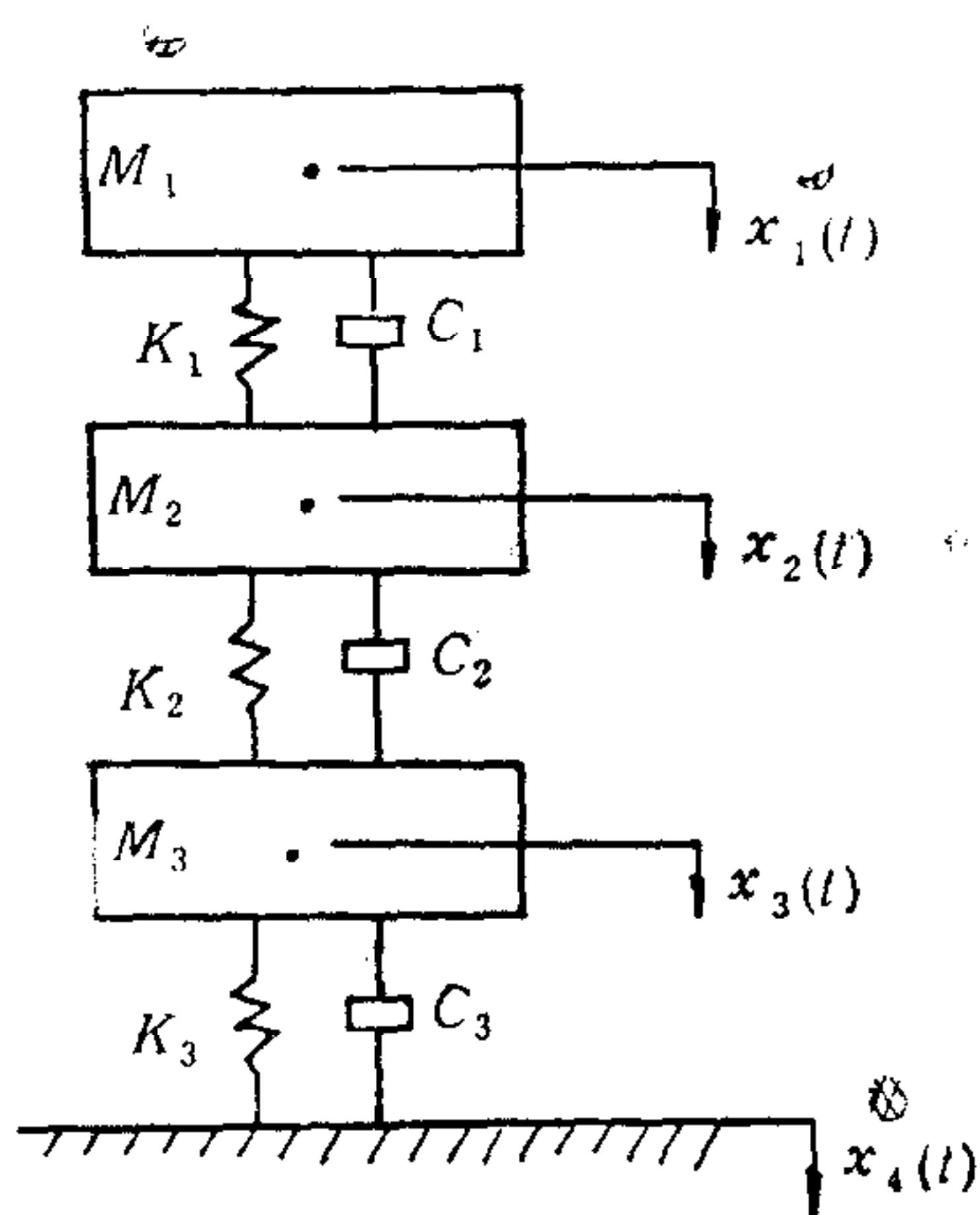


图 1

二、基本问题的描述

考虑图1所示的物理系统,各部分物理量如图1所示。为方便起见,这里只画出 $n=3$ 的情形,但文中所述问题及解决方法不受此限制,

$x_1(t)$, $x_2(t)$ 及 $x_3(t)$ 分别是在三个质量处的量测记录, $x_4(t)$ 是输入激励. 这些量测可以是位移、速度或加速度中任一物理量. 这个系统的微分方程模型为

$$\begin{cases} M_1\ddot{x}_1 + c_1\dot{x}_1 + k_1x_1 = c_1\dot{x}_2 + k_1x_2, \\ M_2\ddot{x}_2 + (c_1 + c_2)\dot{x}_2 + (k_1 + k_2)x_2 = c_1\dot{x}_1 + k_1x_1 + c_2\dot{x}_3 + k_2x_3, \\ M_3\ddot{x}_3 + (c_2 + c_3)\dot{x}_3 + (k_2 + k_3)x_3 = c_2\dot{x}_2 + k_2x_2 + c_3\dot{x}_4 + k_3x_4. \end{cases} \quad (1)$$

根据输入输出关系, 可将图 1 的物理模型表示为图 2.

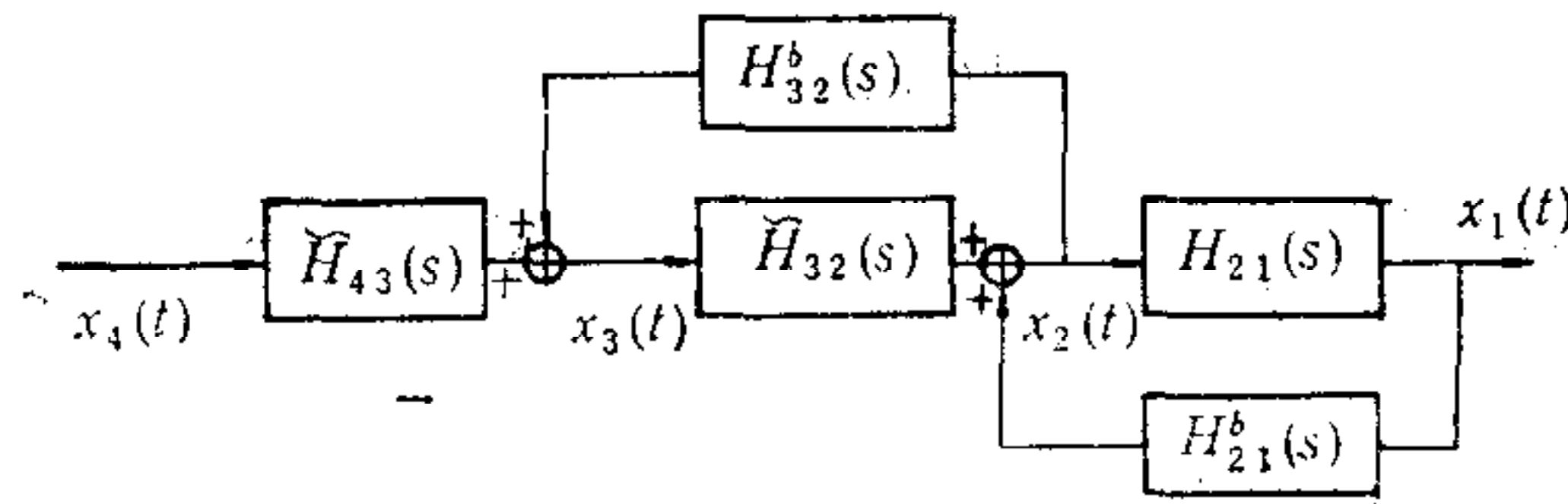


图 2

其中

$$\begin{aligned} H_{12}(s) &= \frac{c_1s + k_1}{M_1s^2 + c_1s + k_1} \triangleq \frac{B_1(s)}{A_1(s)}, \\ H_{12}^b(s) &= \frac{c_1s + k_1}{M_2s^2 + (c_1 + c_2)s + (k_1 + k_2)} \triangleq \frac{B_1(s)}{A_2(s)}, \\ \tilde{H}_{23}(s) &= \frac{c_2s + k_2}{M_2s^2 + (c_1 + c_2)s + (k_1 + k_2)} \triangleq \frac{B_2(s)}{A_2(s)}, \\ H_{23}^b(s) &= \frac{c_2s + k_2}{M_3s^2 + (c_2 + c_3)s + (k_2 + k_3)} \triangleq \frac{B_2(s)}{A_3(s)}, \\ \tilde{H}_{34}(s) &= \frac{c_3s + k_3}{M_3s^2 + (c_2 + c_3)s + (k_2 + k_3)} \triangleq \frac{B_3(s)}{A_3(s)}. \end{aligned}$$

由上述各式的结构可知, 正向回路的 H_{12} , \tilde{H}_{23} , \tilde{H}_{34} 全是二阶振荡系统, 反馈回路的 H_{12}^b 及 H_{23}^b 的分子分母分别与前后两环的分子分母相同, 也是二阶系统. 它们都具有相同的形式: $G(s) = (As + B)/(Ms^2 + cs + k)$ 为使 $G(s)$ 可唯一确定, 不失一般性假定质量 M_1, M_2, M_3 为已知.

三、单自由度情形(基本方法)

为了阐明本文所述基本方法, 先考虑最简单的单自由度问题, $z_1(k)$ 与 $z_2(k)$ 分别为 $x_1(t)$ 与 $x_2(t)$ 的离散采样. 考虑带有一个零阶保持器

$$H(s) = \frac{1}{s} (1 - e^{-Ts}),$$

采样时间间隔为 T 的系统, 与 $G(s)$ 串联. 因为零阶保持器不改变采样系统的极点对应关系, 而改变其零点, 所以, 系统 $H(s)G(s)$ 对应的脉冲传递函数 $HG(z)$ 为下述二阶离散系统

$$HG(z) = \frac{b_1z^{-1} + b_2z^{-2}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}} \quad (2)$$

利用采样数据 $z_1(k)$, $z_2(k)$ 可以拟合下述的二阶 ARMAX 模型

$$\begin{aligned} z_1(k) + \hat{a}_1 z_1(k-1) + \hat{a}_2 z_1(k-2) \\ = \hat{b}_1 z_2(k-1) + \hat{b}_2 z_2(k-2) + \hat{c}_1 \varepsilon(k-1) + \hat{c}_2 \varepsilon(k-2) + \varepsilon(k). \end{aligned} \quad (3)$$

其中 $\{\varepsilon(k)\}$ 为白噪声序列, 使用递推最小二乘或增广最小二乘拟合(3)式, 获得 \hat{a}_1 , \hat{a}_2 , \hat{b}_1 及 \hat{b}_2 后即可得到 $HG(z)$ 的估计 $\widehat{HG}(z)$.

为了从 $\widehat{HG}(z)$ 获得 $G(s)$ 的估计, 将 $\widehat{HG}(z)$ 进行逆 z 变换, 得到一个无穷数列 $\{\hat{h}_g(k)\}$, 取适当的 N 将 $\{\hat{h}_g(k)\}$ 序列截断得到 $\{\hat{h}_g(k), k=0, 1, \dots, N\}$. 令 $\hat{h}_g(k)$ 的理论真值为 $h_g^*(k)$, 又令 $H(s)G(s)$ 的脉冲响应函数为 $h_g(t)$, $0 \leq t \leq \infty$,

$$\begin{aligned} h_g(t) = \frac{1}{\beta} \left(\frac{A}{M} - \frac{BC}{2Mk} \right) e^{-\alpha t} [\sin \beta t - e^{\alpha T} \sin \beta(t-T)] \\ - \frac{B}{k} e^{-\alpha T} [\cos \beta t - e^{\alpha T} \cos \beta(t-T)]. \end{aligned} \quad (4)$$

其中 $\alpha = c/2M$, $\beta = \sqrt{4Mk - c^2/2M}$, T 为采样间隔. 在零阶保持器下有 $h_g^*(k) = h_g(kT)$, $k=0, 1, \dots$. 于是可用 $\{\hat{h}_g(k), k=0, 1, \dots, N\}$ 对 $h_g(t)$ 进行非线性最小二乘拟合, 从而得到参数估计值 $\hat{c}, \hat{k}, \hat{A}, \hat{B}$. 由此即可得到 $G(s)$ 的估计 $\hat{G}(s)$.

四、多自由度情形

(i) $H_{12}(s)$ 的辨识. 图 2 所示系统中, 第一个闭环是由 $H_{12}(s)$ 与 $H_{12}^b(s)$ 组成, 对应的采样系统如图 3 所示, 在输出量测 $z_1(k)$ 中带有白噪声 $\varepsilon_1(k)$, 其采样系统可以表示为

$$\begin{cases} A_1(z)Z_1(k) = B_1(z)Z_2(k) + c_1(z)\varepsilon_1(k), & (5) \\ A_2(z)Z_2(k) = BB_1(z)Z_1(k) + B_2(z)Z_3(k). & (6) \end{cases}$$

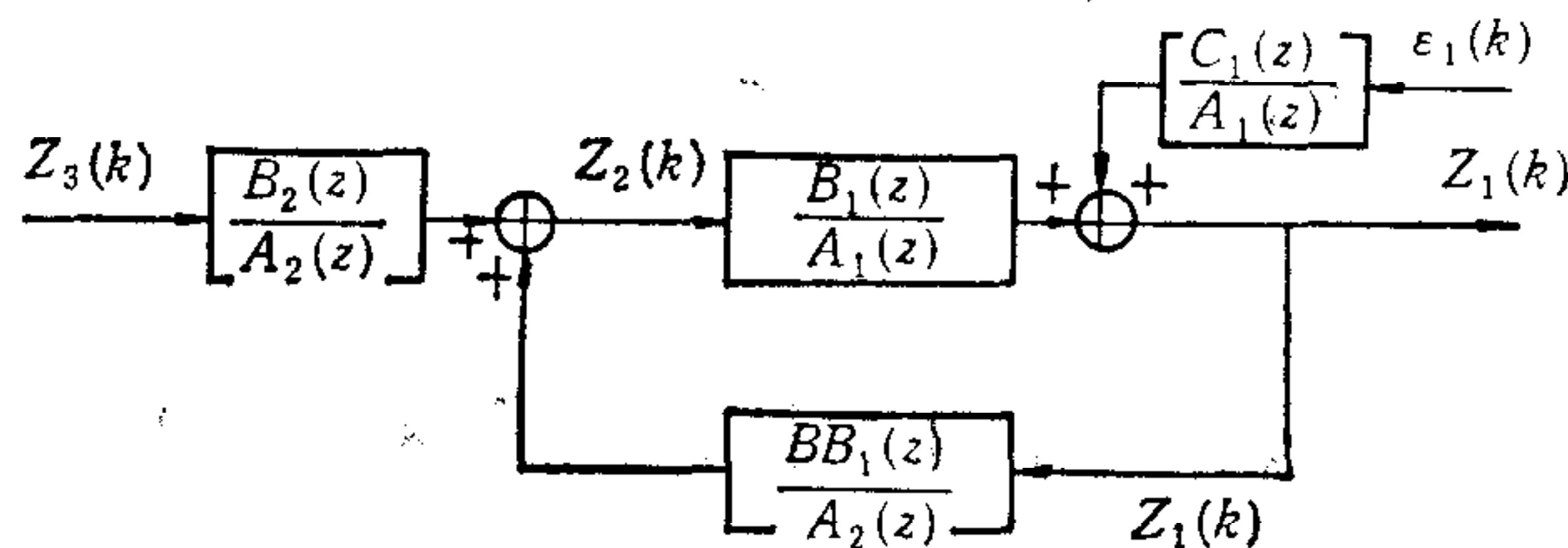


图 3

根据文献[4]中定理 5.6.1 可知, 在一定的条件下可以应用开环辨识方法. 本文考虑的实际物理系统容易满足这些条件. 于是, 可利用 $Z_1(k)$, $Z_2(k)$ 拟合开环的离散模型(5), 得到 $\hat{A}_1(z)$ 与 $\hat{B}_1(z)$, 按照单自由度情形给出的拟合方法, 可估计出 \hat{c}_1 , \hat{k}_1 , 从而得到 $\hat{H}_{12}(s)$.

(ii) $\tilde{H}_{23}(s)$ 的辨识. 这是图 2 所示的第二个回路, 可以画出与图 3 相似的框图, 只是其中的噪声输入部分要换成来自 $Z_1(k)$ 的反馈部分. 于是, 可按下述离散模型进行辨识:

$$\hat{A}_2(z)Z_2(k) = \hat{B}_2(z)Z_3(k) + \widehat{BB}_1(z)Z_1(k) + c_2(z)\varepsilon_2(k), \quad (7)$$

拟合得到 $\hat{A}_2(z)\hat{B}_2(z)$ 及 $\widehat{BB}_1(z)$, 由此得 $\tilde{H}_{23}(s)$ 的估计.

(iii) $\tilde{H}_{34}(s)$ 的辨识可以完全仿照 $\tilde{H}_{23}(s)$ 进行.

(iv) 由 $H_{23}(s) = A_1(s)B_2(s)/[A_1(s)A_2(s) - B_1(s)^2]$ 及

$$H_{13}(s) = B_1(s)B_2(s)/[A_1(s)A_2(s) - B_1(s)^2]$$

可以分别得到 $x_2(t)$, $x_2(t)$ 及 $x_3(t)$ 之间的传递函数估计. 类似地可以得到 $H_{34}(s)$, $H_{24}(s)$ 及 $H_{14}(s)$ 的估计.

当 $n > 3$ 时, 上述过程可以用相同的程序类似地重复下去. 使用本文的方法避免了模态分析要求解 $2n$ 阶矩阵的特征值问题.

五、多自由度情形仿真计算

我们对 $n = 3$ 的情形进行了数字仿真, 系统的物理参数为: $M_1 = 1.0$; $M_2 = 1.0$; $M_3 = 1.0$; $c_1 = 2.0$; $c_2 = 1.0$; $c_3 = 3.0$; $k_1 = 7.0$; $k_2 = 2.0$; $k_3 = 8.0$. 系统的输入为 $Z_4(k)$, 是由一 PRBS 序列通过系统 $G_N(z) = (0.079246z^{-1} - 0.0753503z^{-2})/(1 - 1.5130347z^{-1} + 0.6055307z^{-2})$ 产生的有理谱非白噪声, 仿真结果见表 2.

表 2

参数	真值	估计值 (无噪声情形)	估计值 (有噪声情形, $\lambda = 0.1$)
c_1	2.0	1.9999	2.0501
k_1	7.0	6.9994	6.9904
$c_1 + c_2$	3.0	3.0004	3.0812
$k_1 + k_2$	9.0	8.9976	8.7785
c_2	1.0	\hat{c}_2 (分子系数)=1.0002 $\hat{c}_2 = \widehat{c_1 + c_2} - \hat{c}_1 = 1.0005$	$\hat{c}_2 = 1.0007$ $\hat{c}_2 = 1.0311$
k_2	2.0	\hat{k}_2 (分子系数)=1.9992 $\hat{k}_2 = \widehat{k_1 + k_2} - \hat{k}_1 = 1.9982$	$\hat{k}_2 = 2.0396$ $\hat{k}_2 = 1.7881$
$c_2 + c_3$	4.0	4.0005	3.9258
$k_2 + k_3$	10.0	10.0018	9.7083
c_3	3.0	\hat{c}_3 (分子系数)=3.0002 $\hat{c}_3 = \widehat{c_2 + c_3} - \widehat{c_1 + c_2} + \hat{c}_1 = 3.0000$	$\hat{c}_3 = 3.0048$ $\hat{c}_3 = 2.8947$
k_3	8.0	\hat{k}_3 (分子系数)=8.0035 $\hat{k}_3 = \widehat{k_2 + k_3} - \widehat{k_1 + k_2} + \hat{k}_1 = 8.0036$	$\hat{k}_3 = 7.7486$ $\hat{k}_3 = 7.9202$

(共迭代 250 步)

(共迭代 2000 步)

注: 有噪声情形是指在 $Z_i(k)$ 上又迭加一个噪声, 噪声水平 $\lambda = 0.1$ 表示噪声的标准差为 0.1.

参 考 文 献

- [1] Wu, S.M., Pandit, S.M., *Time Series and System Analysis With Applications*, 1983.
[2] 胡津亚, 铁道车辆的线性和非线性随机振动, *铁道学报*, **3**, 1981 No. 4.
[3] 曾三元, 吴应暄, 铁道车辆垂向随机动态响应, *长沙铁道学院学报*, 1984.
[4] Goodwin, G, Payne, R., *Dynamic System Identification*, 1977, (有中译本).
[5] 绪方胜彦, *现代控制工程*, 科学出版社, 1976.

THE IDENTIFICATION OF TRANSFER FUNCTIONS IN SERIES VIBRATION SYSTEM WITH MULTIPLE DEGREES OF FREEDOM

ZHANG YONGGUANG

(Institute of Systems Science, Academia Sinica)

CHEN FUGEN QIU JIE

(Beijing Mechanical Equipment Institute)

ABSTRACT

In this paper, the problem of identifying transfer functions in the vibration system with multiple degrees of freedom is dealt with. According to its input-output structure, such system is a multiple crossed closed loop system. By mode analyzing technique, it is required to solve an eigenvalue problem on the state equation of the degree of $2n$. As n increases, the computational demand for mode analyzing technique will increase greatly and the accuracy of parameter estimation will decrease. A method which can unifiedly deal with every stage's identification for a second order vibration system, and identify all transfer functions in the system is presented. The simulation results show that the method is simpler and more convenient than the mode analyzing technique for this class of systems.

Key words ——Nonlinear regression; vibration systems with multiple degrees of freedom; identifiability; ARMAX models.