

平行倒立摆的微型计算机控制

张凤登 何介圭 钱维铁

(上海机械学院)

摘 要

本文利用现代控制理论对一种特殊形式的倒立摆系统——平行倒立摆系统，进行了细致的研究，成功地实现了这一严重不稳定系统的计算机稳定控制，并取得了良好的效果。该成果为杰出的现代控制理论实验工具——倒立摆实验系统的研究，提供了新的内容。

关键词：平行倒立摆，控制器，观测器。

一、前 言

从过去发表的文献看，对于倒立摆的研究已经经历了一个很长的过程，但多集中在单级和垂直形式的两级倒立摆的控制上^[1,2]。对于平行倒立摆的控制，文献[3]曾用复杂的方式做了探讨。本文以极其简单易行的措施，实现它的稳定控制，由多种方法设计的控制器都得到了成功的使用。

二、平行倒立摆系统的建模和开环特性分析

平行倒立摆系统的组成如图1所示，两根铝制摆杆只能在铅垂平面上做相对于小车的摆动或随小车平行移动。为了推导数学模型方便，忽略了系统中的一些次要因素，做了如下四种假设：1)每根摆杆都是刚体，且前后位置无变动；2)小车的驱动力直接加在小车上，大小正比于功率放大器的输入，且无延迟；3)皮带长度无变化，与皮带轮之间无相对滑动；4)小车运行所受的摩擦力正比于其运行速度，两摆杆旋转时的摩擦力矩正比于各自相对于小车的角速度。

根据上述假设，应用拉格朗日方程，可推得系统的数学模型。表1对公式中出现的符号作了定义。

$$K_1 \ddot{q}_0 = K_2 \dot{q}_0 + K_3 + K_4 u, \quad (1)$$

式中，

$[K_1 | K_2 | K_3 | K_4]$

$$= \begin{bmatrix} M + m_1 + m_2 & m_1 l_1 \cos \theta_1 & m_2 l_2 \cos \theta_2 & -F & m_1 l_1 \sin \theta_1 \cdot \dot{\theta}_1 & m_2 l_2 \sin \theta_2 \cdot \dot{\theta}_2 & 0 & a \\ m_1 l_1 \cos \theta_1 & J_1 + m_1 l_1^2 & 0 & 0 & -c_1 & 0 & m_1 l_1 g \sin \theta_1 & 0 \\ m_2 l_2 \cos \theta_2 & 0 & J_2 + m_2 l_2^2 & 0 & 0 & -c_2 & m_2 l_2 g \sin \theta_2 & 0 \end{bmatrix}.$$

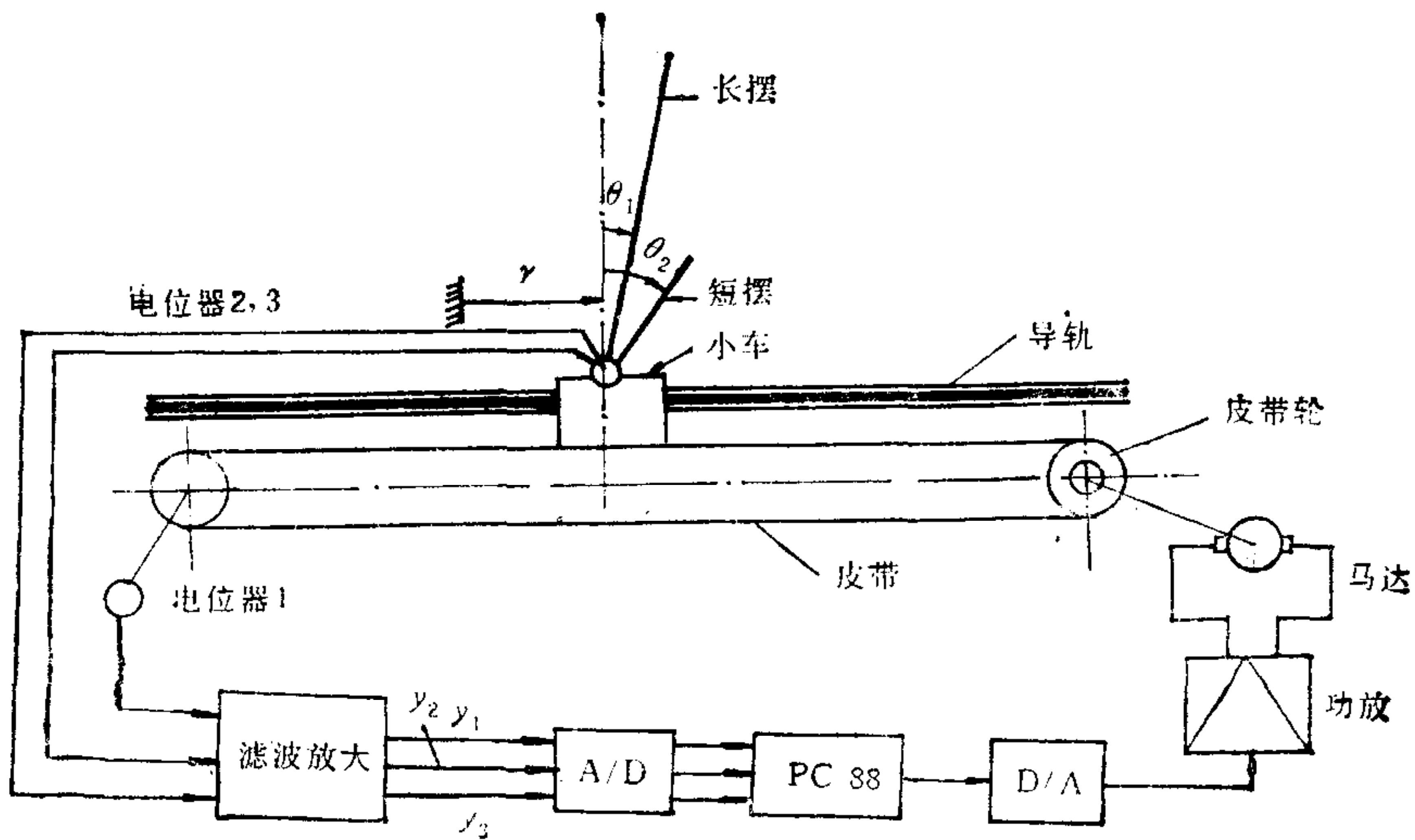


图1 平行摆微机控制系统

若选择系统的状态变量为 $x = [r \ \theta_1 \ \theta_2 \ \dot{r} \ \dot{\theta}_1 \ \dot{\theta}_2]^T$ ，在不稳定平衡点 $x = 0$ 处线性化，代入数据得到系统的状态方程：

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$= \begin{bmatrix} O_3 & I_3 \\ \begin{bmatrix} 0 & -1.645 & -0.542 \\ 0 & 16.731 & 0.792 \\ 0 & 9.255 & 58.191 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -7.859 & 7.28 \times 10^{-3} & 5.36 \times 10^{-3} \\ 11.490 & -7.86 \times 10^{-2} & -7.85 \times 10^{-3} \\ 44.223 & -4.34 \times 10^{-2} & -0.5768 \end{bmatrix} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 3.329 \\ -4.867 \\ -18.73 \end{bmatrix} u, \tag{2a}$$

$$y = Cx = [I_3 \ | \ O_3]x. \tag{2b}$$

开环系统的特征值为 $[0, -9.33, 3.85, -6.75, -3.53, 7.25]$ ，系统严重不稳定，但可控、可观测，且可观测性指数为 2。

表1 平行摆系统符号意义及参数值

符号	意义	数值	符号	意义	数值
m_1	长摆质量	0.381 kg	c_2	短摆与小车间等效摩擦系数	$1.52 \times 10^{-3} \text{ Nms}$
m_2	短摆质量	0.1181 kg	g	重力加速度	9.8 m/s^2
M	小车等效质量	1.449 kg	a	功放系数	5.3 N/V
l_1	长摆质心——轴心距	0.48 m	F	小车机械摩擦系数	12.51 Nms
l_2	短摆质心——轴心距	0.1325 m	r	小车位移	
J_1	长短转动惯量	$3.731 \times 10^{-2} \text{ kgm}^2$	θ_1	长摆角位移	
J_2	短摆转动惯量	$7.07 \times 10^{-4} \text{ kgm}^2$	θ_2	短摆角位移	
c_1	长摆与小车间等效摩擦系数	$8.421 \times 10^{-3} \text{ Nms}$	q_0	向量 $[r \ \theta_1 \ \theta_2]^T$	

平行摆系统中，为使线性化方程 (2) 有效，大致有：

$$\max |\theta_1| < 0.05 \text{ rad}, \max |\theta_2| < 0.08 \text{ rad}, \max |r| < 0.5 \text{ m}, \max |u| < 3 \text{ V}.$$

三、控制器设计

由于系统是能控的,利用状态反馈 $u = Kx$,可以使不稳定系统达到稳定. 这里的反馈阵 K 的选择方法有很多种,下面给出两种实验成功的方法的试验数据.

1. 极点配置法^[4]

选择闭环系统的极点为 $[-1 \pm 0.5i, -5 \pm i, -15 \pm 12i]$, 相应的反馈矩阵 $K = -[4.56, 166.02, -92.05, 7.12, 43.15, -11.73]$.

2. 线性最优调节器

假设平行摆系统为一线性定常系统,使二次型性能指标: $J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + R u^2) dt$ 极小的一组 Q, R 为: $Q = \text{diag} [1, 50, 50, 0, 0, 0]$, $R = 0.1$, 此时最优状态反馈矩阵 $K = -[3.211, 152.42, -90.468, 4.612, 39.62, -11.31]$.

四、观测器设计

基于系统的能观测性,笔者尝试采用了两种不同的观测器构造方式来产生(2)式中未知的状态.

1. 降阶观测器设计^[4]

利用 Gopinath 提出的方法,(2)式的降阶观测器为:

$$\dot{z} = Fz + Gy + Hu, \quad (3a)$$

$$\hat{x}_{4-6} = z - Ly, \quad (3b)$$

式中, \hat{x}_{4-6} 为 $[\dot{r} \ \theta_1 \ \theta_2]^T$ 的观测值. 本文中使用的参数为:

$$L = \begin{bmatrix} -3.826 & -1.268 & -4.865 \\ -1.268 & -10.75 & -3.176 \\ -4.865 & -3.176 & -21.71 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} -11.685 & -1.261 & -4.859 \\ 10.221 & -10.835 & -3.184 \\ 39.358 & -3.219 & -22.285 \end{bmatrix},$$

$$G = \begin{bmatrix} -69.961 & -45.472 & -166.9 \\ 9.871 & -96.975 & -53.01 \\ 38.097 & -46.225 & -244.3 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 3.329 \\ -4.867 \\ -18.73 \end{bmatrix},$$

F 的极点为 $[-17.4 \pm 13.1i, -10]$.

2. 线性函数观测器设计^[4]

既然(3)式给出的估计变量仅被用来给出控制量 $u = Kx$ 这一状态变量的线性组合,采用 Ramijidasgupta 提出的线性函数观测器构造方法,可以避免构造出所有的状态变量. 据此,对于(2)式所示系统,存在一个稳定系统:

$$\dot{z} = -10z + [-348.473, 3385.62, -439.189]y - 34.3035u, \quad (4a)$$

$$\omega = z + [31.635, -546.05, 197.286]y. \quad (4b)$$

当 $\lim_{t \rightarrow \infty} \omega = Kx = u$. 采用这一观测器,在计算机控制中,可以减少运算时间,缩短采样周期,比使用降阶观测器,对实际系统的控制效果更加理想.

五、控制的实现和实验

本文应用 PC-88 微机、12 位 A/D、D/A 转换器等实现了由观测器和线性反馈组成的控制器,整个系统的采样、运算及控制程序都是采用汇编语言编写的。数值计算中,主要采用了浮点数运算,保证了运算精度。另外,为获得中断控制器,利用软件的方法,对微机内部芯片的工作方式进行了合理的改动,没有改变或扩展硬件。

在实验过程中,为了较小依赖于设计经验,减少试验次数,充分利用了数字仿真措施。图 2 表示系统有一个初态时的实际响应曲线和线性模型的理论响应曲线;图 3 和图 4 分

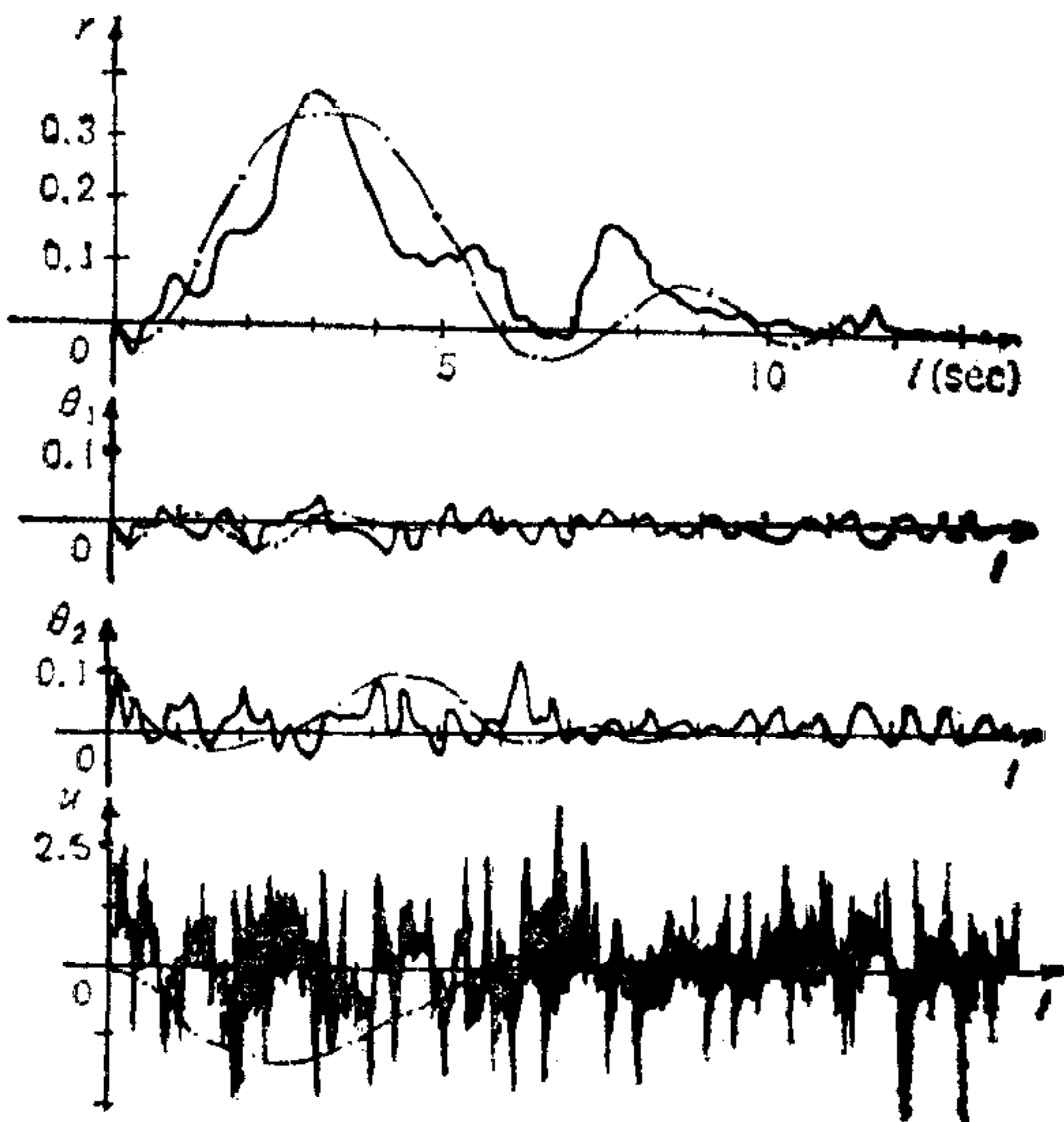


图 2

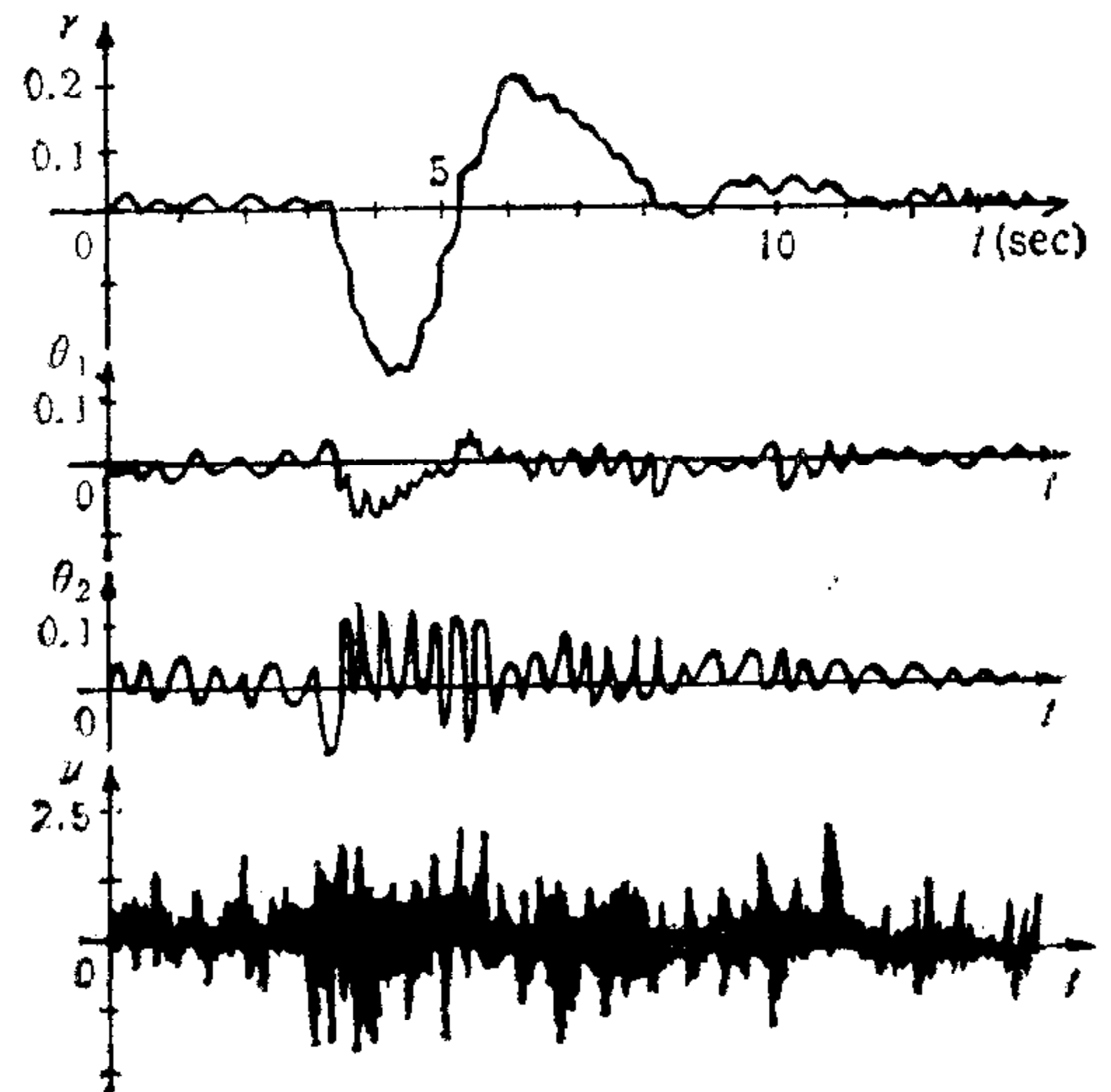


图 3

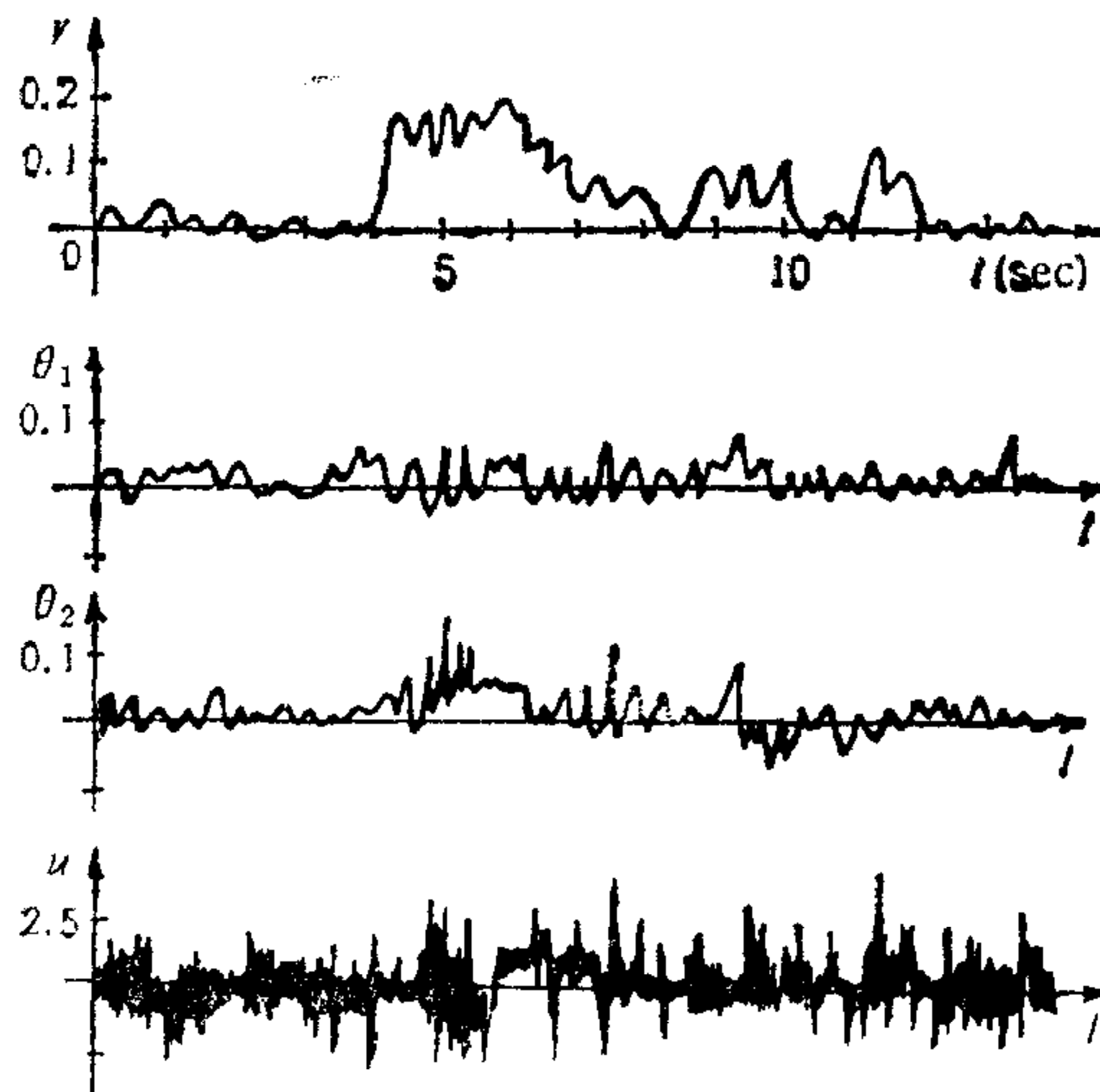


图 4

别表示对长摆和短摆顶端加一冲击扰动时的实际响应曲线。上述图线都是采用最优反馈和降阶观测器时做出的,此时的采样周期为 4 ms;当采用函数观测器时,采样周期降为 2 ms,且系统的稳定性增强了。实际系统的响应曲线是由微机实时采样记录下来的。结果表明,平行摆在不稳定平衡点处,达到稳定平衡。

参 考 文 献

- [1] Mori, S., Nishihara, H., Furuta, K., Control of Unstable Mechanical System-Control of Pendulum, *Int. J. Cont.*, 23(1976), No. 5, 673—692.
- [2] Furuta, K., Okutani, T., Sone, H., Computer Control of a Double Inverted Pendulum, *Computer and Elec. Eng.*, 5(1978), No. 1, 67—84.
- [3] Balchen, J. G., Handlykken, M., and Tysso, A., The Need For Better Laboratory Experiments in Control Engineering Education, The 8th IFAC Congress, Kyoto, Japan, Aug. 24—28, (1981).
- [4] Chen, C. T., *Linear System Theory and Design*, CBS College Publishing (1984).

THE CONTROL OF A PARALLEL INVERTED PENDULUM BY MICROCOMPUTER

ZHANG FENGDENG HE JIEGUI QIAN WEITIE

(Shanghai Institute of Mechanical Engineering)

ABSTRACT

In this paper, modern control theory is applied to the control of a parallel inverted pendulum system. This seriously unstable system is successfully stabilized by using a microcomputer. The result is satisfactory and provides new concept for the research on pendulum laboratory system.

Key words ——Parallel pendulum; controller; observer.