第15卷 第5期 自 动 化 学 报 Vol. 15, No. 5
1989 年 9 月 ACTA AUTOMATICA SINICA Sept., 1989

多变量自校正解耦控制器的全局收敛性分析*

柴天佑
(东 北 工 学 院)

摘　　要

本文对多变量自校正解耦控制算法[1]进行了稳定性和收敛性分析. 结果表明: 该算法即使用于非最小相位系统仍然具有全局收敛特性, 即以概率1输入输出向量采样均方有界, 广义跟踪误差向量条件采样均方极小.

关键词: 多变量系统,自适应解耦控制,全局收敛性.

一、前　　言

近来,基于最小方差和广义最小方差策略的多变量自适应算法[2-4]相继提出. 文[1]提出了可以控制具有不同传输延时的一类多变量系统的自适应解耦控制算法. 虽然文[5]证明了多变量最小方差控制算法的全局收敛性, 但是至今对于能够有效控制多变量随机非最小相位系统的自校正控制器尚没有建立全局收敛性分析.

二、自校正解耦控制算法

设被控对象可以用线性向量差分方程

$$A(z^{-1})\boldsymbol{y}(t) = D(z^{-1})B(z^{-1})\boldsymbol{u}(t) + C(z^{-1})\boldsymbol{\xi}(t) \tag{2.1}$$

描述. 其中 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 分别是 n 维输入输出向量, A、B、C 和 D 是单位后移算子 z^{-1} 的矩阵多项式, $A(z^{-1}) = \mathrm{diag}(A_{ii}(z^{-1}))$, $C(z^{-1}) = \mathrm{diag}(C_{ii}(z^{-1}))$, $D(z^{-1}) = \mathrm{diag}(z^{-k_i})$ $i = 1,\cdots,n$, $k_i > 0$. $B(z^{-1})$ 可以表示为

$$B(z^{-1}) = \bar{B}(z^{-1}) + \bar{\bar{B}}(z^{-1}),\ \bar{B}(z^{-1}) = \mathrm{diag}(B_{ii}(z^{-1})),\ \bar{\bar{B}}(z^{-1}) = (B_{ij}(z^{-1})),$$

$$i = 1,\cdots,n,\ j = 1,\cdots,n.$$

$$B_{ij}(z^{-1}) = \sum_{l=0}^{n_{bij}} z^{-k_{ij}} b_{ijl} z^{-l},\ k_{ij} > 0,\ i \neq j,\ k_{ii} = 0.$$

实随机序列 $\{\boldsymbol{\xi}(t)\}$ 为鞅差列,设 $\{F_t\}$ 为非降子 σ-代数,且设:

$$E(\xi(t)/F_{t-1}) = 0,\ a.s.,\ E(\xi(t)\xi(t)^T/F_{t-1}) = \gamma_\xi,\ a.s.,\ \mathrm{tr}\gamma_\xi < \infty. \tag{2.2}$$

本文于1987年3月9日收到.
* 国家自然科学基金项目.

$$\lim_{N\to\infty}\sup \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\|\xi(t)\|^2<\infty,\ a\cdot s\cdot. \tag{2.3}$$

假设 A.

1）在 $A(z^{-1})$、$B(z^{-1})$、$C(z^{-1})$ 中的 z^{-1} 的多项式的阶次的上界已知；

2）$\det C(z^{-1})\neq 0$，$|z|\geqslant 1$，$\bar{B}(0)$ 非奇异；

3）$D(z^{-1})$ 已知．引入性能指标：

$$J=E(\|D(z)\boldsymbol{e}(t)\|^2/F_t), \tag{2.4}$$

式中，

$$D(z)\boldsymbol{e}(t)=P(z^{-1})D(z)\boldsymbol{y}(t)-R(z^{-1})\boldsymbol{w}(t)+S(z^{-1})\boldsymbol{u}(t)+Q(z^{-1})\boldsymbol{u}(t), \tag{2.5}$$

其中 $\boldsymbol{w}$ 是 n 维已知有界参考输入向量，P、Q、R 是加权对角矩阵多项式，S 为矩阵多项式，$P(0)$ 非奇异，$D(z)=D(z^{-1})^{-1}=\mathrm{diag}(z^{r_i})$．定义辅助输出向量

$$D(z)\boldsymbol{\phi}(t)=P(z^{-1})D(z)\boldsymbol{y}(t). \tag{2.6}$$

引理 1.[1] $D(z)\phi(t)$ 的最优预报 $D(z)\phi^*(t)$ 与预报误差 $D(z)\boldsymbol{v}(t)$ 为

$$D(z)\phi^*(t)=C(z^{-1})^{-1}[G(z^{-1})y(t)+H(z^{-1})u(t)+\bar{D}(z^{-1})u(t)], \tag{2.7}$$

$$D(z)\boldsymbol{v}(t)=D(z)\phi(t)-D(z)\phi^*(t)=F(z^{-1})D(z)\boldsymbol{\xi}(t). \tag{2.8}$$

式中，$H(z^{-1})=F(z^{-1})\bar{B}(z^{-1})$，$\bar{D}(z^{-1})=F(z^{-1})\bar{\bar{B}}(z^{-1})$，$F(z^{-1})$ 和 $G(z^{-1})$ 满足下式：

$$C(z^{-1})P(z^{-1})=F(z^{-1})A(z^{-1})+D(z^{-1})G(z^{-1}). \tag{2.9}$$

其中 $F(z^{-1})=\mathrm{diag}(F_{ii}(z^{-1}))$，$G(z^{-1})=\mathrm{diag}(G_{ii}(z^{-1}))$，$F_{ii}(z^{-1})$ 和 $G_{ii}(z^{-1})$ 分别是 (k_i-1) 和 $n_{g_{ii}}$ 阶的 z^{-1} 多项式，$n_{g_{ii}}=\max(n_{a_{ii}}-1,n_{c_{ii}}+n_{p_{ii}}-k_i)$.

引理 2.

1）使 (2.4) 式极小的最优控制律为

$$D(z)\phi^*(t)=R(z^{-1})\boldsymbol{w}(t)-Q(z^{-1})\boldsymbol{u}(t)-S(z^{-1})\boldsymbol{u}(t); \tag{2.10}$$

2）性能指标 (2.4) 式的极小值为

$$J=E\{\|F(z^{-1})D(z)\boldsymbol{\xi}(t)\|^2/F_t\}=\gamma^2; \tag{2.11}$$

3）闭环系统方程为

$$(P\bar{B}+QA)\boldsymbol{y}(t)=D\bar{B}R\boldsymbol{w}(t)+D(Q\bar{\bar{B}}-\bar{B}S)\boldsymbol{u}(t)+(F\bar{B}+QC)\boldsymbol{\xi}(t). \tag{2.12}$$

证明略．显然可以通过选取 Q 和 S 使 (2.12) 式右端第二项为零来实现解耦控制．由 (2.7)、(2.8) 和 (2.10) 式可得控制器参数辨识方程和控制律方程：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\phi}(t)=&G(z^{-1})D(z^{-1})\boldsymbol{y}(t)+H(z^{-1})D(z^{-1})\boldsymbol{u}(t)\\&+\bar{D}(z^{-1})D(z^{-1})\boldsymbol{u}(t)-C^*(z^{-1})\boldsymbol{\phi}^*(t)+\boldsymbol{v}(t),\end{aligned} \tag{2.13}$$

$$\begin{aligned}&G(z^{-1})y(t)+H(z^{-1})u(t)+\bar{D}(z^{-1})u(t)\\&-C^*(z^{-1})D(z)\phi^*(t)=D(z)y^*(t).\end{aligned} \tag{2.14}$$

式中 $C^*(z^{-1})=C(z^{-1})-C(0)$，$y^*(t)$ 满足

$$D(z)y^*(t)=R(z^{-1})u(t)-Q(z^{-1})u(t)+S(z^{-1})u(t). \tag{2.15}$$

自适应算法

$$\hat{\theta}_i(t)=\hat{\boldsymbol{\theta}}_i(t-k_i)+\frac{\bar{a}}{\gamma_i(t-k_i)}\boldsymbol{x}_i(t-k_i)[\boldsymbol{\phi}_i(t)-X_i(t-k_i)^T\hat{\theta}_i(t-k_i)],\bar{a}>0, \tag{2.16}$$

$$\gamma_i(t-k_i)=\gamma_i(t-k_i-1)+x_i(t-k_i)^T x_i(t-k_i), \tag{2.17}$$
$$x_i(t)^T\hat{\theta}_i(t)=y_i^*(t+k_i),\ i=1,\cdots,n.$$

其中数据向量 $x_i(t)$ 和参数向量 θ_i 为

$$x_i(t)^T=[y_i(t),\ y_i(t-1),\cdots;u_i(t),u_i(t-1),\cdots;(u_j(t-k_{ij}))^T,$$
$$(u_j(t-k_{ij}-1))^T,\cdots;-y_i^*(t+k_i-1),\cdots;],$$
$$(u_j(t-k_{ij}))=[u_1(t-k_{i1}),\cdots,u_{i-1}(t-k_{ii-1}),\ u_{i+1}(t-k_{ii+1}),\cdots,$$
$$u_n(t-k_{in})]^T,$$
$$\theta_i=[g_{ii}^0,\ g_{ii}^1,\cdots;h_{ii}^0,\ h_{ii}^1,\cdots;\bar{d}_{i1}^0,\cdots,\bar{d}_{ii-1}^0,\bar{d}_{ii+1}^0,\cdots,$$
$$\bar{d}_{in}^0,\ \bar{d}_{i1}^1,\cdots,\bar{d}_{ii-1}^1,\bar{d}_{ii+1}^1,\cdots,\bar{d}_{in}^1,\ C_{ii}^1,\cdots]^T.$$

(2.13)、(2.14) 式中的 $\phi^*(t)$ 用 $y^*(t)$ 代替。

三、稳定性和收敛性分析

本文给出的算法的全局收敛性证明还需要下列假设。

假设 *B*. 离线选择加权阵 P、Q 和 S，使下列矩阵多项式

$$T(z^{-1})=P(z^{-1})B(z^{-1})+A(z^{-1})(Q(z^{-1})+S(z^{-1})) \tag{3.1}$$

是稳定的，即 $\det T(z^{-1})$ 的零点在单位圆内。

显然这个假设对于基于广义最小方差策略的自校正控制器来说是必要的．一般自校正控制器的加权阵离线凑试，假设 B 给出了离线选择加权阵的准则．只要系统 (2.1) 是可以稳定的，那么满足假设 B 的 P、Q、S 一定存在．如果最小相位系统可选 $Q=S=0$，如果非最小相位系统可选 P、Q、S 使 (3.1) 式稳定．选择加权阵的一般方法见文 [6].

定理． 系统满足假设 (2.2) 式、(2.3) 式、A、B，且假定

$$C(z^{-1})-\bar{a}I/2 \tag{3.2}$$

严正实．算法 (2.16)—(2.18) 式用于系统 (2.1)，则以概率 1 有：

$$(1)\ \limsup_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{t=0}^{N}\|y(t)\|^2<\infty\quad a.s.; \tag{3.3}$$

$$(2)\ \limsup_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{t=0}^{N}\|u(t)\|^2<\infty\quad a.s.; \tag{3.4}$$

$$(3)\ \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{t=0}^{N}E(\|D(z)e(t)\|^2/F_t)=\gamma^2\quad a.s.. \tag{3.5}$$

证明． 定义下列各量：

$$b_i(t-k_i)=-x_i(t-k_i)^T\tilde{\theta}_i(t-k_i),\ \tilde{\theta}_i(t)=\hat{\theta}_i(t)-\theta_i, \tag{3.6}$$
$$D(z^{-1})z(t)=e(t)-v(t), \tag{3.7}$$
$$D(z^{-1})h(t)=D(z^{-1})b(t)-\frac{\bar{a}+\rho}{2}D(z^{-1})z(t). \tag{3.8}$$

由 (2.7)、(2.8)、(3.6)、(3.7) 式可得

$$C(z^{-1})z(t)=b(t).$$

于是

$$h(t)=\left(C(z^{-1})-\frac{\bar{a}+\rho}{2}I\right)b(t), \tag{3.9}$$

式中 ρ 是使 $\left(C-\frac{\bar{a}+\rho}{2}I\right)$ 严正实的小正数，由于 (3.2) 式严正实，所以 ρ 一定存在。定义 $v_i(t)=\hat{\theta}_i(t)^T\tilde{\theta}_i(t)$，利用 $\left(C-\frac{a+\rho}{2}I\right)$ 的正实性、单调收敛定理和 Kronecker 引理，采用与文 [7] 类似的方法可得：

$$\lim_{N\to\infty}\frac{N}{\gamma_2(N)}\frac{1}{N}\sum_{t=0}^{N}z_i(t)^2=0,\ a.s.,\ i=1,\cdots,n. \tag{3.10}$$

引入矩阵多项式 $\tilde{A}(z^{-1})$，$\tilde{B}(z^{-1})$，$\tilde{\tilde{B}}(z^{-1})$ 和 $\tilde{\bar{Q}}(z^{-1})$[8]，使其满足

$$A(z^{-1})\tilde{B}(z^{-1})=B(z^{-1})\tilde{A}(z^{-1}),\ \det\tilde{A}=\det A,\ \tilde{A}(0)=A(0). \tag{3.11}$$

$$\tilde{\tilde{B}}(z^{-1})\bar{Q}(z^{-1})=\tilde{\bar{Q}}(z^{-1})B(z^{-1}),\ \det\tilde{\tilde{B}}=\det B,\ \tilde{\tilde{B}}(0)=B(0),$$

$$\bar{Q}(z^{-1})=Q(z^{-1})+S(z^{-1}). \tag{3.12}$$

分别用 A 和 $\tilde{\tilde{B}}$ 左乘 (2.5) 式两边，并利用 (2.1)、(3.7)、(3.12) 式得：

$$D(PB+A(Q+S))u(t)=ADz(t)+(AF-PC)\xi(t)+ARDw(t), \tag{3.13}$$

$$D(\tilde{\tilde{B}}P+\tilde{\bar{Q}}A)D(z)\boldsymbol{y}(t)=D\tilde{\tilde{B}}\boldsymbol{z}(t)+D(\tilde{\tilde{B}}F+(Q+S)C)D(z)\boldsymbol{\xi}(t)+D\tilde{\tilde{B}}R\boldsymbol{w}(t). \tag{3.14}$$

由 (3.11)、(3.12) 式可得：

$$\det[D(\tilde{\tilde{B}}P+\tilde{\bar{Q}}A)D(z)]=\det[\tilde{\tilde{B}}(P+\bar{Q}B^{-1}A)]=\det[\tilde{\tilde{B}}(P\tilde{B}+\bar{Q}\tilde{A})\tilde{B}^{-1}]$$
$$=\det[(PA^{-1}B+\bar{Q})\tilde{A}]=\det(PB+A(Q+S)). \tag{3.15}$$

由假设 B 和 $w(t)$ 的有界性以及 (2.3) 式，使用文 [5] 引理 A.1，从 (2.15) 式、(3.13)—(3.15) 式得：

$$\frac{1}{N}\sum_{t=0}^{N}\|\boldsymbol{u}(t)\|^2\leqslant\frac{K_1}{N}\sum_{t=0}^{N}\|\boldsymbol{z}(t)\|^2+K_2,\ a.s., \tag{3.16}$$

$$\frac{1}{N}\sum_{t=0}^{N}\|\boldsymbol{y}(t)\|^2\leqslant\frac{K_3}{N}\sum_{t=0}^{N}\|z(t)\|^2+K_4,\ a.s., \tag{3.17}$$

$$\frac{1}{N}\sum_{t=0}^{N}\|\boldsymbol{y}^*(t)\|^2\leqslant\frac{K_5}{N}\sum_{t=0}^{N}\|z(t)\|^2+K_6,\ 0<K_i<\infty,$$
$$i=1,\cdots,6,\ a.s. \tag{3.18}$$

由 $\gamma_i(N)$ 和 $\boldsymbol{x}_i(t)$ 的定义以及 (3.16)—(3.18) 式得：

$$\frac{\gamma_i(N)}{N}\leqslant\frac{C_1}{N}\max_{1\leqslant j\leqslant n}\sum_{t=0}^{n}z_j(t)^2+C_2,\ 0<C_1<\infty,\ 0<C_2<\infty,$$
$$i=1,\cdots,n,\ a.s.. \tag{3.19}$$

由于 i 有限，因此总可以找到一个 $z_e(t)$ 满足 (3.19) 式于是由 (3.10) 式得：

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\frac{1}{N}\sum_{t=0}^{N}z_e(t)^2}{\frac{C_1}{N}\sum_{t=0}^{N}z_e(t)^2+C_2}=0,\ a.s..$$

即

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{t=0}^{N}z_e(t)^2=0.$$

由(3.19)式知 $\frac{\gamma_i(N)}{N}$ 有界，于是从(3.10)式得:

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{t=0}^{N}\|\boldsymbol{z}(t)\|^2=0,\quad a\cdot s\cdot. \tag{3.20}$$

由(3.16)、(3.17)和(3.20)式可得定理中的(3.3)式和(3.4)式. 因 $D\boldsymbol{z}(t)=\boldsymbol{e}(t)-\boldsymbol{v}(t)=\phi^*(t)-y^*(t)$ 与 $v(t)$ 不相关，所以

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{t=0}^{N}E(\|D(z)e(t)\|^2/F_t)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}E(\|z(t)+D(z)v(t)\|^2/F_t)=\gamma^2, a\cdot s\cdot.$$

四、结 论

本文给出了多变量自校正解耦控制器的全局收敛性证明. 结果表明，当算法用于非最小相位系统时，只要选择合适的加权阵，算法仍具有全局收敛特性. 该自适应算法如果采用最小二乘辨识算法和类似文[9]的方法，可证明具有全局收敛特性.

参 考 文 献

[1] 柴天佑，郎世俊，顾兴源，多变量自校正前馈控制器及其应用，自动化学报，第12卷，第三期，1986，229—236.
[2] Borisson, U., Self-tuning Regulators for Class of Multivariable Systems, *Automatica*, **15**(1979), 209—215.
[3] Koiva, H. N., A Multivariable Self-tuning Controller, *Automatica*, **16**(1980), 351—366.
[4] 郎世俊，顾兴源，柴天佑，A Multivariable Generalized Self-tuning Controller with Decoupling Design, *IEEE Trans. Aut. Control*, **AC-31**(1986), 474.
[5] Goodwin, G. C., Ramadge, P. J. and Caines, P. E., Discrete Time Stochastic Adaptive Control, *SIAM J. Control Optimiz.*, **19**(1981), 829.
[6] 柴天佑，A Multivariable Generalized Self-tuning Controller with Feedforward, Proceedings of American Control Conference, Minneapolis, MN, USA, 1987.
[7] Sin, K. S., Goodvin, G. C. and Bitmed, B. R., An Adaptive d-step ahead Predictor Based on Least Squares. *IEEE Trans. Aut. Control*, **AC-25**(1980). 1161—1165.
[8] Wolovich, W. A., Linear Multivariable Systems, Springer-Varlag, New York, 159.
[9] 柴天佑，A self-tuning decoupling controller for a class of multivariable systems and global convergence analysis. *IEEE Trans. Automatic Control*, **AC-33**(1988), 767—771.

THE GLOBAL CONVERGENCE ANALYSIS OF A MULTIVARIABLE DECOUPLING SELF-TUNING CONTROLLER

Chai Tianyou
(Northeast University of Technology)

Abstract

In this paper, the stability and convergence analysis of the multivariable decoupling self-tuning control algorithm presented in [1] is given. It is shown that this algorithm has global convergence properties, i.e., with probability one, the system input vector and output vector are sample mean square bounded and the conditional mean square generalized tracking error vector achieves its global minimum possible value.

Key words ——Multivariable systems; adaptive decoupling control; global convergence properties.