

ARMA 信号的自校正去卷平滑器

邓自立

(黑龙江大学应用数学研究所)

摘 要

本文从时间序列分析观点处理自适应信号去卷问题。应用新息方法和射影理论,对于通过线性系统被观测的未知的 ARMA 信号,本文提出了两类新的自校正最优去卷平滑器,包括了一些文献中的问题和结果作为特例^[1-8],可应用于数据和信号处理^[1,5,7,8]、通讯^[2,6]、语音识别^[3]等许多不同领域。仿真例子说明了本文结果的有效性。

关键词——信号估计,去卷,平滑器,自校正。

一、问题阐述

去卷 (Deconvolution) 或信号复原是信号处理领域的重要课题,广泛地应用于油田勘探地震数据处理^[2,5,7]、通讯系统^[2,6]、语音信号识别^[3]、EMG 信号分析^[8]等问题。信号去卷平滑问题被 Goodwin 和 Sin^[9] 从状态空间观点阐述如下:

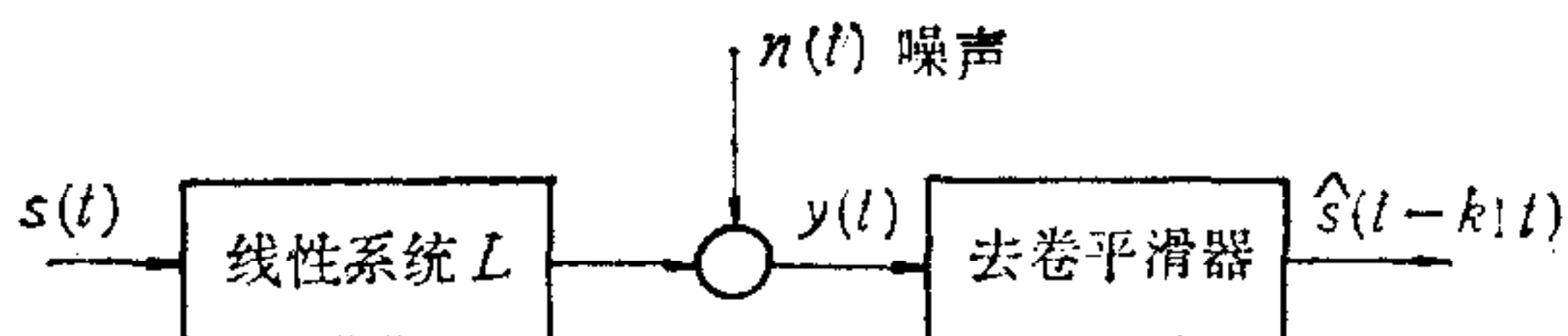


图 1 信号去卷平滑估计

见图1,未知信号 $s(t)$ 通过一个已知的有观测噪声 $n(t)$ 的线性系统 L 被观测,去卷平滑问题是基于到时刻 t 的观测数据 $\{y(t), y(t-1), \dots\}$ 求信号 $s(t-k)$ 的最优平滑估值 $\hat{s}(t-k|t)$ 。其中正整数 k 是固定滞后。

假定^[9]: (i) 线性系统 L 是定常的、有限维的; (ii) 输入信号 $s(t)$ 是带有理谱密度的平稳序列。

由假定 (ii) 引出 $s(t)$ 的状态空间新息模型为^[9]

$$\mathbf{x}_1(t+1) = F_1 \mathbf{x}_1(t) + K_1 w(t), \quad (1)$$

$$s(t) = H_1 \mathbf{x}_1(t) + w(t), \quad (2)$$

其中新息 $w(t)$ 是零均值、方差为 σ_w^2 的白噪声。

由假定 (i) 引出观测信号 $y(t)$ 的状态空间模型^[9]:

$$\mathbf{x}_2(t+1) = F_2\mathbf{x}_2(t) + B_2s(t) + K_2v(t), \quad (3)$$

$$y(t) = H_2\mathbf{x}_2(t) + v(t), \quad (4)$$

其中白噪声 $v(t)$ 有零均值和方差 σ_v^2 且独立于 $w(t)$.

Goodwin 和 Sin^[9] 基于状态空间模型(1)-(4)式用增广状态 Kalman 滤波处理去卷平滑问题. 本文则用现代时间序列分析观点和方法重新阐述和解决去卷平滑问题. 可证明^[10]: 在 (F_1, K_1, H_1) 和 (F_2, B_2, K_2, H_2) 化为典范形式时, 信号模型(1)和(2)式等价于如下的 ARMA 新息模型:

$$A(q^{-1})s(t) = C(q^{-1})w(t), \quad (5)$$

而观测模型(3)和(4)式等价于如下的 ARMAX 模型:

$$Q(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})s(t-1) + R(q^{-1})v(t). \quad (6)$$

式中 $A(q^{-1}), \dots, R(q^{-1})$ 等为形如

$$X(q^{-1}) = x_0 + x_1q^{-1} + \dots + x_{n_x}q^{-n_x}. \quad (7)$$

的 q^{-1} 的算子多项式, q^{-1} 是单位滞后算子. x_i 和 n_x 各为 $X(q^{-1})$ 的系数和阶. 假定 $A(q^{-1}), C(q^{-1}), Q(q^{-1}), B(q^{-1})$ 是稳定的, 即它们的零点都在单位圆外. 并规定首系数 $a_0 = c_0 = q_0 = r_0 = 1, b_0 \neq 0$.

Goodwin 和 Sin 的去卷平滑问题从时间序列分析观点现在可重新阐述为: 未知的 ARMA 信号(5)式通过一个已知的用 ARMAX 模型(6)式描写的线性系统 L 被观测, 要求信号 $s(t-k)$ 的最优(最小方差)和自校正(渐近最优)平滑估值 $\hat{s}(t-k|t)$. 因为未知信号 $s(t)$ 是以“卷和”形式出现在观测方程(6)式中, 所以估计信号 $s(t)$ 的问题叫“去卷”.

二、稳态最优去卷平滑器

为了导出稳态平滑器, 暂时假定初始时刻 $t_0 = -\infty$. 用 $A(q^{-1})$ 乘(6)式两边并利用(5)式有

$$A(q^{-1})Q(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})C(q^{-1})w(t-1) + A(q^{-1})R(q^{-1})v(t), \quad (8)$$

式中右边的两个滑动平均 (MA) 过程可用一个等价的 MA 过程表示为^[10]

$$D(q^{-1})e(t) = B(q^{-1})C(q^{-1})w(t-1) + A(q^{-1})R(q^{-1})v(t), \quad (9)$$

其中 $e(t)$ 是零均值、方差为 σ_e^2 的白噪声, 且 $D(q^{-1})$ 有首系数 $d_0 = 1$ 和阶 $n_d = \max(n_b + n_c, n_a + n_r)$.

由(8)和(9)式有观测信号 $y(t)$ 的 ARMA 新息模型:

$$A(q^{-1})Q(q^{-1})y(t) = D(q^{-1})e(t), \quad (10)$$

其中 $e(t)$ 是观测过程 $y(t)$ 的新息过程^[10].

引入新的观测过程 $z(t) = Q(q^{-1})y(t)$, 则由(10)式有 $z(t)$ 的 ARMA 新息模型为

$$A(q^{-1})z(t) = D(q^{-1})e(t). \quad (11)$$

周知^[10], 稳态最优去卷平滑器 $\hat{s}(t-k|t)$ 是 $s(t-k)$ 在由新息集 $\{e(t), e(t-1), \dots\}$ 所张成的 Hilbert 空间上的射影, 记为

$$\hat{s}(t-k|t) = \text{proj}[s(t-k)|e(t), e(t-1), \dots].$$

由新息序列的正交性(白噪声)及射影性质有

$$\hat{s}(t-k|t) = \sum_{j=0}^{\infty} \text{proj}[s(t-k)|e(t-j)]. \quad (12)$$

由(9)式及 $D(q^{-1})$ 的稳定性有 $e(t)$ 的级数表达式:

$$\begin{aligned} e(t) &= \frac{B(q^{-1})C(q^{-1})}{D(q^{-1})} w(t-1) + \frac{A(q^{-1})R(q^{-1})}{D(q^{-1})} v(t) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j w(t-1-j) + \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j v(t-j), \end{aligned} \quad (13)$$

式中 φ_j 用比较如下恒等式两边 q^{-i} 的系数得到:

$$B(q^{-1})C(q^{-1}) = D(q^{-1})(\varphi_0 + \varphi_1 q^{-1} + \dots) \quad (14)$$

这引出 Box-Jenkins 递推公式^[10]

$$\varphi_j = -d_1 \varphi_{j-1} - \dots - d_{n_d} \varphi_{j-n_d} + \delta_j, \quad (15)$$

其中 $\varphi_0 = b_0$; $\varphi_j = 0$, 对 $j < 0$; $\delta_j = 0$, 对 $j > n_d$. δ_j 和 n_d 各为 $\delta(q^{-1})$ 的系数和阶, 且 $\delta(q^{-1}) = B(q^{-1})C(q^{-1})$.

类似可得系数 ψ_j 的 Box-Jenkins 递推计算公式.

为了计算(12)式中的射影, 根据 $s(t)$ 的两种不同表达式, 有如下两类最优去卷平滑器:

1. 第一类稳态最优去卷平滑器

由(5)式和 $A(q^{-1})$ 的稳定性有展式

$$s(t) = \frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})} w(t) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j w(t-j), \quad (16)$$

类似(14)、(15)式, 有 f_j 的 Box-Jenkins 递推公式为

$$f_j = -a_1 f_{j-1} - \dots - a_{n_a} f_{j-n_a} + c_j, \quad (17)$$

式中 $f_0 = 1$; $f_j = 0$, 对 $j < 0$; $c_j = 0$, 对 $j > n_a$.

将(16)代入(12)式有稳态最优去卷平滑器为

$$\begin{aligned} \hat{s}(t-k|t) &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} f_j \text{proj}[w(t-k-i)|e(t-j)] \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} f_j E(w(t-k-i)e(t-j)) \\ &\quad \cdot \frac{1}{\sigma_e^2} \cdot e(t-j), \end{aligned} \quad (18)$$

其中应用了射影公式^[10], 且 E 是数学期望号. 可进一步把(18)式表为

$$\hat{s}(t-k|t) = \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j e(t-j), \quad (19)$$

其中平滑系数 β_j 为

$$\beta_i = \sum_{j=0}^{\infty} f_j E(w(t-k-i)e(t-j)) \cdot \frac{1}{\sigma_e^2}. \quad (20)$$

由白噪声 $w(t)$ 和 $v(t)$ 的独立性及(13)式有

$$E(w(t)e(i)) = \begin{cases} 0, & t > i-1; \\ \varphi_{i-1-i}\sigma_w^2, & t \leq i-1. \end{cases} \quad (21)$$

由(20)、(21)式有 β_i 的计算公式为

$$\beta_i = \frac{\sigma_w^2}{\sigma_e^2} \sum_{j=\max(0, i-k+1)}^{\infty} f_j \varphi_{i+k-j-1}. \quad (22)$$

在(19)式中新息 $e(t-j)$ 可由(10)式计算为

$$e(t) = \frac{A(q^{-1})Q(q^{-1})}{D(q^{-1})} y(t) = \sum_{j=0}^{\infty} h_j y(t-j), \quad (23)$$

其中系数 h_j 类似地用 Box-Jenkins 公式递推计算。

2. 第二类稳态最优去卷平滑器

由(6)式和 $B(q^{-1})$ 的稳定性有 $s(t)$ 的表达式

$$\begin{aligned} s(t) &= \frac{Q(q^{-1})}{B(q^{-1})} y(t+1) - \frac{R(q^{-1})}{B(q^{-1})} v(t+1) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j y(t+1-j) - \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j v(t+1-j), \end{aligned} \quad (24)$$

其中系数 α_j 和 π_j 用 Box-Jenkins 递推公式计算。

类似地,由(12)、(13)、(24)式及射影公式又有另一类稳态最优去卷平滑器为

$$\hat{s}(t-k|t) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j y(t-k+1-j) - \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j e(t-j), \quad (25)$$

式中系数 γ_j 为

$$\gamma_j = \frac{\sigma_v^2}{\sigma_e^2} \sum_{i=\max(0, j-k+1)}^{\infty} \pi_i \psi_{i-j+k-1}. \quad (26)$$

三、自校正去卷平滑器

现在假定线性系统 L 是已知的,即在(6)式中 $Q(q^{-1}), B(q^{-1}), R(q^{-1}), \sigma_v^2$ 是已知的。但信号 $s(t)$ 的模型(5)式是未知的,即 $A(q^{-1}), C(q^{-1}), \sigma_w^2$ 是未知的。并设初始时刻 $t_0 = 0$, 因而到时刻 t 只有有限个观测数据 $\{y(t), y(t-1), \dots, y(0)\}$ 可利用。注意,求稳态最优去卷平滑器 $\hat{s}(t-k|t)$ 的关键是 ARMA 新息模型(11)式的辨识。因此可得到如下相应的两类自校正去卷平滑器:

1. 第一类自校正去卷平滑器

为简单计,这里只考虑 $s(t)$ 为未知 AR 信号情形,即在(5)式中假定 $C(q^{-1}) = 1$,

这样可避免辨识 $C(q^{-1})$ 的困难。第一类自校正去卷平滑器由如下两步组成:

第一步. 用递推增广最小二乘法 (RELS)^[10] 在线辨识 ARMA 新息模型(11)式, 可得在时刻 t 的参数估计 $\hat{a}_i(t)$, $\hat{d}_i(t)$. 而阶 n_a , n_d 可用 F 检验法^[10] 离线决定. 由(11)式新息估值 $\hat{e}(t)$ 可递推计算为

$$\hat{e}(t) = z(t) + \hat{a}_1(t)z(t-1) + \cdots + \hat{a}_{n_a}(t)z(t-n_a) - \hat{d}_1(t)\hat{e}(t-1) - \cdots - \hat{d}_{n_d}(t)\hat{e}(t-n_d), \quad (27)$$

其中置初值 $\hat{e}(-i) = 0, i = 1, \cdots, n_d$. 类似置 $z(t)$ 的初值.

在时刻 t 方差 σ_e^2 的估值 $\hat{\sigma}_e^2(t)$ 可用采样方差递推计算为

$$\hat{\sigma}_e^2(t) = \hat{\sigma}_e^2(t-1) + \frac{1}{t}(\hat{e}^2(t) - \hat{\sigma}_e^2(t-1)). \quad (28)$$

将估值 $\hat{a}_i(t)$, $\hat{d}_i(t)$ 代入(15)、(17)式可得估值 $\hat{\phi}_i(t)$, $\hat{f}_i(t)$, 类似得 $\hat{\psi}_i(t)$. (9)式两边自乘后取数学期望, 注意 $C(q^{-1}) = 1$, 可得估值

$$\hat{\sigma}_w^2(t) = \left(\hat{\sigma}_e^2(t) \sum_{i=0}^{n_d} \hat{d}_i^2(t) - \sigma_w^2 \sum_{i=0}^{n_\lambda} \hat{\lambda}_i^2(t) \right) / \left(\sum_{i=0}^{n_b} b_i^2 \right), \quad (29)$$

其中 $\hat{\lambda}_i(t)$ 是 λ_i 的估值; λ_i 和 n_λ 各为 $\lambda(q^{-1})$ 的系数和阶; $\lambda(q^{-1}) = A(q^{-1})R(q^{-1})$. 还规定 $\hat{d}_0(t) = \hat{\lambda}_0(t) = 1$.

将有关估值代入(22)式可得估值 $\hat{\beta}_i(t)$.

第二步. 由(19)式有自校正去卷平滑器为

$$\hat{s}(t-k|t) = \sum_{j=0}^t \hat{\beta}_j(t)\hat{e}(t-j). \quad (30)$$

上述两步在每时刻 t 重复进行.

2. 第二类自校正去卷平滑器

它不要求 $C(q^{-1}) = 1$ 的假定, 并由两步组成:

第一步. 同前, 计算估值 $\hat{a}_i(t)$, $\hat{d}_i(t)$, $\hat{e}(t)$, $\hat{\sigma}_e^2(t)$, $\hat{\psi}_i^2(t)$, $\hat{\gamma}_i(t)$.

第二步. 由(25)得自校正去卷平滑器为

$$\hat{s}(t-k|t) = \sum_{j=0}^{t-k+1} \alpha_{ij}y(t-k+1-j) - \sum_{j=0}^t \hat{\gamma}_j(t)\hat{e}(t-j). \quad (31)$$

上述两步在每时刻 t 重复进行.

假如对 ARMA 新息模型(11)式的参数估计是一致的, 即当 $t \rightarrow \infty$ 时, $\hat{a}_i(t) \rightarrow a_i$, $\hat{d}_i(t) \rightarrow d_i$, 则也有 $\hat{e}(t) \rightarrow e(t)$, $\hat{\sigma}_e^2(t) \rightarrow \sigma_e^2$, $\hat{\sigma}_w^2(t) \rightarrow \sigma_w^2$, 因而 $\hat{\beta}_i(t) \rightarrow \beta_i$, $\hat{\gamma}_i(t) \rightarrow \gamma_i$, 从而两类自校正去卷平滑器(30)和(31)式将分别渐近于相应的稳态最优去卷平滑器(19)和(25)式. 这叫渐近最优性或自校正性.

四、仿真例子

设未知信号 $s(t)$ 服从 AR(1) 模型

$$(1 - aq^{-1})s(t) = w(t), \quad |a| < 1. \quad (32)$$

观测模型为

$$y(t) = (1 - bq^{-1})s(t-1) + v(t), \quad |b| < 1. \quad (33)$$

这引出观测过程的新息模型为 ARMA(1,1):

$$(1 - aq^{-1})y(t) = (1 - dq^{-1})e(t), \quad |d| < 1. \quad (34)$$

对此例易算出

$$\alpha_j = \pi_j = b^j; f_j = a^j; \varphi_j = d^j - bd^{j-1}; \psi_j = d^j - ad^{j-1}, \quad (35)$$

其中形式规定 $d^{-1} = 0$. 因而由(22)式有

$$\beta_j = \begin{cases} \frac{\sigma_w^2}{\sigma_e^2} \cdot \frac{1-ab}{1-ad} a^{j-k+1}, & j > k-1; \\ \frac{\sigma_w^2}{\sigma_e^2} \cdot \frac{1-ab}{1-ad} d^{k-1-j}, & j \leq k-1. \end{cases} \quad (36)$$

在(36)式中取固定滞后 $k=1$, 有

$$\beta_j = K_1 a^j; \quad K_1 = \frac{\sigma_w^2}{\sigma_e^2} \cdot \frac{1-ab}{1-ad}. \quad (37)$$

于是由(19)式有第一类稳态一步最优去卷平滑器

$$\hat{s}(t-1|t) = K_1 \sum_{j=0}^{\infty} a^j e(t-j). \quad (38)$$

易验证其递推形式为

$$(1 - aq^{-1})\hat{s}(t-1|t) = K_1 e(t). \quad (39)$$

由(26)、(35)式有

$$\gamma_j = \begin{cases} \frac{\sigma_v^2}{\sigma_e^2} \cdot \frac{1-ab}{1-bd} b^{j-k+1}, & j > k-1; \\ \frac{\sigma_v^2}{\sigma_e^2} \cdot \frac{1-ab}{1-bd} d^{k-1-j}, & j \leq k-1. \end{cases} \quad (40)$$

由(25)、(35)、(40)式又有第二类稳态一步最优去卷平滑器为

$$\hat{s}(t-1|t) = \sum_{j=0}^{\infty} b^j y(t-j) - K_2 \sum_{j=0}^{\infty} b^j e(t-j), \quad (41)$$

其中

$$K_2 = \frac{\sigma_v^2}{\sigma_e^2} \cdot \frac{1-ab}{1-bd}. \quad (42)$$

易知(41)式的递推形式为

$$(1 - bq^{-1})\hat{s}(t-1|t) = y(t) - K_2 e(t). \quad (43)$$

下面给出相应的两类自校正去卷平滑器的仿真结果. 仿真中 $b=0.2$ 和 $\sigma_v^2=1$ 是已知的. 而 $a=0.8$ 和 $\sigma_w^2=1$ 是未知的. 在 IBM-PC 机上用 RELS 算法^[10]在线辨识 ARMA(1,1) 新息模型(34)式, 递推 $t=300$ 次. 由图 2 看到估值 $\hat{a}(t)$ 和 $\hat{d}(t)$ 很快收敛到相应的真实值 $a=0.8$, $d=0.448$ (d 的求法见文献[10]). 由(39)式有第一类自校正去卷平滑器为

$$\hat{s}(t-1|t) = \hat{d}(t)\hat{s}(t-2|t-1) + \hat{K}_1(t)\hat{e}(t). \quad (44)$$

由(43)式有第二类自校正递推去卷平滑器为

$$\hat{s}(t-1|t) = b\hat{s}(t-2|t-1) + y(t) - \hat{K}_2(t)\hat{\varepsilon}(t). \quad (45)$$

在上两式中, 初值分别取 $\hat{s}(-1|0) = 0.2$ 和 $\hat{s}(-1|0) = 0.3$, 且估值 $\hat{K}_1(t)$ 和 $\hat{K}_2(t)$ 分别由(37)和(42)式代入有关的估值得到。

仿真结果如图 3 所示, 可看到两类自校正去卷平滑器仿真结果十分相近, 且它们对真实信号 $s(t)$ 具有良好的跟踪性能。

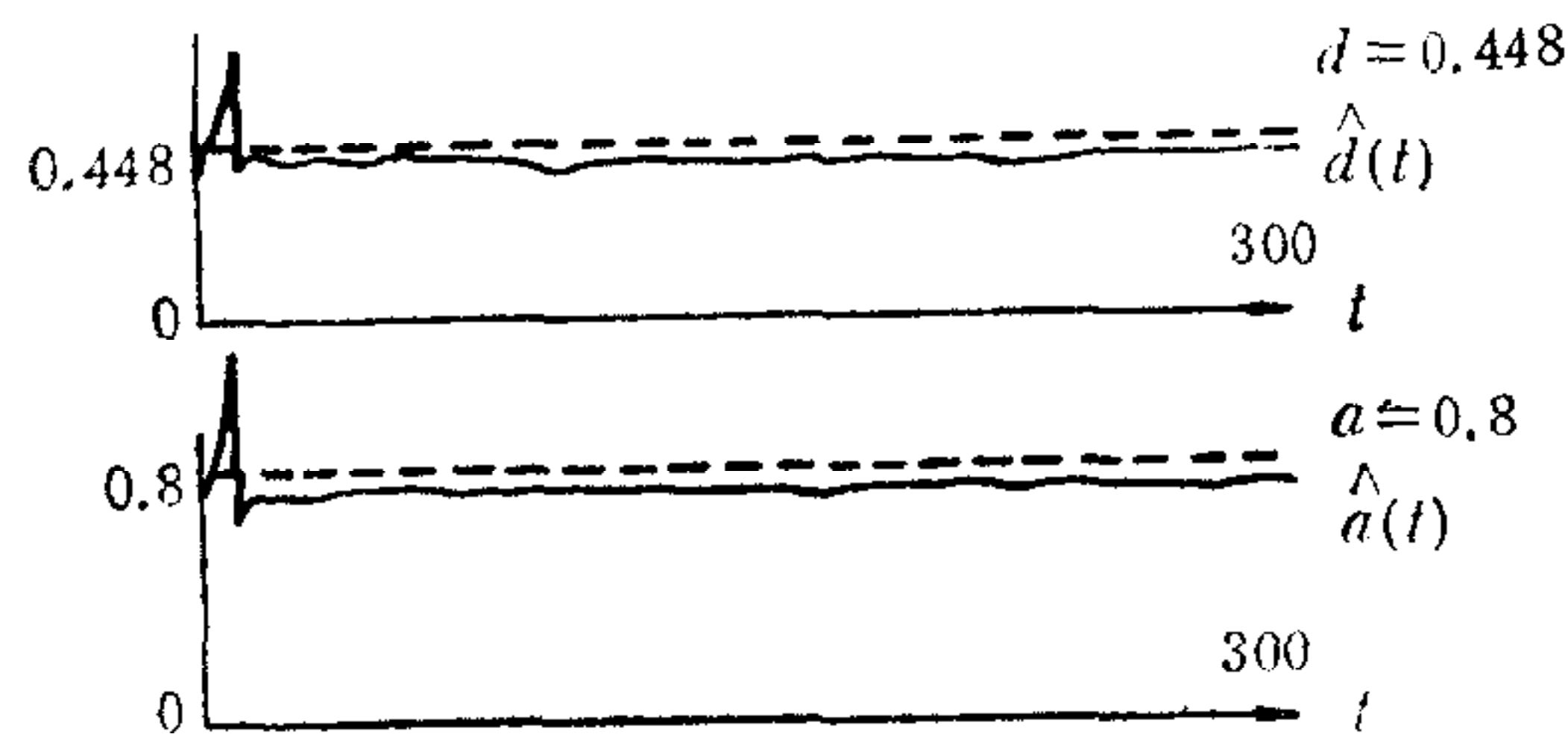
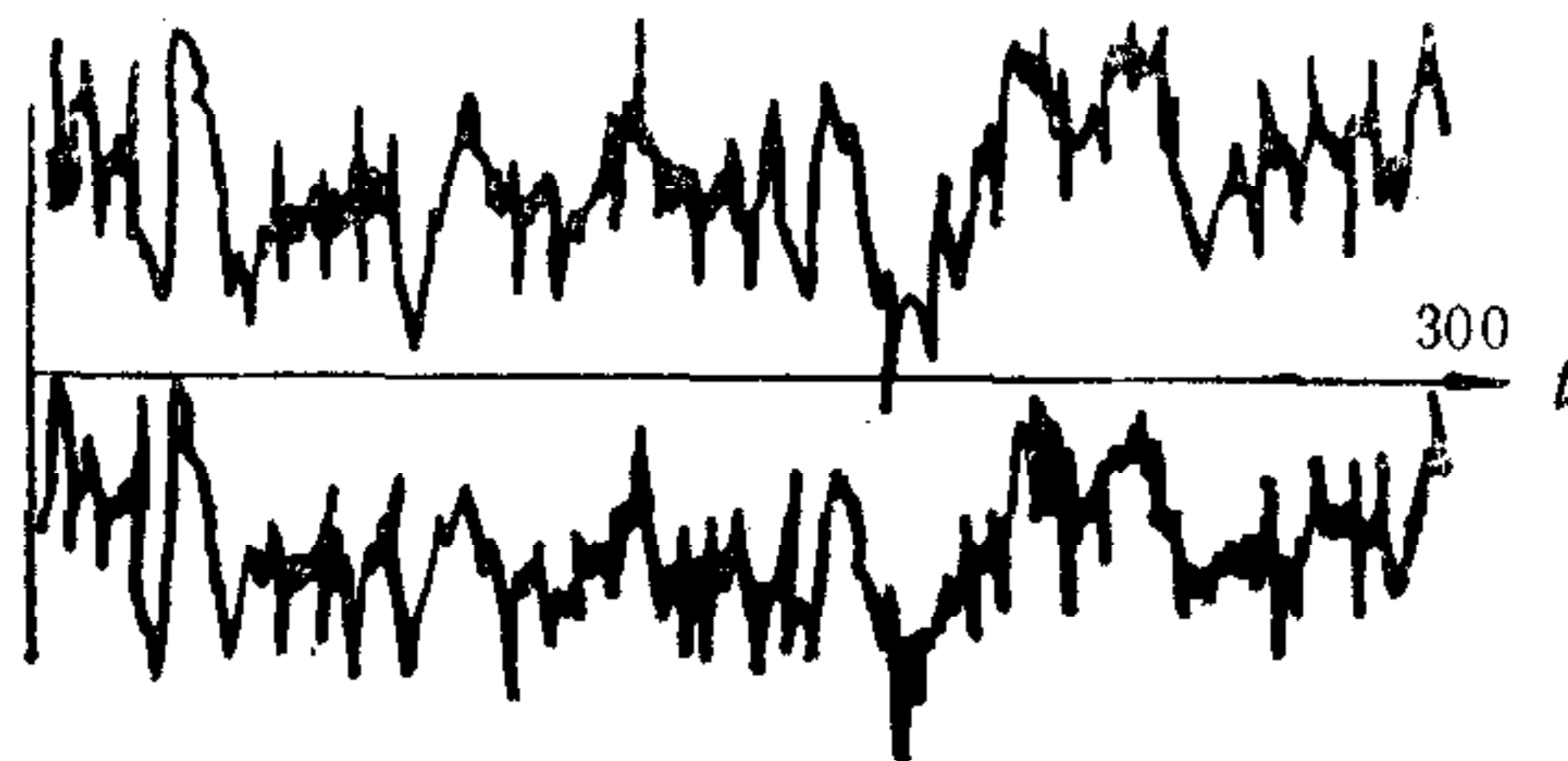


图 2 ARMA(1, 1) 新息模型参数估计的收敛性

第一类自校正 $\hat{s}(t-1|t)$ 与 $s(t)$



第二类自校正 $\hat{s}(t-1|t)$ 与 $s(t)$

图 3 两类自校正去卷平滑器 $\hat{s}(t-1|t)$ 与 $s(t)$ 比较

五、结 论

本文用现代时间序列分析^[10]的新观点和方法提出了两类新的最优和自校正去卷平滑器。本文方法和结果带有普遍性, 包括了许多领域中的问题和结果作为特例。例如, (i) 当 $Q = B = R = 1$ 时, 见文献[4, 8]; (ii) 当 $A = C = 1$ 时, 见文献[2, 6]; (iii) 当 $C = R = 1, Q = B$ 时, 见文献[3]; (iv) 当 $A = C = B = 1, Q = R$ (未知) 时, 见文献[1]。

参 考 文 献

- [1] Moir, T. J., Vishwanath, T. G., Campbell, D. R., Real-Time Self-Tuning Deconvolution Filter and Smoother, *Int. J. Control*, 45(1987), 969—985.
- [2] Goodwin, G. C., Doan, H. B., Cantoni, A., Application of ARMA Models to Automatic Channel Equalization, *Information Sciences*, 22(1980), 107—129.
- [3] Tomicik, D., Melsa, J. L., Identification of Speech and Speech Parameters in Noisy Observation, 1977 Joint Automatic Control Conference, Vol. 2, 1977.

- [4] Hagander, P., Wittenmark, B., A Self-Tuning Filter for Fixed-Lag Smoothing, *IEEE Trans. Inform. Theory*, **IT-23**(1977), 377—384.
- [5] 邓自立,应用于地震数据去卷的白噪声估值器;自动化学报,**12**(1986),113—118.
- [6] Benedetto, S., Biglier, E., On Linear Receiver for Digital Transmission Systems, *IEEE Trans. Communication*, **22**(1974), 1205—1215.
- [7] Mendel, J. M., Kormylo, J., New Fast Optimal White-Noise Estimators for Deconvolution, *IEEE Trans. Geoscience Electronics*, **GE-15**(1977), No. 1.
- [8] Graup, D., Cline, W. K., Functional Separation of EMG Signals via ARMA Identification Methods for Prosthesis Control Purposes, *IEEE Trans. System, Man and Cybernetics*, **SMC-5**(1975), No.2.
- [9] Goodwin, G. C., Sin, K. S., Adaptive Filtering, Prediction and Control, Prentice-Hall, Inc. (1984), 368—382.
- [10] 邓自立,郭一新,现代时间序列分析及其应用——建模、滤波、去卷、预报和控制,知识出版社(1989).

SELF-TUNING DECONVOLUTION SMOOTHERS FOR ARMA SIGNALS

DENG ZILI

(Institute of Applied Mathematics, Heilongjiang University)

ABSTRACT

This paper deals with the adaptive signal deconvolution problem from the point of view of the time series analysis. Using the innovation approach and projection theory, this paper presents two new kinds of self-tuning optimal deconvolution smoothers. The proposed results can be applied to many different fields, including data and signal processing^[1,5,7,8], communication^[2,6] speech identification^[3]. A simulation example shows the usefulness of the proposed results.

Key words ——Signal estimation; deconvolution; smoother; self-tuning.