一种能同时获得模型阶次和参数的递推辨识算法

牛绍华　　肖德云
(清　华　大　学)

摘　　要

对 SISO 线性差分方程模型,可以构造一种新的数据乘积矩矩阵,称信息压缩阵。对信息压缩阵进行递推 UD 分解,便得到一种新的递推辨识算法,它能在每步递推中同时得到模型的阶次和参数,从而降低了辨识过程的计算量. 该方法还同时具有良好的数值计算品质.

关键词: 最小二乘法,增广最小二乘法,信息压缩阵,UD 分解,阶次辨识.

一、引　　言

对 SISO 线性差分方程模型来说,为确定模型阶次,往往采用阶次搜索的传统辨识方法,但计算量很大,阶次高时尤为如此[1,2]. 本文对辨识算法中的数据向量进行了适当处理,从而构成一种新的数据乘积矩矩阵,称信息压缩阵,它包含了模型各阶参数和损失函数的全部信息. 对信息压缩阵进行递推 UD 分解[1,3],便可在每步递推中同时得到各阶的模型参数值和损失函数值,从而可以很方便地确定模型阶次. 由于模型参数估计和阶次辨识同时考虑,减少了辨识计算量. 该方法还具有良好的数值计算品质.

二、信息压缩阵

设过程以如下差分方程模型描述:

$$z(k)+a_1z(k-1)+\cdots+a_nz(k-n)=b_1u(k-1)+\cdots+b_nu(k-n)+v(k)+d_1v(k-1)+\cdots+d_nv(k-n), \tag{1}$$

其中, $u(k)$ 和 $z(k)$ 分别为模型的输入输出变量; a_i、b_i 和 $d_i(i=1,\cdots,n)$ 为模型参数; $v(k)$ 为零均值白噪声.

设数据向量和参数向量分别为

$$\boldsymbol{h}_n(k)=[-z(k-n),v(k-n),u(k-n),\cdots,-z(k-1),v(k-1),u(k-1)]^T, \tag{2}$$

$$\theta_n(k)=[a_n,d_n,b_n,\cdots,a_1,d_1,b_1]^T, \tag{3}$$

本文于1987年2月2日收到.

则模型(1)可以写成如下的最小二乘格式:

$$z(k)=\boldsymbol{h}_n^T(k)\boldsymbol{\theta}_n(k)+v(k). \tag{4}$$

在数据向量中加入当前的数据信息,可以得到

$$\boldsymbol{\phi}_n(k)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{h}_n(k)\\ -z(k)\end{bmatrix}, \tag{5}$$

$$\boldsymbol{\psi}_n(k)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\phi}_n(k)\\ v(k)\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{h}_n(k)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\psi}_{n-1}(k-1)\\ u(k-1)\end{bmatrix}, \tag{6}$$

(5)式和(6)式构成了数据向量的“移位性质”. 置

$$\begin{cases}\boldsymbol{R}_n(k)=\sum\limits_{j=1}^{k}\boldsymbol{h}_n(j)\boldsymbol{h}_n^T(j),\ \boldsymbol{R}_{n-1}(k-1)=\sum\limits_{j=0}^{k-1}\boldsymbol{h}_{n-1}(j)\boldsymbol{h}_{n-1}^T(j), & (7)\\ \boldsymbol{S}_n(k)=\sum\limits_{j=1}^{k}\boldsymbol{\phi}_n(j)\boldsymbol{\phi}_n^T(j),\ \ \boldsymbol{S}_{n-1}(k-1)=\sum\limits_{j=0}^{k-1}\boldsymbol{\phi}_{n-1}(j)\boldsymbol{\phi}_{n-1}^T(j), & (8)\\ \boldsymbol{T}_n(k)=\sum\limits_{j=1}^{k}\boldsymbol{\psi}_n(j)\boldsymbol{\psi}_n^T(j),\ \ \boldsymbol{T}_{n-1}(k-1)=\sum\limits_{j=0}^{k-1}\boldsymbol{\psi}_{n-1}(j)\boldsymbol{\psi}_{n-1}(j). & (9)\end{cases}$$

利用(5)式,可以将(8)式分解为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}_n(k)&=\begin{bmatrix}\sum\limits_{j=1}^{k}\boldsymbol{h}_n(j)\boldsymbol{h}_n^T(j) & -\sum\limits_{j=1}^{k}\boldsymbol{h}_n(j)z(j)\\ -\sum\limits_{j=1}^{k}\boldsymbol{h}_n^T(j)z(j) & \sum\limits_{j=1}^{k}z^2(j)\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_{3n} & \boldsymbol{0}\\ -\hat{\boldsymbol{\theta}}_n^T(k) & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{R}_n(k) & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & J_n(k)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_{3n} & -\hat{\boldsymbol{\theta}}_n(k)\\ \boldsymbol{0} & 1\end{bmatrix}.\end{aligned} \tag{10}$$

其中,

$$\begin{cases}\hat{\boldsymbol{\theta}}_n(k)=\boldsymbol{R}_n^{-1}(k)\sum\limits_{j=1}^{k}\boldsymbol{h}_n(j)z(j), & (11)\\ J_n(k)=\sum\limits_{j=1}^{k}z^2(j)-\hat{\boldsymbol{\theta}}_n^T(k)\boldsymbol{R}_n(k)\hat{\boldsymbol{\theta}}_n(k). & (12)\end{cases}$$

不难看出, $\hat{\boldsymbol{\theta}}_n(k)$ 恰为模型(4)中参数向量 $\boldsymbol{\theta}_n(k)$ 的增广最小二乘估计值; $J_n(k)$ 是对应的损失函数值[1,2];数据向量 $\boldsymbol{h}_n(\cdot)$ 中的不可测噪声变量 $v(\cdot)$ 将用它的估计值 $\hat{v}(\cdot)$ 代替.

同样, 利用第(6)式的“移位性质”,也可以将(7)式和(9)式分解为

$$\boldsymbol{R}_n(k)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_{3n-1} & \boldsymbol{0}\\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_{(n-1)u}^T(k-1) & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{T}_{n-1}(k-1) & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & J_{(n-1)u}(k-1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_{3n-1} & \hat{\boldsymbol{\theta}}_{(n-1)u}(k-1)\\ \boldsymbol{0} & 1\end{bmatrix}, \tag{13}$$

$$\boldsymbol{T}_n(k)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_{3n-2} & \boldsymbol{0}\\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_{(n-1)v}^T(k-1) & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{S}_{n-1}(k-1) & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & J_{(n-1)v}(k-1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_{3n-2} & \hat{\boldsymbol{\theta}}_{(n-1)v}(k-1)\\ \boldsymbol{0} & 1\end{bmatrix}. \tag{14}$$

其中, $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(n-1)u}(k-1)$、$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(n-1)v}(k-1)$ 和 $J_{(n-1)u}(k-1)$、$J_{(n-1)v}(k-1)$ 的定义与(11)式和(12)式相似,在这里并无明确的物理意义.

注意到(10)、(13)和(14)式间的递推关系，不断分解下去，并记 $\boldsymbol{C}_n(k)=\boldsymbol{S}_n^{-1}(k)$ 为信息压缩阵，则有

$$\boldsymbol{C}_n(k) \triangleq \boldsymbol{S}_n^{-1}(k) \triangleq \boldsymbol{U}_n(k)\boldsymbol{D}_n(k)\boldsymbol{U}_n^T(k), \tag{15}$$

$$\boldsymbol{U}_n(k)=\begin{bmatrix}
1 & \hat{\boldsymbol{\theta}}_{0v}(k-n) & \hat{\boldsymbol{\theta}}_{0u}(k-n) & \hat{\boldsymbol{\theta}}_1(k-n+1) & & \hat{\boldsymbol{\theta}}_{(n-1)v}(k-1) & \hat{\boldsymbol{\theta}}_{(n-1)u}(k-1) & \hat{\boldsymbol{\theta}}_n(k)\\
 & 1 & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & \\
 & & & 1 & & & & \\
 & & & & \ddots & & & \\
 & 0 & & & & 1 & & \\
 & & & & & & 1 & \\
 & & & & & & & 1
\end{bmatrix}, \tag{16}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D}_n(k) = \mathrm{diag}[&J_0^{-1}(k-n),\ J_{0v}^{-1}(k-n+1),\ J_{0u}^{-1}(k-n+1),\cdots,\\ &J_{(n-1)v}^{-1}(k-1),\ J_{(n-1)u}^{-1}(k-1),\ J_n^{-1}(k)].\end{aligned} \tag{17}$$

可以看出，$\boldsymbol{C}_n(k)$ 中包含了各阶参数和损失函数的全部信息． 根据各阶损失函数值可以方便地确定模型的阶次． 同时，$\boldsymbol{D}_n(k)$ 的各元素还可用来监视 $\boldsymbol{C}_n(k)$ 的正定性．

三、递推 UD 分解

(15)式的 UD 分解形式可以通过对 $\boldsymbol{U}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 递推使 $\boldsymbol{C}_n(k)$ 得到更新． 递推 UD 分解技术可在文献[1]、[3]和[4]中见到． 若数据向量 $\boldsymbol{\phi}_n(k)$ 中的不可测噪声变量 $v(\cdot)$ 用其对应的估计值 $\hat{v}(\cdot)$ 代替，则最后可得到信息压缩阵的递推分解算法为

(1) $\boldsymbol{f}(k)=\boldsymbol{U}_n^T(k-1)\boldsymbol{\phi}_n(k)$，$\boldsymbol{g}(k)=\boldsymbol{D}_n(k-1)\boldsymbol{f}(k)$，

(2) $\hat{v}(k)=-f_N(k)/\beta_{N-1}(k)$，

(3) 令 $\beta_0(k)=\lambda(k)$，($\lambda(k)$ 是遗忘因子)，从 $j=1$ 到 $N\triangleq 3n+1$，计算 (4)—(6)．

(4) $\beta_j(k)=\beta_{j-1}(k)+f_j(k)g_j(k)$，

$d_{jj}(k)=d_{jj}(k-1)\beta_{j-1}(k)/\beta_j(k)\lambda(k)$，

$v_j:=g_j(k)$，$\mu_j:=-f_j(k)/\beta_{j-1}(k)$．

(5) 从 $i=1$ 到 $j-1$，计算(6)． [如 $j=1$，跳回(4)]．

(6) $u_{ij}(k)=u_{ij}(k-1)+v_i\mu_j$，

$v_i:=v_i+u_{ij}(k-1)v_j$．

其中，各量的意义及初始化参见文献[1]、[3]和[4]．

至此，便得到了一种能同时进行阶次辨识和参数估计的递推辨识算法． 由于运用了 UD 分解技术，该方法具有良好的数值计算品质[4]．

四、仿真结果

考虑如下差分方程模型:

$$z(k)-0.9z(k-1)+0.2z(k-2)=u(k-1)+0.5u(k-2)+v(k)+0.4v(k-1).$$

其中, $u(k)$ 和 $z(k)$ 分别为输入输出变量, $v(k)$ 是零均值白噪声. 用5阶幅度1.0的M序列作输入激励信号, 数据长度取为1000,遗忘因子取常数1.0, 最大可能阶次取为4. 利用本文提出的算法对模型进行辨识,得到1到4阶各阶参数估计值如表1, 不同噪信比下各阶损失函数与模型阶次的关系如图1和表2所示.

表1 各阶模型参数估计值(噪信比 $N/S=0.483$)

$\hat{n}$	$\hat{a}_1$	$\hat{b}_1$	$\hat{d}_1$	$\hat{a}_2$	$\hat{b}_2$	$\hat{d}_2$	$\hat{a}_3$	$\hat{b}_3$	$\hat{d}_3$	$\hat{a}_4$	$\hat{b}_4$	$\hat{d}_4$
4	−1.222	0.994	0.106	0.490	0.192	−0.136	−0.072	−0.188	−0.011	0.011	−0.010	−0.019
3	−1.219	0.994	0.107	0.482	0.194	−0.140	−0.055	−0.192	−0.001			
2	−0.885	0.995	0.442	0.191	0.531	0.022						
1	−0.821	0.998	0.543									
真值	−0.9	1.0	0.4	0.2	0.5							

表2 不同噪信比下各阶损失函数值

N/S	$J_{\hat{n}=0}$	$J_{\hat{n}=1}$	$J_{\hat{n}=2}$	$J_{\hat{n}=3}$	$J_{\hat{n}=4}$
1.079	8485.9	1654.3	1112.5	1108.7	1108.7
0.763	6189.4	1060.0	556.1	554.2	554.1
0.483	4862.9	693.7	222.4	221.6	221.6
0.219	4280.3	484.5	49.21	49.05	48.68

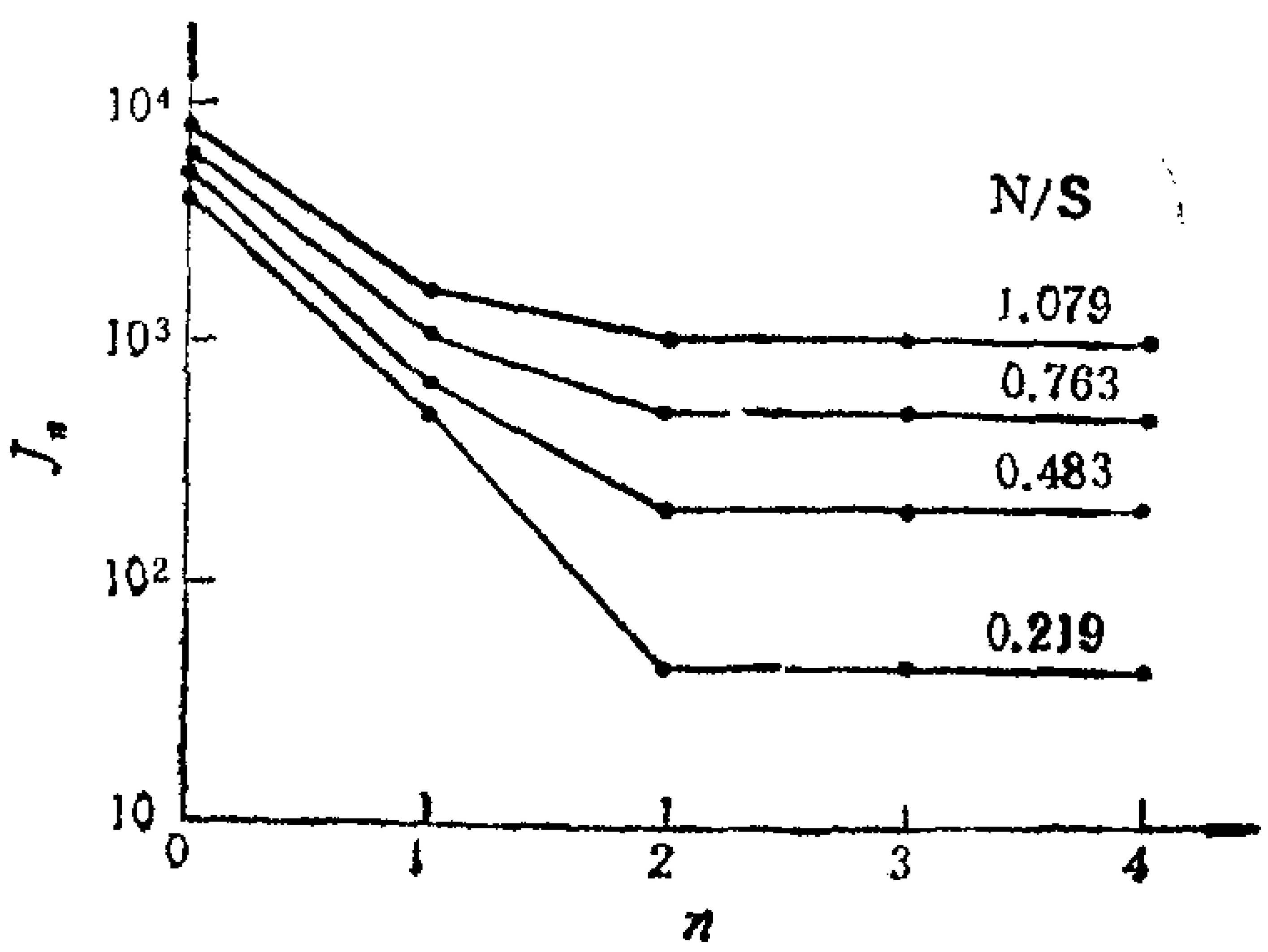

图1 损失函数随阶次的变化趋势

利用各阶损失函数值,可以很方便地根据 AIC 准则或 F-检验方法判断出模型的实际阶次应为2阶.

五、结 束 语

本文以 CARMA 模型为例，给出一种能同时获得模型阶次和参数的递推算法．它不仅计算量较小，而且具有良好的数值计算品质．仿真结果证实该方法是成功的．

参 考 文 献

[1] 方崇智，肖德云，过程辨识，清华大学出版社，1988 年．
[2] 夏天长，系统辨识-最小二乘法，熊光楞，李芳芸译，清华大学出版社，1983 年．
[3] Ljung, L., Soderstrom, T., Theory and Practice of Recursive Identification, MIT Press(1983).
[4] Thornton, C., Bierman, G. J., UDU^T Covariance Factorization for Kalman Filtering, Control and Dynamic Systems, Vol. 16, 77—248, Academic Press (1980).

A NEW RECURSIVE ALGORITHM FOR SIMULTANEOUS IDENTIFICATION OF MODEL ORDER AND PARAMETERS

NIU SHAOHUA　XIAO DEYUN
(Tsinghua University)

ABSTRACT

For linear difference equation model with unknown order, a new covariance matrix called "the Condensed Information Matrix" (CIM) can be constructed. Applying UD factorization technique to CIM, a new recursive identification algorithm can be obtained. The new algorithm can simultaneously identify the model order and parameters, so that the computational burden can be reduced.

Key words ——Least square method; extended least square method; condensed information metrix; UD factorization technique; order identification.