第 15 卷 第 5 期
1989 年 9 月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 15, No. 5
Sept., 1989

不可控和不可观的网络结构特征

戴 国 胜
(长江航运科学研究所)

摘 要

本文提出不建立状态方程，仅凭观察找出网络中是否存在可约结构或零状结构，就可准确判断出是否可控可观. 主要论点用网络拓拓[1]法给出证明.

关键词: 可约割集，可约回路，零状态结构.

一、状态的线性相关与不可控和不可观

系统的特性与物理结构密切相关. 在电网络中，不可控和不可观的这种异常特性是网络中某种特殊结构的表现. 以此为思路，可探讨系统的物理结构分析法. C. T. Lin 1974 年虽提出过结构可控性概念[2]，但仍是讨论状态方程的结构，与本文的物理结构分析法不同.

在零初始条件下，若存在一组不全为零的常数 K_i，使得一组用复变量 s 表示的状态 $x_i(s)$ 满足方程

$$\sum K_i x_i(s) = 0, \tag{1}$$

则这组状态是线性相关的. 若某个 x_i 有

$$x_i(s) = 0, \tag{2}$$

即等于零的状态是线性相关状态的特例. 如众所周知的:

定理 1. 网络不可控的充分必要条件是存在线性相关状态.

二、网络中的线性相关结构

图 1 是一般多端口电网络示意图. U_i 表示输入，可以是电压源或电流源; x_i 表示状态，取为全部电感电流和电容电压; 每个小方块表示一广义支路，$y_p(s)$ 是该支路中全部电压源短路电流源开路后的复导纳. 约定: 每个 $y_p(s)$ 的分子和分母多项式之间都是不可约分的. 图中 j、j' 表示输入端口，i、i' 表示输出端口，p、p' 表示支路端口.

线性相关状态存在于线性相关结构之中，网络中寻找线性相关结构比较容易. 线性相关结构按式 (1) 和 (2) 可分为两大类.

本文于 1987 年 3 月 16 日收到.

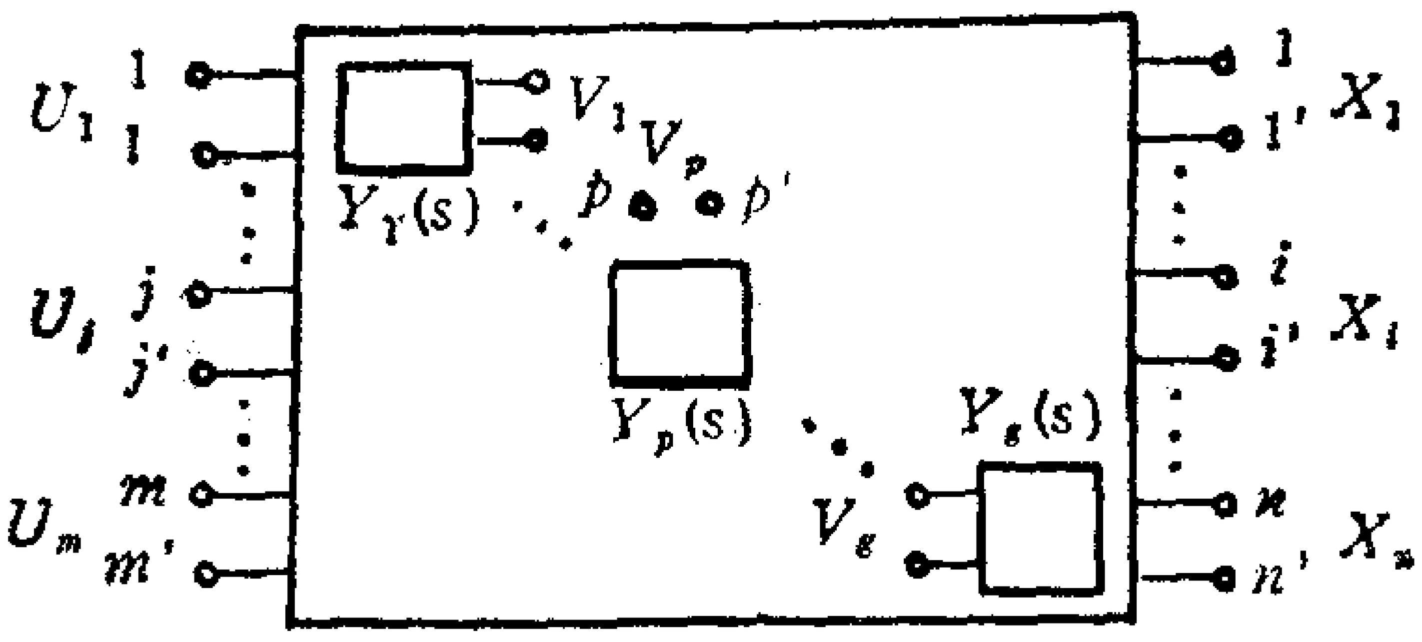

图 1 一般多端口网络示意图

1. 可约结构

已为人们熟知[1,3]的纯电感割集和纯电容回路是典型的可约结构，它们之中恒可列出式（1）的线性相关方程．下面两种结构是未引起人们注意而又广泛存在着的割集和回路，本文主要讨论这类结构．

定义 1. 可约割集——支路复导纳的分子多项式之间有公因式的独立割集，如图 2 右边的等效网络中，y_3 和 y_4 的分子多项式之间有公因式 s^2+s+1，构成一可约割集．

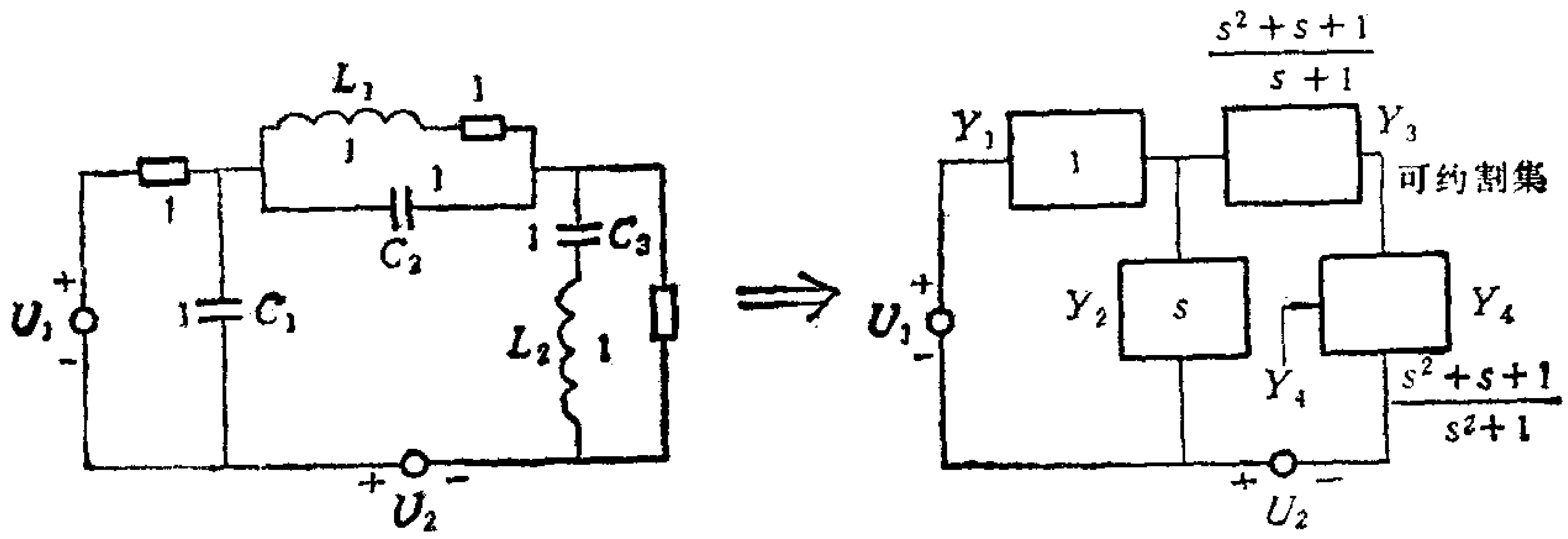

图 2 可约割集示例

纯电容割集是可约割集的特例，公因式是 s. 可约割集中各支路在结构上是对称的，各支路复导纳总可表示成

$$y_p(s)=\frac{R(s)e(s)}{\mathrm{den}\,y_p(s)}. \tag{3}$$

式中，$e(s)$ 为公因式，$R(s)$ 为余式；$\mathrm{den}\,y_p(s)$ 为导纳 $y_p(s)$ 的分母多项式，den 为分母 denominator 的缩写．对偶地有可约回路定义(略)．

2. 零状态结构

平衡电桥是典型的零状态结构，它的桥臂电流等于零，可列式（2）的特殊线性相关方程．另一结构作如下定义：

定义 2. 可分网络[1]中的无源部分，移去一个结点以后，网络成为两个不连通部分，其中不含电源的部分叫可分网络的无源部分．如图 3 的网络，移去节点 3 后成了两个不连通网络，电感 L 就是无源部分，其上无电流是零状态．

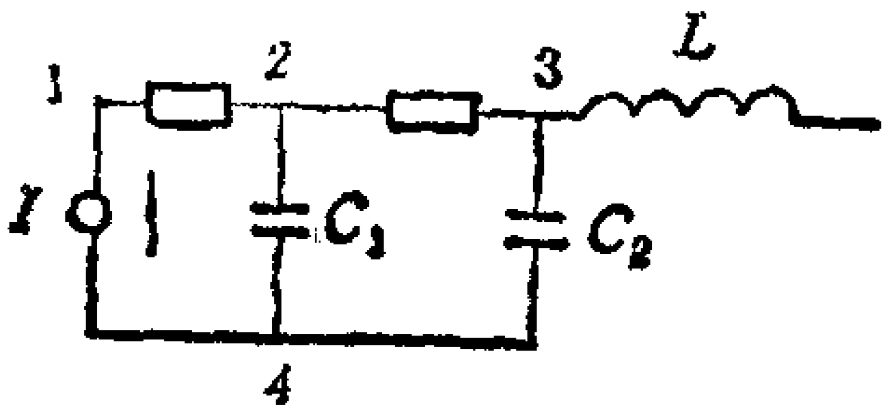

图 3 可分网络示例

3. 线性相关状态的存在条件

（1）与网络的拓扑结构有关；（2）与元件值有关（除纯电感割集和回路、纯电容割集和回路以及可分网络的无源部分外）．当这两条件具备时，还与输入的位置及类型有关．下面说“分别从每个输入来看”是指逐个观察每个输入

时，把其余的电压源短路、电流源开路.

三、网络的线性相关结构与不可控不可观

定理 2. 网络不可控的充分必要条件是，分别从每个输入来看，都存在同一个可约结构或零状态结构.

证明. 只证可约割集，其它结构的证明略.

在图 1 的多端口网络中，任取一 $U_i(s)$ 作输入，设它是电压源，在支路 p 中任取一储能元件的状态 x_i 作输出，则以 U_i 为输入 V_p 为中间变量的传递函数，有无源网络的拓扑公式[1]：

$$\frac{V_p(s)}{U_i(s)}=\frac{\operatorname{num}(W_{ip,i'p'}-W_{ip',i'p})\cdot \operatorname{den}y_p}{\operatorname{num}(W_{i,i'})}. \tag{4}$$

式中 $\operatorname{num}W_{i,i'}$ 的拓扑意义是节点 i 和 i' 在两个不同部分的所有 2-树导纳乘积之和[1]；$W_{ip,i'p'}$ 为节点 i 和 p 在一个部分而 i' 和 p' 在另一个部分的所有 2-树导纳乘积之和；$W_{ip',i'p}$ 意义同样. 它们都是关于 s 的有理分式，而整个网络的传递矩阵[3]中每个元素的拓扑表达式为

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}(s)&=[g_{i,j}(s)],\\
g_{i,j}(s)&=\frac{V_p(s)}{U_i(s)}\cdot\frac{x_{i,j}(s)}{V_p(s)}\\
&=\frac{\operatorname{num}(W_{ip,i'p'}-W_{ip',i'p})\cdot \operatorname{num}(W_{pi,p'i'}-W_{pi',p'i})}{\operatorname{num}(W_{i,i'})}.
\end{aligned}\tag{5}$$

根据基尔霍夫电流定律，割集中支路电流的代数和等于零. 设某割集中有 t 个支路，则

$$\sum_{p=1}^{t} I_p=\sum_{p=1}^{t} V_p y_p=0. \tag{6}$$

若该割集是一可约割集，将割集中 t 个支路的每个导纳代入式 (3) 有

$$\sum_{p=1}^{t} V_p\cdot\frac{R_p\cdot e}{\operatorname{den}y_p}=0, \tag{7}$$

若分别从每个输入来看，该可约割集都存在，即所有的 U_i 都是相等的. (7) 式中每一项除以 U_i 后仍成立，即

$$\sum_{p=1}^{t}\frac{R_p\cdot e}{\operatorname{den}y_p}\cdot\frac{V_p}{U_i}=0. \tag{8}$$

将式 (4) 代入上式有

$$e\sum_{p=1}^{t} R_p\frac{\operatorname{num}(W_{ip,i'p'}-W_{ip',i'p})}{\operatorname{num}(W_{i,i'})}=0. \tag{9}$$

由于可约割集中各支路的拓扑结构是对称的，各支路的 2-树导纳乘积之和 $(W_{pi,p'i'}-W_{pi',p'i})$ 都是相等的，于是下式成立：

$$e\sum_{p=1}^{t} R_p\frac{\operatorname{num}(W_{ip,i'p'}-W_{ip',i'p})\cdot\operatorname{num}(W_{pi,p'i'}-W_{pi'p'i})}{\operatorname{num}(W_{i,i'})}=0. \tag{10}$$

将式(5)代入上式有

$$e\sum_{p=1}^{t} R_p \frac{x_{i,j}(s)}{U_j(s)} = 0, \ (j = 1, 2 \cdots m). \tag{11}$$

证得传递矩阵的每个元素都约去了相同因式，网络中有线性相关状态，由定理 1 知网络不可控，这就证明了充分条件，再证必要条件.

前面已经约定：每个支路导纳 y_p 的分子多项式与分母多项式之间是不可约分的，由 2-树定义知 $\mathrm{num}(W_{pi,p'i'} - W_{pi',p'i})$ 中将无公因式 $e(s)$. 若式(5)是可约分的，则公因式 $e(s)$ 只能位于 $\mathrm{num}(W_{i,i'})$ 和 $\mathrm{num}(W_{ip,i'p'} - W_{ip',i'p})$ 之中. 文献[1]指出 $W_{ip,i'p'} - W_{ip',i'p}$ 中的每一项一定可在 $W_{i,i'}$ 中找到. 对所有的 i，即对每一个输入来说，要使 $\mathrm{num}(W_{ip,i'p'} - W_{ip',i'p})$ 与 $\mathrm{num}(W_{i,i'})$ 中都有相同公因式的唯一可能是，节点 i 和 i' 在两个不同部分的所有 2-树中都有一根树支导纳的分子中有公因式 $e(s)$. 由 2-树的性质知，对所有的输入来说，这些树支在网络中构成了一可约割集. 定理证毕.

定理 2 指出判断网络不可控的简便方法是：对于给定的网络，首先把全部电压源短路，全部电流源开路，看网络中是否有前面讨论的六种结构. 如果有，就将输入逐个加入，再看对每一个输入是否都存在同一个这类结构. 如果存在，网络就是不可控的，不可控状态就是该结构中的线性相关状态. 对偶地有不可观测定理.

定理 3. 若网络中存在线性相关结构，且指定的输出不位于这类结构之中时，网络是不可观测的. 线性相关结构中的状态是不可观状态.

不可控和不可观在结构上的共同点是都存在线性相关结构，不同点是不可控与输入的位置有关，而不可观与输出的位置有关. 显然，当网络中不存在线性相关结构时是可控又可观的.

笔者承华中理工大学戴旦前副教授的热情帮助，谨致谢意.

参 考 文 献

[1] 陈树柏等，网络图论及其应用，科学出版社(1982).
[2] Lin. C. T., Structural Controllability, *IEEE Trans. Autcm Contr.* **AC-19**(1974), 13,201—208.
[3] 贝卡利著，陈大棓等译，网络分析与综合，人民教育出版社(1979).

STRUCTURE CHARACTERISTICS OF NONCONTROLLABLE AND NONOBSERVABLE NETWORK

Dai Guosheng

(Changjiang Shipping Science Research Institute)

Abstract

This paper proposes a method to differentiate accurately the noncontrollability and nonobservability of a network only by observing if there exists reducible or zero-state structure in the network, which avoids the setting up of state equation. The main argument is proved by topological method.

Key words ——Reducible cutset; reducible loop; zero-state structure.