第15卷 第5期 自动化学报 Vol. 15, No. 5
1989年9月 ACTA AUTOMATICA SINICA Sept., 1989

离散插值曲面*

许志明
(中国科学院计算技术研究所)

摘 要

散乱插值在实际应用中有重要作用。本文通过 Voronoi 图构造了一张具有点插值和法向插值的曲面。本文的方法优于目前散乱插值中常用的 Shepard 方法和三角剖分方法。本文还给出了一种求离散插值曲面的算法,算法的时间复杂性为 $O(N\log N)$, N 为散乱点数。

关键词: 散乱插值, Voronoi 图,计算几何.

一、引 言

曲线曲面是计算机图形学、计算机辅助设计等领域中的重要对象。快速生成曲线曲面是目前广泛引起人们重视的一个研究方向。文[3,4,5]中讨论了各种各样的生成曲面的离散方法,这些方法是有效和实用的,但缺点是所产生的曲面不具插值性。

由于数据的不规则性,要找一张插值曲面十分不容易,著名的 Shepard 方法给出了一种这样的曲面。但 Shepard 曲面的性质较差,对于具有较好性质的数据也不容得到一张满意的插值曲面,另一种方法是先把散乱点进行三角剖分,然后在每个三角片上构造一块曲面使之与相邻的曲面具有一定的连续性。这种方法的缺点是曲面片之间不容易达到所需要的连续性。

本文提出了一种新的生成曲面的方法,其特点是先构造散乱点集的 Voronoi 图,然后在此基础上构造控制网,再对控制网进行离散变换,最后得到具有几何 C^1 连续的插值曲面。

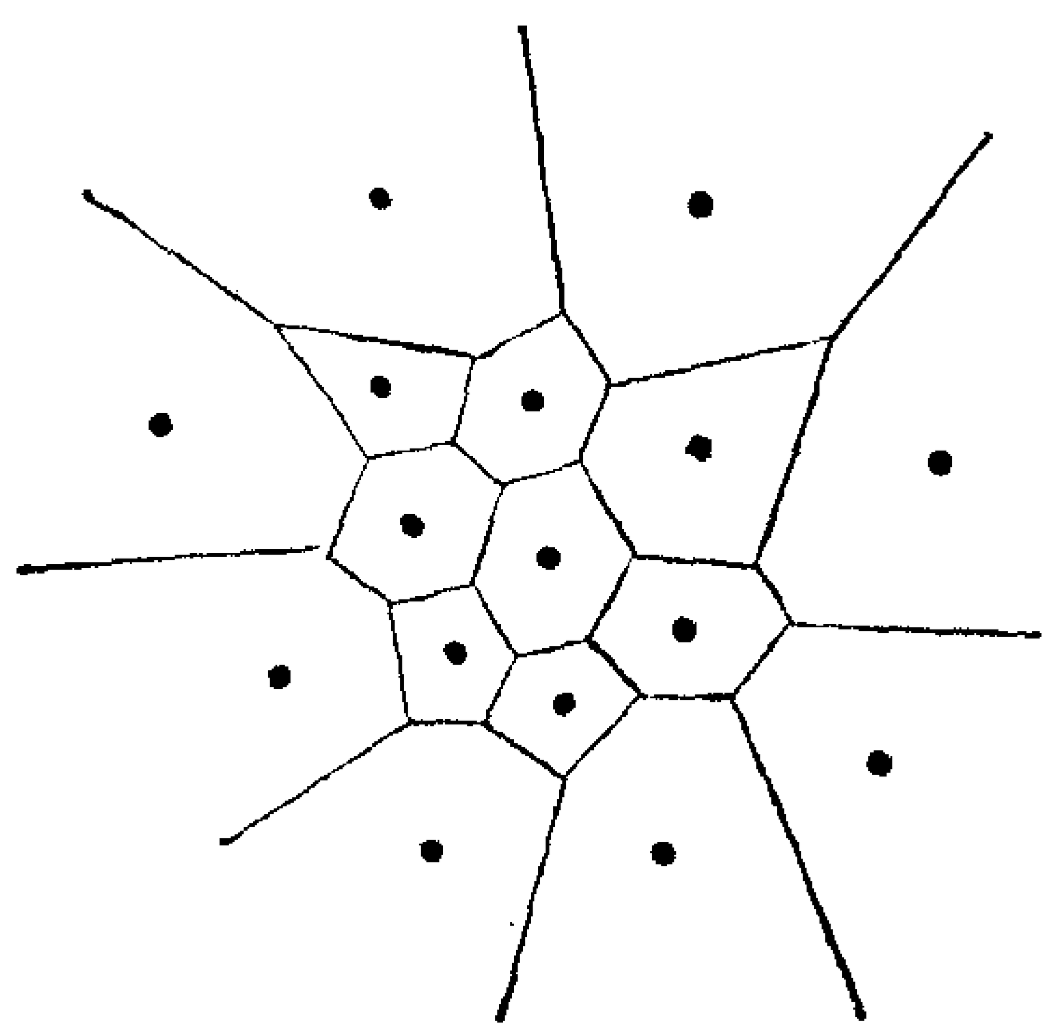

图1 Voronoi 图

二、Voronoi 图

Voronoi 图是计算几何中的一个重要研究对象,有着许多重要的应用[1,2],目前已经发现了许多问题都可通过引入 Voronoi 图来解决。本文可以说是 Voronoi 图的又一重要应用。

定义 1. 平面上N点 $\{P_1, \cdots, P_N\}$, 点 P_i 的 Voronoi 多边形 $V(i)$ 由下式定义:

本文于1987年11月16日收到.
* 本文得到国家自然科学基金资助.

$$V(i)=\bigcap_{j\neq i}H(P_i,P_j),$$

其中 $H(P_i,P_j)$ 是直线 P_iP_j 的垂直平分线所划分的 P_i 侧的半平面.

定义 2. 设平面N点$\{P_1,\cdots,P_i,\cdots,P_N\}$,由这$N$点的 Voronoi 多边形 $V(i)$ 划分平面为N个凸集,由这N个凸集组成的图形称为 Voronoi 图.

最简单的求 Voronoi 图的算法的时间复杂性为 $O(N\log N)$, N 为散乱点数.

三、产生曲面的离散方法

产生曲面的离散方法是目前广泛引起人们兴趣的一种方法. Catmull 及 Sabin[3] 等分别讨论了这个问题,提出了递归分割曲面方法. 吕伟给出了一种生成离散曲面的方法. 这里介绍吕伟的方法.

与物体的表示一样,离散曲面的表示分为两个部分,即拓扑关系和几何信息. 前者表示离散曲面中几何点之间的关系,后者确定了离散曲面的几何信息, 如几何点的坐标等. 离散曲面的构造过程即为几何点加密的过程. 因此离散曲面的建立取决于两个因素, 即新网格中几何点的产生和新拓扑关系的建立.

1. 新几何点的构造方法

设 $f_n=\{P_i\}_{i=1}^{n}$ 为拓扑结构G中的一个面,产生的新点为

$$P_i^{(1)}=P_i+U_{i,l}(P_{i-1}-P_i)+U_{i,r}(P_{i+1}-P_i),$$

其中, $P_0=P_n$, $P_{n+1}=P_1$, 参数 $U_{i,l}$, $U_{i,r}$ 由用户控制,且 $0<U_{i,l}+U_{i,r}<1$.

2. 新拓扑结构 $G^{(1)}$ 的构造方法

$G^{(1)}$ 中的面可分为三类:

a) NVF (新点面)——G 中一个顶点周围新几何点连接而成的面;

b) NEF (新边面)——G 中一个边周围四个新几何点连接而成的四边形面;

c) NFF (新面面)——G 中一个面中所有新几何点按一定顺序连接而成的面.

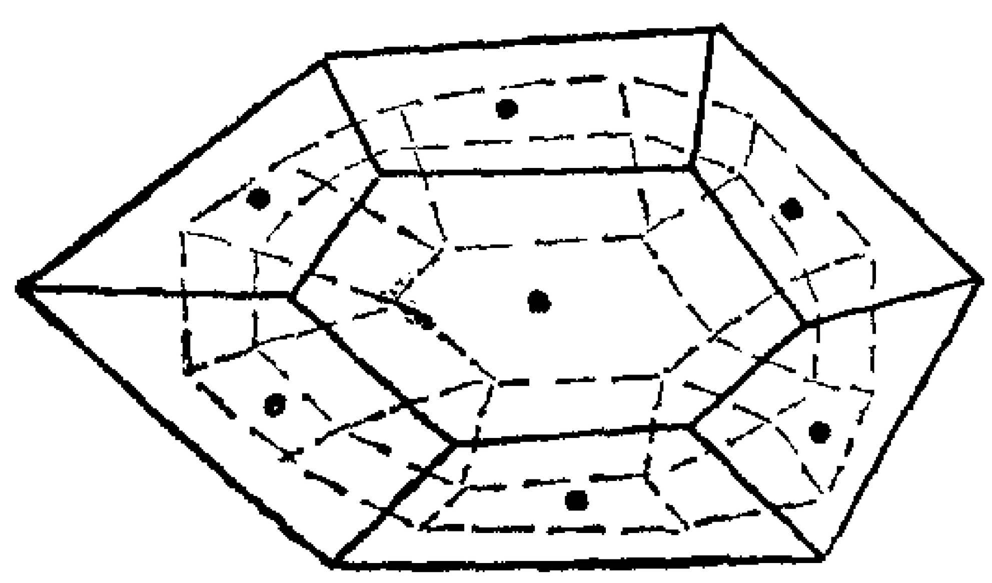

图 2

所有这三类拓扑关系构成拓扑关系 $G^{(1)}$, 同样可在 $G^{(1)}$ 的基础上用同样方法构造 $G^{(2)}$, $G^{(3)}$, $\cdots$, 称这种过程的极限曲面为 C-G 曲面,此即吕伟方法所产生的离散曲面. 若所有参数 $U_{i,l}$, $U_{i,r}$ 均为常数 c, 则记 C-G 曲面为 $S(G,C)$. 关于 $S(G,C)$ 有下面的结果.

定理 1. 对任意拓扑网格 G, 若:

a) G 中非四边形面均为平面多边形,

b) G 中任一顶点最多只与四边相关; 则 C-G 曲面 $S(G,C)$ 为 GC^1 连续的充要条件为:

$$c\in\left(0,1\Big/\left(4\sin^2\frac{\pi}{n}+1\right)\right),$$

其中，$n = \min\{N(f), D(V) | f \in G, V \in G$，且$V$为$G$的非边界点$\}$，$N(f)$ 为 f 面的边数，$D(V)$ 为G中顶点V的相关边数。

定理的证明及 GC^1 的定义见文[3]。

四、离散插值曲面

设 $P = \{P_1, \cdots, P_N\}$ 为平面上N个点，$V(P)$ 为P的 Voronoi 图。对 $V(P)$ 中的无界 Voronoi 多边形增加一条边，使之成为有界凸多边形，由此组成一个有界凸多边形的集合 $BV(P)$。$BV(P)$ 中的每个凸多边形中包含P中的一点，且P中每一点也对应于 $BV(P)$ 中唯一的一个凸多边形。按照吕伟方法构造新的拓扑结构，使每个新面面上包含此面中P中的点。

现在讨论的是二维数据，而应用中往往要处理三维数据。下面研究离散插值曲面的构造。

设空间点集 $S = \{s_1, \cdots, s_n\}$，把S投影到平面上就得平面点集 $P = \{p_1, \cdots, p_n\}$，其中：$s_i = (p_i, z_i)$，$(i = 1, \cdots, n)$。对于P，可以按照上面的方法建立平面上的有界凸多边形网 $BV(P)$。现在考虑每一点 P_i 所对应的新面面 $V(P_i)$，$V(P_i)$ 有 k_i 个顶点 $V_{i,1}, V_{i,2}, \cdots, V_{i,k_i}$，设 $PL(s_i)$ 为过 s_i 且法向为 n_i 的平面，用过 $V_{i,j}(j = 1, \cdots, k_i)$ 平行于z轴的直线与 $PL(s_i)$ 求交得交点 $s_{i,j}$，所有点 s_{ij} 所成之集 $\{s_{ij} | i = 1, \cdots, n; j = 1, \cdots, k_i\}$ 按照 $BV(P)$ 中的拓扑关系构成三维空间中的一个拓扑网 $G^{(1)}(S)$，其中包含s中点 $s_i(i = 1, \cdots, n)$ 的面在构造新几何点时要使此面的新面面仍然包含 s_i。

定理 2. 设 $S = \{s_1, \cdots, s_n\}$ 为空间点集，$s_i = (p_i, z_i)$，$(i = 1, \cdots, n)$，$p_1, \cdots, p_n$ 为平面上相应的点。对每点 s_i 指定法向 n_i，则可求得一张曲面 C，使得C通过s_i且在s_i处具法向 $n_i(i = 1, \cdots, n)$。

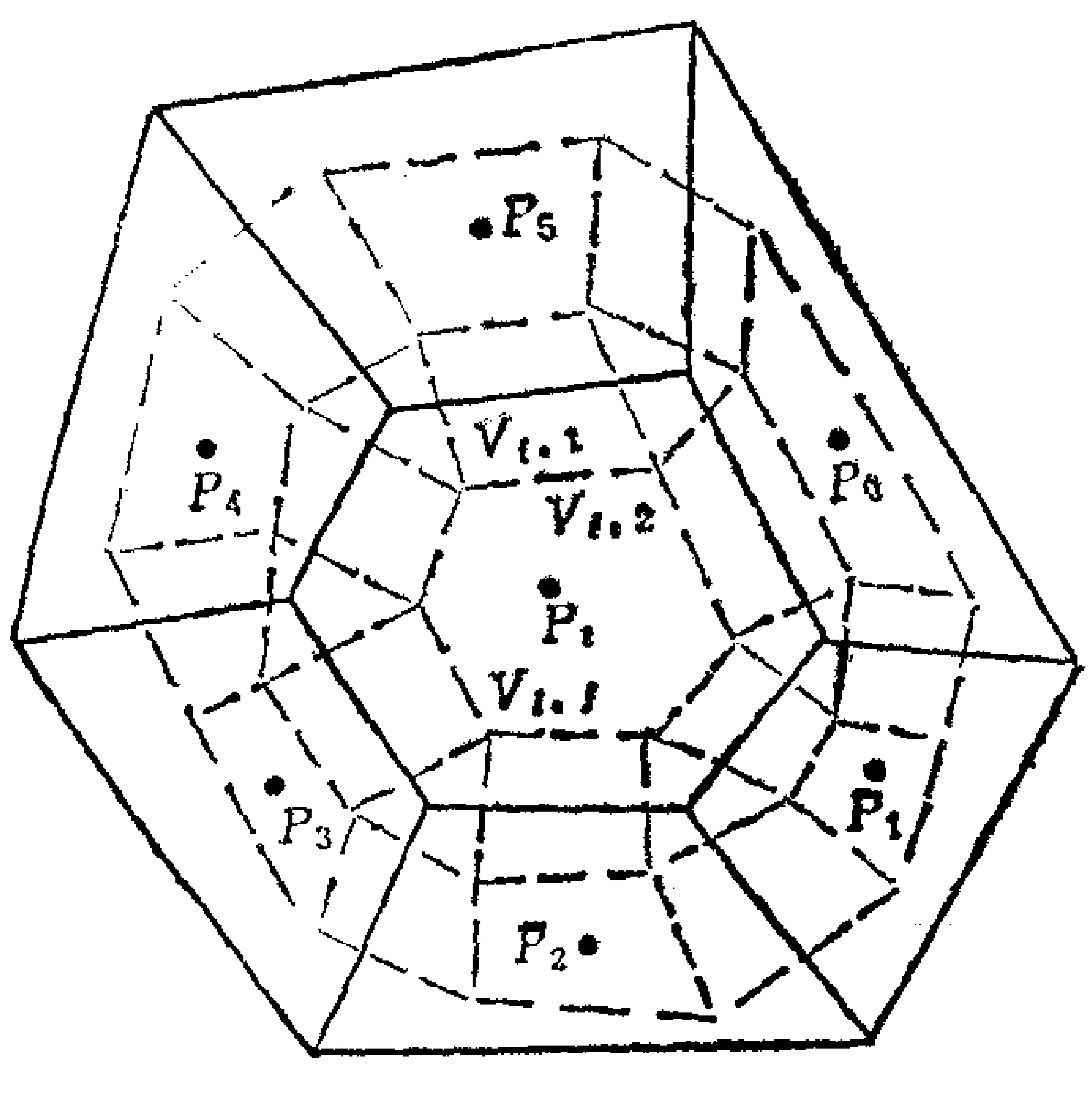

图 3

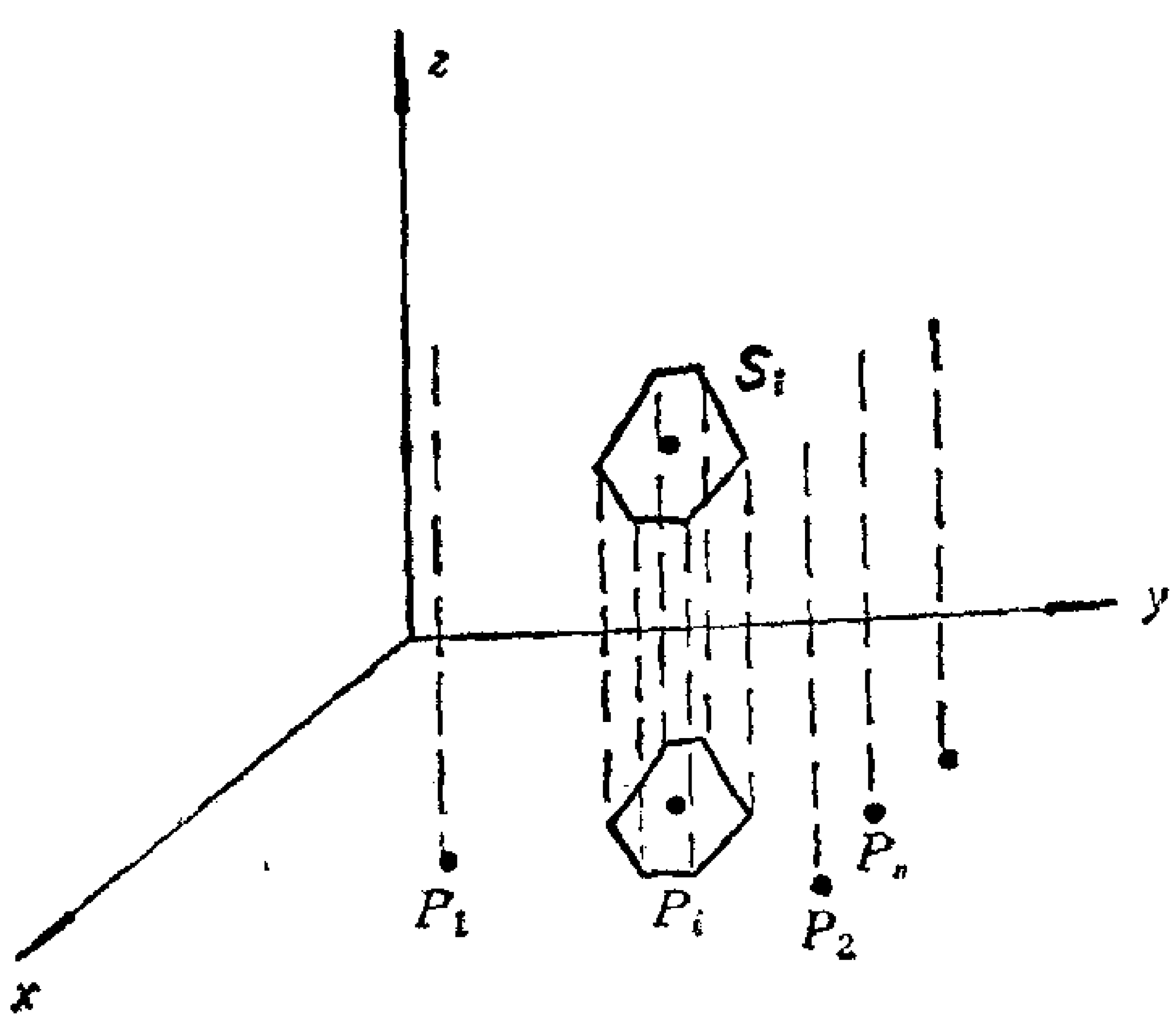

图 4

证明. 由下面的构造知，可由 $G^{(1)}(s)$, $G^{(2)}(s)$, $\cdots$, $G^{(n)}(s)$, $\cdots$，产生一张极限曲面 C，C 过 S 上所有点. 由新几何点的构造，平面多边形的新几何点仍在原平面上，从而包含 s_i 的面总在平面 $PL(s_i)$ 上，因此 C 在 s_i 处具法向 n_i.

下面是构造离散插值曲面的算法：

算法 1. 求离散插值曲面 C

输入：空间点集 $S=\{s_1, \cdots, s_n\}$ 及每点法向之集 $N=\{n_1, \cdots, n_n\}$，切割参数 μ，切割次数 m.

输出：由多边形集合 $PLG=\{PLG1, PLG2, \cdots, PLG_n\}$ 逼近的离散插值曲面 C.

步骤：

1）把 S 投影到平面 XY 上，得平面点集 $P=\{p_1, \cdots, p_n\}$.

2）构造 P 的有界 Voronoi 图 $BV(P)$.

3）在 $BV(P)$ 上构造新的几何点及新拓扑关系 $BV^{(1)}(P)$.

4）对每个 s_i，用过 s_i 以 n_i 为法向的平面与过包含 P_i 的多边形中的新几何点且垂直于 XY 平面的直线求交，得空间新几何点. 这些空间新几何点按 $BV^{(1)}(P)$ 上的拓扑关系构成空间控制网 $G^{(1)}(S, \mu)$.

5）$I \Leftarrow 1$.

6）对 $G^{(1)}$ 进行离散变换，生成新的拓扑结构 $G^{(2)}$，$I \Leftarrow I+1$.

7）若 $I<m$，则用 $G^{(2)}$ 代替 $G^{(1)}$ 转入第 6 步.

8）输出 $G^{(2)}$，算法结束.

定理 3. 算法 1 求得离散插值曲面 C，算法的计算复杂性为 $O(N\log N)$，其中 N 为散乱点数.

衷心感谢刘慎权导师的指导.

参 考 文 献

[1] Preparata, F.P., Shamos, M.I., Computational Geometry, Springer-Verlag, 1985.
[2] Lee, D.T., Preparata, F.P., Computational Geometry——A Surrey, *IEEE Trans. Computers*, C-**33**(1984), 1072—1101.
[3] 吕伟、金通洸，任意拓扑网格上的切割磨光曲面及其性质，1986 年全国计算机几何与样条函数会议论文.
[4] 金通洸、王国瑾，曲面造型的切割磨光法，高校应用数学学报，1988, No. 1,5—16.
[5] 许志明，三角形拓扑网格上曲面造型的切割磨光法，计算机学报，**9**(1988),6,178—185.

DISCRETE INTERPOLATION SURFACE

Xu Zhiming
(Institute of Computing Technology, Academia Sinica)

Abstract

Scattered interpolation plays an important role in practical applications. In this paper, a method to construct a surface with point interpolation and normal interpolation is presented. An algorithm to construct the discrete interpolation is also presented, which has O(Nlog N) time complexity, where N is the number of scattered points.

Key words ——Scattered interpolation; Voronoi diagram; computational geometry.