

具有一般交互矩阵的多变量系统的 随机直接自适应控制¹⁾

柴天佑

(东北工学院)

摘 要

本文使用系统的交互矩阵,提出了基于广义最小方差控制律的一般随机多变量系统的直接自适应控制算法,并对该算法进行了稳定性和收敛性分析.该算法即使用于非最小相位系统仍然具有全局收敛特性.

关键词——交互矩阵,广义最小方差,自适应控制.

一、前 言

文献[1]指出,多变量系统的传输延时与系统的交互矩阵密切相关.基于最小方差和广义最小方差策略的多变量自适应算法^[2,3]只适于交互矩阵为标量单位阵的系统.文献[4]和文献[5]的方案适合交互矩阵为对角阵的系统.文献[6]提出可以控制具有一般交互矩阵的随机多变量系统的算法,但要求系统是最小相位的.此外,多变量随机自适应控制需要解决的另一问题是建立稳定性和收敛性分析.文献[4,7-9]对某些特殊多变量系统的随机自适应算法建立起全局收敛性分析.然而,至今对一般随机多变量系统的自适应算法还没有全局收敛性分析.

二、广义最小方差控制器

设线性多变量离散系统用 ARMAX 模型

$$A(z^{-1})\mathbf{y}(t) = B(z^{-1})\mathbf{u}(t) + d + C(z^{-1})\xi(t) \quad (2.1)$$

描述.其中 \mathbf{u} 和 \mathbf{y} 是 n 维输入输出向量, d 是零输入时系统产生的 n 维稳态输出常数向量, $\{\xi(t)\}$ 为系统的驱动噪声,满足下列假设条件:

本文于1987年3月4日收到.

1) 国家自然科学基金资助项目.

$$E(\xi(t)/F_{t-1}) = 0, \text{ a.s.}, \sup_t E(\|\xi(t)\|^2/F_{t-1}) < \infty, \text{ a.s.},$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \|\xi(t)\|^2 < \infty, \text{ a.s.} \quad (2.2)$$

式中 F_t 表示非降子 σ -代数族; $A(z^{-1}), B(z^{-1}), C(z^{-1})$ 是 z^{-1} 的矩阵多项式;

$$A(0) = I, B(0) = 0, \det C(z^{-1})$$

是稳定的.

假设 A , 传递矩阵函数 $A(z^{-1})^{-1}B(z^{-1})$ 严真, 秩为 n . 在上述假设下, 一定存在交互矩阵 $T(z)$ 满足

$$\lim_{z \rightarrow \infty} T(z)A(z^{-1})^{-1}B(z^{-1}) = K, K \text{ 为非奇异}. \quad (2.3)$$

式中 $T(z)$ 是 z 的下三角矩阵多项式^[1]. 设 k 为 $T(z)$ 中多项式的最高阶次. 引入下列性能指标:

$$J = E(\|\mathbf{e}(t+k)\|^2/F_t) = E(\|P(z^{-1})T(z)\mathbf{y}(t) - R(z^{-1})\mathbf{w}(t) + Q(z^{-1})\mathbf{u}(t)\|^2/F_t). \quad (2.4)$$

式中 \mathbf{w} 是 n 维已知有界参考输入向量, P, R, Q 是 z^{-1} 的加权矩阵多项式, $P(0) = I$.

引理 2.1. $\phi(t+k) = P(z^{-1})T(z)\mathbf{y}(t)$ 的最优预报 $\phi^*(t+k/t)$ 为

$$\tilde{C}(z^{-1})\phi^*(t+k/t) = \tilde{G}(z^{-1})\mathbf{y}(t) + \tilde{H}(z^{-1})\mathbf{u}(t) + \tilde{F}(1)d, \quad (2.5)$$

式中 $\tilde{C}, \tilde{G}, \tilde{H}$ 为 z^{-1} 的矩阵多项式, \tilde{H}_0 非奇异.

证明. 引入下列等式

$$C(z^{-1})\bar{A}(z^{-1}) = A(z^{-1})\bar{C}(z^{-1}), \det \bar{C}(z^{-1}) = \det C(z^{-1}), \bar{C}(0) = C(0). \quad (2.6)$$

$$P(z^{-1})\bar{T}(z^{-1})\bar{C}(z^{-1}) = F(z^{-1})\bar{A}(z^{-1}) + z^{-k}G(z^{-1}). \quad (2.7)$$

式中 $\bar{T}(z^{-1}) = z^{-k}T(z)$, $F(z^{-1}) = F_0 + F_1z^{-1} + \dots + F_{k-1}z^{-k+1}$,

$$\tilde{C}(z^{-1})F(z^{-1}) = \tilde{F}(z^{-1})C(z^{-1}), \det \tilde{C}(z^{-1}) = \det C(z^{-1}), \tilde{C}(0) = C(0) = I. \quad (2.8)$$

$$\tilde{C}(z^{-1})G(z^{-1}) = \tilde{G}(z^{-1})\bar{C}(z^{-1}). \quad (2.9)$$

用 $\bar{C}(z^{-1})^{-1}$ 右乘 (2.7) 式两边并使用 (2.6), (2.8) 和 (2.9) 式得

$$\tilde{C}(z^{-1})P(z^{-1})\bar{T}(z^{-1}) = \tilde{F}(z^{-1})A(z^{-1}) + z^{-k}\tilde{G}(z^{-1}). \quad (2.10)$$

用 $\tilde{F}(z^{-1})$ 左乘 (2.1) 式两边并利用 (2.8) 和 (2.10) 式得

$$\tilde{C}(z^{-1})(P(z^{-1})T(z)\mathbf{y}(t) - F(z^{-1})\xi(t+k)) = \tilde{G}(z^{-1})\mathbf{y}(t) + \tilde{H}(z^{-1})\mathbf{u}(t) + \tilde{F}(1)d. \quad (2.11)$$

其中 $\tilde{H}(z^{-1}) = z^k\tilde{F}(z^{-1})B(z^{-1}) = \tilde{H}_{-k+1}z^{k-1} + \dots + \tilde{H}_{-1}z + \tilde{H}_0 + \tilde{H}_1z^{-1} + \tilde{H}_nz^{-n}$. 由 (2.11) 式知 $A(z^{-1})^{-1}B(z^{-1}) = (\tilde{C}(z^{-1})P(z^{-1})T(z) - \tilde{G}(z^{-1})^{-1}\tilde{H}(z^{-1}))$, 再由 (2.3) 式可知 $\tilde{H}_i = 0 (i = -1, \dots, -k+1), \tilde{H}_0 = K$.

$$\phi^*(t+k/t) = P(z^{-1})T(z)\mathbf{y}(t) - F(z^{-1})\xi(t+k)$$

是 F_t 可测, 由假设 (2.2) 式知 $E(P(z^{-1})T(z)\mathbf{y}(t)/F_t) = \phi^*(t+k/t)$, 再由 (2.11) 式知最优预报 $\phi^*(t+k/t)$ 满足 (2.5) 式.

定理 2.1. 1) 广义最小方差控制律为

$$\phi^*(t+k/t) = R(z^{-1})\mathbf{w}(t) - Q(z^{-1})\mathbf{u}(t). \quad (2.12)$$

2) 性能指标 (2.4) 式的极小值

$$J = E(\|\mathbf{e}(t+k)\|^2/F_t) = E(\|F(z^{-1})\xi(t+k)\|^2/F_t) = \gamma^2. \quad (2.13)$$

3) 闭环系统方程为

$$(P(z^{-1})T(z) + Q(z^{-1})B(z^{-1})^{-1}A(z^{-1}))\mathbf{y}(t) = R(z^{-1})\mathbf{w}(t) + Q(1)B(1)^{-1}d + (z^k F(z^{-1}) + Q(z^{-1})B(z^{-1})^{-1}C(z^{-1}))\xi(t). \quad (2.14)$$

证明. 1), 2) 我们知道

$$\phi(t+k) = \phi^*(t+k/t) + F(z^{-1})\xi(t+k). \quad (2.15)$$

将(2.15)式代入(2.4)式, 可知控制律(2.12)式, 可使(2.4)式取得极小值, 此值为(2.13)式. 3) 由(2.5)式和(2.12)式得控制律的另一表达式, 然后从中求出 $\mathbf{u}(t)$ 代入(2.1)式得(2.14)式结论.

注 1. 从(2.14)式知 P 和 Q 的选择关系到闭环系统的稳定性. 若

$$Q(1) = 0, \quad R(z^{-1}) = P(z^{-1})T(1),$$

控制器可以消除稳态跟踪误差和偏差 d 对输出的影响.

三、直接自适应控制算法和全局收敛分析

由(2.5), (2.12) 和 (2.15) 式可得控制器参数辨识方程和控制律方程

$$P(z^{-1})\bar{T}(z^{-1})\mathbf{y}(t) = \tilde{G}(z^{-1})\mathbf{y}(t-k) + \tilde{H}(z^{-1})\mathbf{u}(t-k) - \tilde{C}^*(z^{-1})\phi^*(t/t-k) + \tilde{F}(1)d + F(z^{-1})\xi(t), \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \tilde{G}(z^{-1})\mathbf{y}(t) + \tilde{H}(z^{-1})\mathbf{u}(t) - \tilde{C}^*(z^{-1})\phi^*(t+k/t) + \tilde{F}(1)d \\ = R(z^{-1})\mathbf{w}(t) - Q(z^{-1})\mathbf{u}(t). \end{aligned} \quad (3.2)$$

式中 $\tilde{C}^*(z^{-1}) = \tilde{C}(z^{-1}) - \tilde{C}(0)$.

直接自适应算法:

$$\hat{\Theta}(t) = \hat{\Theta}(t-k) + \frac{a}{r(t-k)} X(t-k)(\phi(t)^T - X(t-k)^T \hat{\Theta}(t-k)), \quad (3.3)$$

$$r(t-k) = r(t-k-1) + X(t-k)^T X(t-k), \quad r(0) = 1, \quad (3.4)$$

$$\hat{\Theta}(t)^T X(t) = \mathbf{y}^*(t+k). \quad (3.5)$$

式中 $\hat{\Theta}(t)$ 是参数矩阵 Θ 在 t 时刻的递推估计值. 参数矩阵 Θ 和数据向量 $X(t-k)$ 为

$$\Theta = [\tilde{G}_0, \tilde{G}_1, \dots; \tilde{H}_0, \tilde{H}_1, \dots; \tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \dots; \tilde{F}(1)d]^T,$$

$$X(t-k) = [y(t-k)^T, y(t-k-1)^T, \dots; u(t-k)^T, u(t-k-1)^T, \dots; -y^*(t-1)^T, -y^*(t-2)^T, \dots; 1]^T$$

$$\mathbf{y}^*(t+k) = R(z^{-1})\mathbf{w}(t) - Q(z^{-1})\mathbf{u}(t). \quad (3.6)$$

上述自适应算法将(3.1), (3.2) 式中的 $\phi^*(t+k/t)$ 用 $\mathbf{y}^*(t+k)$ 代替.

定理 3.1. 假定 1) $T(z)$ 已知; 2) $\tilde{G}, \tilde{H}, \tilde{C}$ 的阶次的上界已知; 3) $(\tilde{C}(z^{-1}) - \frac{a}{2}I)$

严正实; 4) $\det(P\bar{T}\bar{B} + z^{-k}Q\bar{A}) \neq 0$, 当 $|z| \geq 1$, 其中 \bar{A}, \bar{B} 满足

$$B(z^{-1})\bar{A}(z^{-1}) = A(z^{-1})\bar{B}(z^{-1}), \quad \det \bar{B} = \det B.$$

算法(3.3)–(3.6)用于系统(2.1)则以概率 1 有

$$1) \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \|\mathbf{y}(t)\|^2 < \infty \text{ a.s.}, \quad \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \|\mathbf{u}(t)\|^2 < \infty \text{ a.s.}$$

$$2) \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N E(\|\mathbf{e}(t+k)\|^2 / F_t) = r^2 \text{ a. s.}$$

证明. 定义

$$\mathbf{b}(t-k) = -\tilde{\Theta}(t-k)^T X(t-k), \quad \tilde{\Theta}(t) = \hat{\Theta}(t) - \Theta. \quad (3.7)$$

$$\mathbf{z}(t-k) = \mathbf{e}(t) - F(z^{-1})\xi(t) = \mathbf{e}(t) - \mathbf{v}(t). \quad (3.8)$$

$$\mathbf{h}(t-k) = \mathbf{b}(t-k) - \frac{a+\rho}{2} \mathbf{z}(t-k), \rho: \text{小正数}. \quad (3.9)$$

由(2.11)式两边减去 $\tilde{C}(z^{-1})\mathbf{y}^*(t-k)$ 并使用(3.6), (3.7)和(3.9)式

$$\tilde{C}(z^{-1})\mathbf{z}(t) = \mathbf{b}(t), \quad (3.10)$$

$$\mathbf{h}(t) = \left[\tilde{C}(z^{-1}) - \frac{a+\rho}{2} I \right] \mathbf{z}(t). \quad (3.11)$$

定义 $V(t) = \text{tr} \tilde{\Theta}(t)^T \tilde{\Theta}(t)$, 由(3.3)–(3.5), (3.10)和(3.11)式可得

$$\begin{aligned} E[V(t)/F_{t-k}] &\leq V(t-k) \frac{2a}{r(t-k)} \mathbf{h}(t-k)^T \mathbf{z}(t-k) - \frac{a\rho}{r(t-k)} \|\mathbf{z}(t-k)\|^2 \\ &\quad + \frac{a^2}{r(t-k)^2} X(t-k)^T X(t-k) r^2. \end{aligned}$$

由(3.11)式和 $\left(\tilde{C} - \frac{a+\rho}{2} I \right)$ 的严正实并利用单调收敛定理和 Kronecker 引理可得

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N}{r(N)} \cdot \frac{1}{N} \sum_{t=0}^N \|\mathbf{z}(t)\|^2 = 0, \text{ a. s.} \quad (3.12)$$

引入矩阵多项式 $\bar{B}(z^{-1}), \bar{Q}(z^{-1}), \bar{A}(z^{-1}), \bar{P}\bar{T}(z^{-1})$ 满足

$$\bar{B}(z^{-1})\bar{Q}(z^{-1}) = \bar{Q}(z^{-1})\bar{B}(z^{-1}), \quad \det \bar{B}(z^{-1}) = \det B(z^{-1}), \quad (3.13)$$

$$\bar{A}(z^{-1})\bar{P}\bar{T}(z^{-1}) = \bar{P}\bar{T}(z^{-1})\bar{A}(z^{-1}), \quad \det \bar{A}(z^{-1}) = \det A(z^{-1}),$$

$$\bar{P}\bar{T}(z^{-1}) = P(z^{-1})\bar{T}(z^{-1}) \quad (3.14)$$

由(2.1), (2.4)式中 $\mathbf{e}(t+k)$ 的表达式、(3.13)式和(3.14)式可得

$$(\bar{B}\bar{P}\bar{T} + z^{-k}\bar{Q}\bar{A})\mathbf{y}(t) = \bar{B}\mathbf{e}(t) + \bar{B}R\mathbf{w}(t-k) + z^{-k}\bar{Q}C\xi(t) + \bar{Q}(1)d, \quad (3.15)$$

$$(\bar{P}\bar{T}\bar{B} + z^{-k}\bar{A}\bar{Q})\mathbf{u}(t) = \bar{A}\mathbf{e}(t) + \bar{A}R\mathbf{w}(t-k) - \bar{P}\bar{T}C\xi(t) - \bar{P}\bar{T}(1)d, \quad (3.16)$$

再由定理 3.1 的假定 4) 和(3.13)–(3.14)式有

$$\det(\bar{B}\bar{P}\bar{T} + z^{-k}\bar{Q}\bar{A}) = \det(\bar{P}\bar{T}\bar{B} + z^{-k}\bar{A}\bar{Q}) = \det(\bar{P}\bar{T}\bar{B} + z^{-k}\bar{Q}\bar{A}). \quad (3.17)$$

由假设(2.2), 定理 3.1 的假设 4), 文献[4]引理 A.1, 从(3.8)式, (3.15)–(3.17)式和(3.6)式得

$$\frac{1}{N} \sum_{t=0}^N \|\mathbf{u}(t)\|^2 \leq \frac{K_1}{N} \sum_{t=0}^N \|\mathbf{z}(t)\|^2 + K_2, \quad \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \|\mathbf{y}(t)\|^2 \leq \frac{K_3}{N} \sum_{t=0}^N \|\mathbf{z}(t)\|^2 + K_4$$

$$\frac{1}{N} \sum_{t=0}^N \|\mathbf{y}^*(t)\|^2 \leq \frac{K_5}{N} \sum_{t=0}^N \|\mathbf{z}(t)\|^2 + K_6, \quad 0 < K_i < \infty \quad (i = 1, \dots, 6)$$

由 $r(N)$ 和 $X(N)$ 的定义以及上面各式知

$$\frac{r(N)}{N} \leq \frac{C_1}{N} \sum_{t=0}^N \|\mathbf{z}(t)\|^2 + C_2, 0 < C_1 < \infty, 0 < C_2 < \infty, \text{a. s.} \quad (3.18)$$

由 (3.12) 和 (3.18) 式得

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=0}^N \|\mathbf{z}(t)\|^2 = 0 \quad \text{a. s.} \quad (3.19)$$

由 (3.18) 式知 $\frac{r(N)}{N}$ 有界, 从而得定理 3.1 (1). 由 (3.8) 和 (3.19) 式:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=0}^N E(\|\mathbf{e}(t+k)\|^2 / F_t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=0}^N E(\|\mathbf{z}(t) + \mathbf{v}(t+k)\|^2 / F_t) = r^2, \text{a. s.}$$

四、仿真结果

系统模型如下:

$$\begin{bmatrix} 1 - 0.95z^{-1} & 0 \\ 0 & 1 - 0.1z^{-1} \end{bmatrix} \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 0.2 + 0.168z^{-1} & 0.1 \\ -z^{-1} & 10z^{-1} \end{bmatrix} \mathbf{u}(t-1) + \xi(t) + \mathbf{d}. \quad (4.1)$$

式中噪声向量 $\xi(t)$ 均值为零; 协方差为 $0.1 I$; 常值向量 $\mathbf{d} = [2, 2]^T$ 当 $300 \leq t \leq 500$, 其余为零. 交互矩阵 $T(z) = \text{diag}(z, z^2)$. $P = R = I$, $Q = 0.1(1 - z^{-1})I$. 参考输入向量 $\mathbf{w}(t)$ 和系统输出 $\mathbf{y}(t)$ 如图 1 所示. 本算法可以消除跟踪误差和常值干扰.

理论分析和仿真结果表明本文提出的一般随机多变量系统的直接自适应控制算法具有满意的稳定性和收敛性. 文献[2,3,6]提出的算法可以作为本文算法的特殊情况来处理, 采用本文的分析方法可以证明在一定条件下上述算法是全局收敛的.

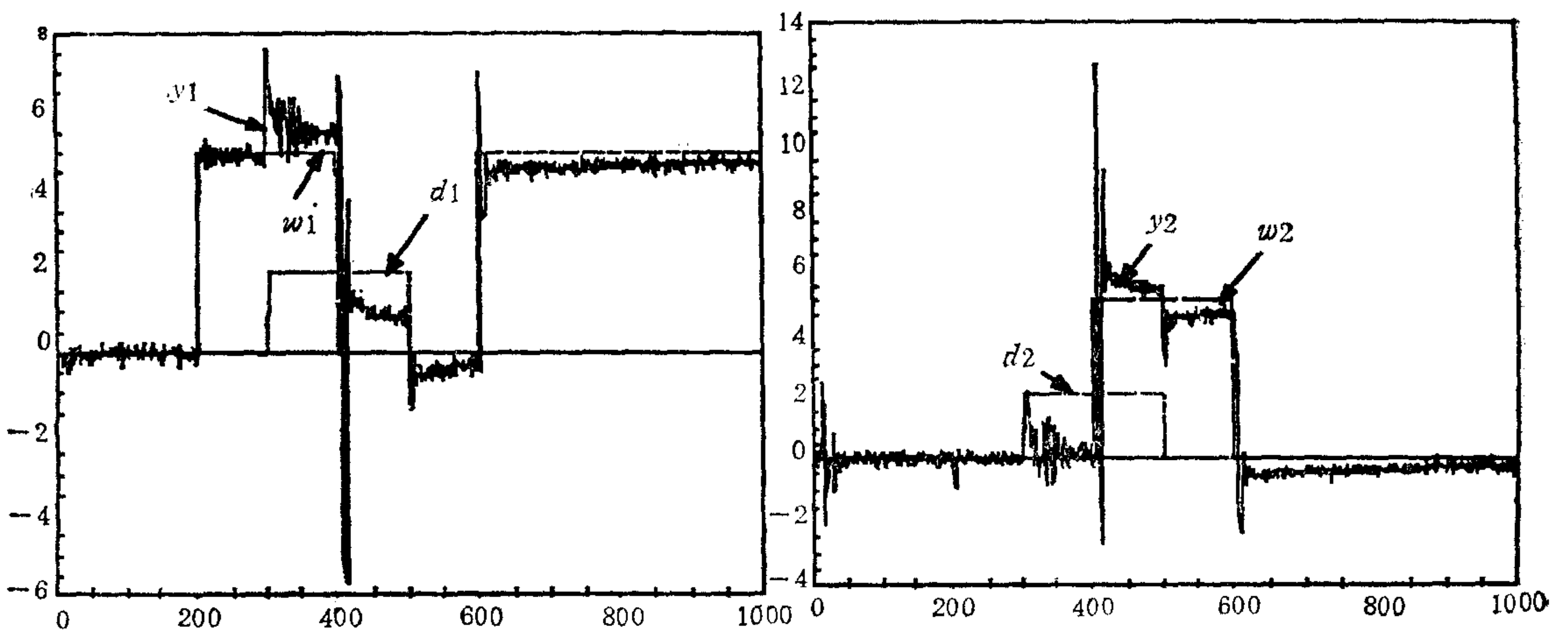


图1 采用本文自适应算法时, 输出 y_1, y_2 , 参考输入 w_1, w_2 和常值干扰 d_1, d_2 曲线

参 考 文 献

- [1] Elliott, H. and Wolovich, W. A., A Parameter Adaptive Control Structure for Linear Multivariable Systems, *IEEE Trans. Aut. Control*, **AC-27**(1984), 340—352.
- [2] Borisson, U., Self-tuning Regulators for a Class of Multivariable Systems, *Automatica*, **15**(1979), 209—215.
- [3] Koivo, H. N., A Multivariable Self-tuning Controller, *Automatica*, **16**(1980), 351—366.
- [4] Goodwin, G. C., Ramadge, P. J. and Caines, P. E., Discrete Time Stochastic Adaptive Control, *SIAM J. Control Optimiz.*, **19**(1981), 829—853.
- [5] 柴天佑, 郎世俊, 顾兴源, 多变量自校正前馈控制器及其应用, *自动化学报*, **12**(1986), 229—236.
- [6] Dugard, L., Goodwin, G. C. and Xianya, X., The Role of the Interactor Matrix in Multivariable Stochastic Adaptive Control, *Automatica*, **20**(1984), 701—709.
- [7] 柴天佑, Globally Convergent Self-tuning Controllers, *Int. J. Control*, **48**(1988), 417—434.
- [8] 柴天佑, A Self-tuning Decoupling Controller for a Class of Multivariable Systems and Global Convergence Analysis, *IEEE Trans. Aut. Control*, **AC-33**(1988), 761—771.
- [9] 柴天佑, 多变量自校正解耦控制器的全局收敛性分析, *自动化学报*, **15**(1989), 432—436.

DIRECT STOCHASTIC ADAPTIVE CONTROL FOR MULTIVARIABLE SYSTEMS WITH GENERAL INTERACTIVE MATRIX

CHAI TIANYOU

(Northeast University of Technology)

ABSTRACT

A direct adaptive control algorithm for general stochastic multivariable systems based on generalized minimum variance control law is proposed by means of the interactive matrix. The analysis of stability and convergence for this algorithm is also given. It is shown that even for nonminimum phase systems, this algorithm still has global convergence properties.

Key words —Interactive matrix; generalized minimum variance; adaptive control.