第15卷 第5期 自动化学报 Vol. 15, No. 5
1989年9月 ACTA AUTOMATICA SINICA Sept., 1989

广义系统理论在国民经济计划中的应用

张金水
(清华大学)

摘要

本文指出广义系统理论在国民经济计划中的一些重要应用，如：产出与消费的同步增长条件，可能达到的最大同步增长率，以及产出偏离按比例增长轨道导致崩溃的可能性等.

关键词：经济控制理论，广义动态系统，经济计划.

一、列昂惕夫与冯·纽曼模型的广义性

在国民经济计划中具有重要应用的动态投入产出模型及具有快、慢变生产过程的冯·纽曼模型可分别用式(1)和(2)来描述：

$$\boldsymbol{x}(t)=A\boldsymbol{x}(t)+B[\boldsymbol{x}(t+1)-\boldsymbol{x}(t)]+\boldsymbol{c}(t), \tag{1}$$

$$\boldsymbol{x}(t)+B\boldsymbol{x}(t)=A_1\boldsymbol{x}(t+1)+A_2\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{c}(t). \tag{2}$$

其中，$\boldsymbol{c}(t)$ 为消费向量，$\boldsymbol{x}(t)$ 为产出向量. 式(1)中 A 为消耗系数阵，B 为投资系数阵. 式(2)中 A_1 和 A_2 分别为慢变及快变生产过程的投入系数阵，B 为折旧剩余系数阵. 式(1)和(2)可化为：

$$B\boldsymbol{x}(t+1)=R\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{c}(t),\ R=I-A+B, \tag{3}$$

$$A_1\boldsymbol{x}(t+1)=R_1\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{c}(t),\ R_1=I+B-A_2. \tag{4}$$

由于 B 和 A_1 一般为奇异阵，可知式(1)和(2)是典型的广义动态系统. 此外，还有许多其它的经济模型为典型的广义动态系统.

二、产出与消费的同步增长

考虑如下广义动态离散时间系统：

$$E\boldsymbol{x}(t+1)=A\boldsymbol{x}(t)+B\boldsymbol{u}(t). \tag{5}$$

设存在 β 使 $(\beta E-A)^{-1}$ 存在. 记：$\hat{E}=(\beta E-A)^{-1}E$，$\hat{A}=(\beta E-A)^{-1}A$，$\hat{B}=(\beta E-A)^{-1}B$，$\hat{E}$ 的 Drazin 逆为 $\hat{E}^D$. 当 $\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{d}(1+\alpha)^t=\boldsymbol{d}\eta^t$，$\boldsymbol{d}$ 为常向量，式(5)解为：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(t)=&(\hat{E}^D\hat{A})^t\hat{E}\hat{E}^D\boldsymbol{x}(0)+\hat{E}^D(I-\hat{E}^D\hat{A}\eta^{-1})^{-1}\hat{B}\boldsymbol{d}\eta^{t-1}\\&-\hat{E}^D(I-\hat{E}^D\hat{A}\eta^{-1})^{-1}(\hat{E}^D\hat{A})^t\hat{B}\boldsymbol{d}\eta^{-1}-(I-\hat{E}\hat{E}^D)\sum_{i=0}^{k-1}(\hat{E}\hat{A}^D)^i\hat{A}^D\hat{B}\boldsymbol{u}(t+i),\end{aligned}$$

本文于1987年5月11日收到.

式中，$k=\mathrm{Ind}(\hat{E})$. 从上式可知，若选择 $\boldsymbol{x}(0)$ 恰好使得：

$$(\hat{E}^D\hat{A})^t\hat{E}\hat{E}^D\boldsymbol{x}(0)-\hat{E}^D(I-\hat{E}^D\hat{A}\eta^{-1})^{-1}(\hat{E}^D\hat{A})^t\hat{B}\boldsymbol{d}\eta^{-1}=\boldsymbol{0}, \tag{6}$$

则 $\boldsymbol{x}(t)$ 与 $\boldsymbol{u}(t)$ 有相同增长率. 由式(6)可以得到 $\boldsymbol{u}(t)$ 和 $\boldsymbol{x}(t)$ 同步增长条件为：

$$\boldsymbol{x}(0)=(\eta E-A)^{-1}B\boldsymbol{d},\ \text{设}\ \eta E-A\ \text{非奇异}. \tag{7}$$

可证明，当式(7)成立时，$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{x}(0)\eta^t$.

对动态投入产出模型来讲，比较式(3)和式(5)，可知产出与消费同步增长条件为：

$$\boldsymbol{x}(0)=(I-A-\alpha B)^{-1}\boldsymbol{d} \tag{8}$$

当式(8)成立时，若消费 $\boldsymbol{c}(t)=\boldsymbol{d}\eta^t$，则产出 $\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{x}(0)\eta^t$. 对列昂惕夫模型(1)可达最大实际同步增长率 α^* 有如下结论.

定义 1. 在式(8)中，若实数 α 使得对任意非负消费结构向量 $\boldsymbol{d}\geqslant\boldsymbol{0}$ 都成立 $\boldsymbol{x}(0)\geqslant\boldsymbol{0}$，则称实数 α 为经济系统的实际增长率.

定理 1. 对系统(1)，设 A 为不可分解非负阵，且它的 Perron-Frobenius（简称 P-F）根小于 1（称之为 Hawkins-Simon 条件，实际系统一般都能满足此条件），并设非负阵 $(I-A)^{-1}B$ 的 P-F 根为 λ^*，则系统(1)的最大实际增长率 $\alpha^*=1/\lambda^*$.

不难知道，当实际增长率 $\alpha=0$ 时，积累率为零，消费达最大. 当 $\alpha=\alpha^*$ 时，积累率最大，而消费为零. 因此 α 应在 0 与 α^* 之间.

类似，冯氏模型(2)的同步增长条件为：

$$\boldsymbol{x}(0)=(I+B-A_2-\eta A_1)^{-1}\boldsymbol{d}. \tag{9}$$

定理 2. 对系统(2)，设投入系数阵 A_1+A_2 与折旧剩余系数阵 B 之差 A_1+A_2-B 为非负不可分解阵（它可理解为消耗系数阵），且它的 P-F 根小于 1，并设非负阵 $(I-A_1-A_2+B)^{-1}A_1$ 的 P-F 根为 λ^*，则系统(2)最大实际增长率 $\alpha^*=1/\lambda^*$.

三、经济系统偏离按比例同步均衡增长轨道走向崩溃的可能性

若式(6)不成立，可将解表示为：

$$\boldsymbol{x}(t)=(\hat{E}^D\hat{A})^t\boldsymbol{e}+\eta^t\boldsymbol{f},\ \boldsymbol{e}\ \text{和}\ \boldsymbol{f}\ \text{为常向量}. \tag{10}$$

对系统(1)，可以证明 $\hat{B}^D\hat{R}$ 存在唯一的正根 $s^*=\alpha^*+1$，α^* 为最大实际增长率，以及相应正特征向量. 由于一般取 $\eta=1+\alpha<1+\alpha^*=s^*$，则从式(10)，当 t 足够大时，$\hat{E}^D\hat{A}$ 的最大模特征根 $s^{\max}$ 将起主导作用. 当 $s^{\max}$ 为单实根时，易证 $\boldsymbol{x}(t)$ 趋于 $(s^{\max})^t\boldsymbol{h}$，$\boldsymbol{h}$ 是相应于 $s^{\max}$ 的特征向量. 若 $\boldsymbol{h}$ 不是非负向量，则意味经济系统导致崩溃，故有如下结论.

定理 3. 对系统(1)，条件同定理 1. 若矩阵 $\hat{B}^D\hat{R}$ 的最大模特征根 $s^{\max}\neq s^*=1+\alpha^*$，且系统初始条件不满足式(8)，则当消费向量 $\boldsymbol{c}(t)=\boldsymbol{d}\eta^t=\boldsymbol{d}(1+\alpha)^t$ 时，经济系统不调整必走向崩溃.

定理 4. 对系统(2)，条件同定理 2. 若矩阵 $\hat{A}_1^D\hat{R}_1$ 的最大模特征根 $s^{\max}\neq s^*=1+\alpha^*$，且系统初始条件不满足式(9)，则当消费向量 $\boldsymbol{c}(t)=\boldsymbol{d}\eta^t=\boldsymbol{d}(1+\alpha)^t$ 时，经济系统不调整必走向崩溃.

四、结束语

产出与消费同步增长轨道又称“冯·纽曼射径”或“快车道”(Turnpike, 又译“大道”). 由本文知,“快车道”并非“大道”,它是一条无宽度直线. 一旦经济结构偏离均衡增长轨道,又不进行调整,一般情况下将导致经济系统崩溃.

参 考 文 献

[1] 王朝珠,戴立意,广义动态系统,控制理论与应用,1986年3月.
[2] 张金水,经济控制论,清华大学出版社,1988年.

THE APPLICATIONS OF GENERALIZED SYSTEM THEORY TO NATIONAL ECONOMIC PLANNING

ZHANG JINSHUI
(*Tsinghua University*)

Key words: Economic Control Theory, Generalized Dynamn System, Economic Planning