

一种多变量线性时变系统机辅设计的有效方法

吕炳仁

(北京联合大学机械工程学院)

摘 要

本文提出一种利用多变量线性时变系统的方块脉冲响应的快速数字仿真方法——卷积和法,以获取系统的时域响应和目标函数。在计算系统最优控制函数时,对控制函数采用多项式表示并通过程序自动扩张其项数,可加快控制函数的优化速度,节约计算机时。

关键词——计算机辅助设计,多变量,时变系统,数字仿真。

一、引 言

时变系统的应用遍及航天技术、军事工程等各个领域,其中常遇到规模庞大、结构复杂、参数众多的大系统。对于这类系统进行分析与设计,若采用解析方法势必遇到巨大的困难,而采用常规的数值算法也将耗费大量的机时。本文的宗旨就是寻求设计这类系统的快速数字仿真方法及合理的函数寻优方式。

卷积和算法的快速性及仿真速度与系统的阶数及时间常数的大小差异无关,只与瞬态过程中的采样点数有关,这一特点引起各国学者的极大兴趣。但是,求取系统连续部分的脉冲响应序列,无论采用拉氏反变换法、Z反变换法或差分方程法都将遇到很大困难^[1],对高阶系统尤其如此,从而限制了卷积和算法的推广应用。

本文提出:当受控系统数学模型未知时,可通过测试方法,或当受控系统数学模型已知时,可通过数值计算获取连续部分的脉冲响应序列,从而使卷积和算法更便于应用。

二、线性时变系统的卷积和算法原理及其方块脉冲响应

采样控制系统的结构框图如图1所示。其中,连续部分由零阶保持器与受控系统串联构成。数字控制器给出的离散信号 $u(k)$ 通过零阶保持器后生成一阶梯形信号 $\bar{u}(t)$ 作用于受控系统的输入端,系统输出连续时间信号 $y(t)$ 。

实际上,零阶保持器的输出 $\bar{u}(t)$ 可看作在 $kT(k=0,1,2,\dots)$ 时刻发生的,高度

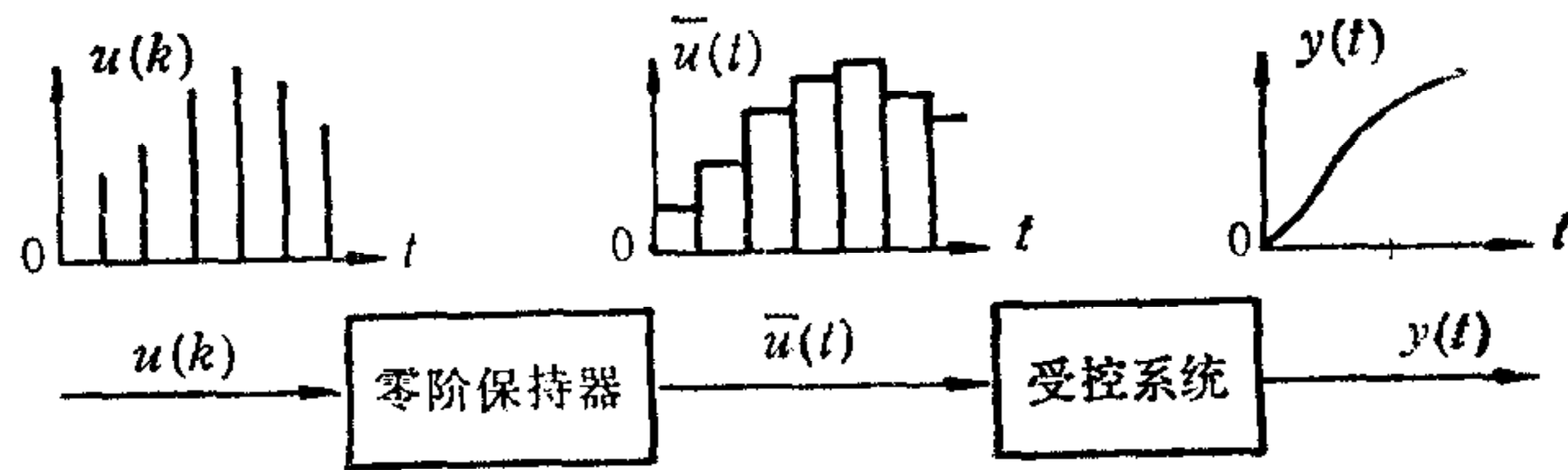


图 1

为 $u(k)$ ，宽度为采样周期 T 的一串方块脉冲函数的迭加；而输出 $y(t)$ 就是受控系统对这串脉冲的响应。显见，若 $u(k) = \delta(k - i)$ 时，则零阶保持器输出一个在 iT 时刻发生的高度为 1 宽度为 T 的单位方块脉冲函数，即 $\bar{u}(t) = \Pi_i(t) = 1[t - iT] - 1[t - (i + 1)T]$ ，则系统的输出即为在 iT 时刻发生的单位方块脉冲响应。也就是说，受控系统的方块脉冲响应就是连续部分的脉冲响应。

线性时不变系统既满足迭加原理又满足位移原理，即受控系统的输出值与输入值成线性正比关系，且输出值对时间的位移量与输入值对时间的位移量成线性正比关系。这样，只需求取受控系统在零时刻的单位方块脉冲响应序列 $g(k)$ ，便可由卷积和公式

$$y(k) = \sum_{i=0}^k g(k - i)u(i), (k = 0, 1, 2, \dots, l) \tag{1}$$

得到任意输入序列 $u(k)$ 的时域响应。其中 l 为采样总点数。

线性时变系统满足迭加原理，但不满足位移原理。这样，为了采用卷积和算法计算输出对任意输入的响应，就必须求取受控系统在不同采样时刻的全部单位方块脉冲响应序列 $g(j, k) (j = 0, 1, 2, \dots, l)$ ，如图 2 所示。其中， j 为方块脉冲发生的时刻； k 为响应序列的序号。

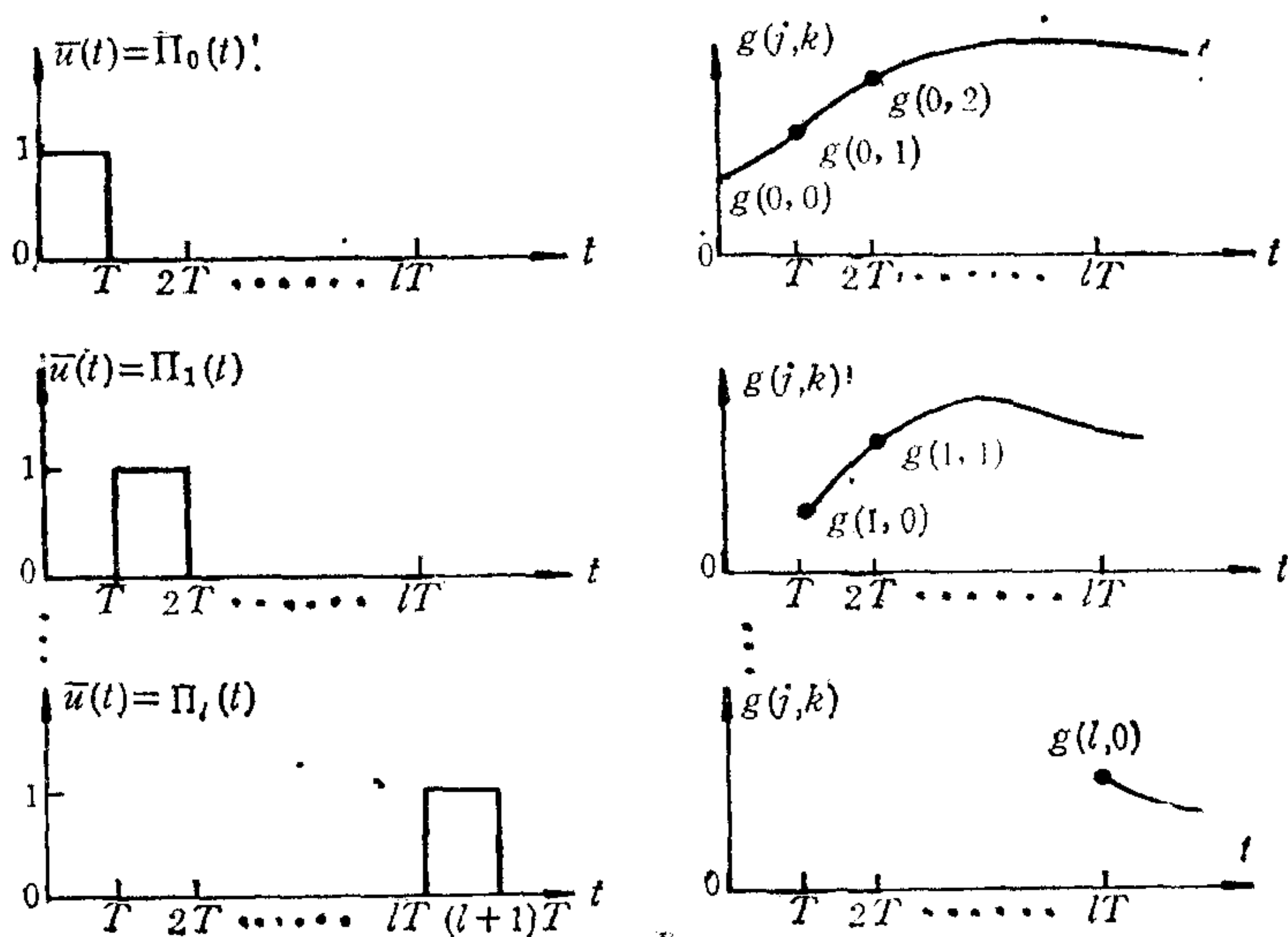


图 2

由图 2 知,当 $j = 0$ 时,取 $k = 0, 1, 2, \dots, l$; 当 $j = 1$ 时,取 $k = 0, 1, 2, \dots, l - 1; \dots$; 当 $j = l$ 取时, $k = 0$. 可见, $g(j, k)$ 的数目有 $(l + 1)(l + 2)/2$ 个.

根据迭加原理及参阅图 2 可知,输出 $y(k)$ 与输入 $u(k)$ 的关系可表示为

$$y(k) = \sum_{i=0}^k g(i, k-i)u(i), (k = 0, 1, 2, \dots, l). \quad (2)$$

当考虑初值响应序列 $y_0(k) (k = 0, 1, 2, \dots, l)$ 时,其输出可表示为

$$y(k) = y_0(k) + \sum_{i=0}^k g(i, k-i)u(i), (k = 0, 1, 2, \dots, l). \quad (3)$$

由上述可知,可以通过对受控系统的实验求取其方块脉冲响应序列及初值响应序列,这是一种非参数辨识法.

三、多输入、多输出线性时变系统的快速数字仿真

设 $\mathbf{y}(k)$ 为系统的 m 维输出向量; $\mathbf{u}(k)$ 为 r 维输入向量; $\mathbf{g}_p(j, k)$ 为系统对第 p 个输入端的单位方块脉冲响应序列向量,可写作

$$\mathbf{g}_p(j, k) = [g_{1p}(j, k), g_{2p}(j, k), \dots, g_{mp}(j, k)]^T,$$

其中,矩阵元素的第一个下标为输出端标号.

系统对第 p 个输入端的任意输入响应向量为

$$\mathbf{y}_p(k) = \sum_{i=0}^k \mathbf{g}_p(i, k-i)u_p(i), (k = 0, 1, 2, \dots, l). \quad (4)$$

系统对全部输入响应向量为

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(k) &= \sum_{p=1}^r \mathbf{y}_p(k) = \sum_{p=1}^r \sum_{i=0}^k \mathbf{g}_p(i, k-i)u_p(i) \\ &= \sum_{i=0}^k \mathbf{G}(i, k-i)\mathbf{u}(i), (k = 0, 1, 2, \dots, l). \end{aligned} \quad (5)$$

其中, $\mathbf{G}(j, k)$ 称作系统的脉冲响应矩阵

$$\mathbf{G}(j, k) = [\mathbf{g}_1(j, k) \mathbf{g}_2(j, k) \cdots \mathbf{g}_r(j, k)]$$

或

$$\mathbf{G}(j, k) = \begin{bmatrix} g_{11}(j, k) & g_{12}(j, k) & \cdots & g_{1r}(j, k) \\ g_{21}(j, k) & g_{22}(j, k) & \cdots & g_{2r}(j, k) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{m1}(j, k) & g_{m2}(j, k) & \cdots & g_{mr}(j, k) \end{bmatrix}.$$

当系统有初值时,设 $\mathbf{y}_{s,0}(k)$ 为输出向量对第 s 个输出变量的初值响应,则输出向量对全部输出端的初值响应为

$$\mathbf{y}_0(k) = \sum_{s=1}^m \mathbf{y}_{s,0}(k). \quad (6)$$

同时考虑初值与输入时的系统输出向量为

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{y}_0(k) + \sum_{i=0}^k G(i, k-i)\mathbf{u}(i), \quad (k = 0, 1, 2, \dots, l). \quad (7)$$

其中, $G(j, k)$ 及 $\mathbf{y}_0(k)$ 可仿照前述的单输入、单输出系统用非参数辨识法获取。

四、线性时变系统 $g(j, k)$ 及 $y_0(k)$ 或 $G(j, k)$ 及 $\mathbf{y}_0(k)$ 的数值计算

已知受控系统的状态空间描述

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + B(t)\mathbf{u}(t), \\ \mathbf{y}(t) = C(t)\mathbf{x}(t) + D(t)\mathbf{u}(t). \end{cases} \quad (8)$$

1. 单输入、单输出情形

受控系统对单位方块脉冲函数 $u(t) = \Pi_j(t)$ 的响应 $g(j, k)$, 可通过求下式的数值解得到

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + B(t)\Pi_j(t), \\ g(jT, t) = C(t)\mathbf{x}(t) + D(t)\Pi_j(t). \end{cases} \quad (9)$$

于是, $g(jT, t)|_{t=kT} = g(jT, kT)$, 简写为 $g(j, k)$. 受控系统对第 s 个状态变量的单位初值响应 $g_{s0}(k)$ 可通过求下式的数值解得到

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t)|_{t=0} = \mathbf{x}_{s0}, \\ g_{s0}(t) = C(t)\mathbf{x}(t). \end{cases} \quad (10)$$

其中, 初始状态 $\mathbf{x}_{s0} = [0 \cdots 0 \ 1 \ 0 \cdots 0]^T$ (1 在第 s 行). 受控系统对第 s 个状态变量初值 x_{s0} , 即 $\mathbf{x}_{s0} = [0 \cdots 0 \ x_{s0} \ 0 \cdots 0]^T$ (x_{s0} 在第 s 行) 的响应为

$$y_{s0}(k) = g_{s0}(k)x_{s0}. \quad (11)$$

受控系统对初始状态 \mathbf{x}_0 的响应为

$$y_0(k) = \sum_{s=1}^n g_{s0}(k)x_{s0} = \mathbf{g}_0^T(k)\mathbf{x}_0. \quad (12)$$

其中, $\mathbf{x}_0 = [x_{10} x_{20} \cdots x_{n0}]^T$ 为初始状态, $\mathbf{g}_0(k) = [g_{10}(k) g_{20}(k) \cdots g_{n0}(k)]^T$ 为初值响应向量。

2. 多输入、多输出情形

受控系统对第 p 个输入的单位方块脉冲响应 $\mathbf{g}_p(j, k) = \mathbf{g}_p(jT, t)|_{t=kT}$ 可通过求下式的数值解得到

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + B(t)[0 \cdots 0 \ \Pi_j(t) \ 0 \cdots 0]^T, \\ \mathbf{g}_p(jT, t) = C(t)\mathbf{x}(t) + D(t)[0 \cdots 0 \ \Pi_j(t) \ 0 \cdots 0]^T. \end{cases} \quad (13)$$

其中, $\Pi_j(t)$ 在第 p 行。

当 p 分别为 $1, 2, \dots, r$ 时, 便可求得 $G(j, k)$ 。

受控系统对第 s 个状态变量的单位初值响应 $\mathbf{g}_{s0}(k) = [g_{1s0}(k) g_{2s0}(k) \cdots g_{ms0}(k)]^T$ 可通过求下式的数值解得到

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t), & \mathbf{x}(t)|_{t=0} = \mathbf{x}_{s0}, \\ \mathbf{g}_{s0}(t) = C(t)\mathbf{x}(t). \end{cases} \quad (14)$$

受控系统对第 s 个状态变量初值为 \mathbf{x}_{s0} , 即 $\mathbf{x}_{s0} = [0 \cdots 0 \mathbf{x}_{s0} 0 \cdots 0]^T$ (\mathbf{x}_{s0} 在第 s 行) 的响应为

$$\mathbf{y}_{s0}(k) = \mathbf{g}_{s0}(k)\mathbf{x}_{s0}. \quad (15)$$

受控系统对初始状态 \mathbf{x}_0 的响应为

$$\mathbf{y}_0(k) = \sum_{s=1}^n \mathbf{g}_{s0}(k)\mathbf{x}_{s0} = G_0(k)\mathbf{x}_0. \quad (16)$$

其中, $G_0(k)$ 称作初值响应矩阵

$$G_0(k) = [\mathbf{g}_{10}(k) \mathbf{g}_{20}(k) \cdots \mathbf{g}_{n0}(k)]$$

或

$$G_0(k) = \begin{bmatrix} g_{110}(k) & g_{120}(k) \cdots g_{1n0}(k) \\ g_{210}(k) & g_{220}(k) \cdots g_{2n0}(k) \\ \vdots & \\ g_{m10}(k) & g_{m20}(k) \cdots g_{mn0}(k) \end{bmatrix}.$$

五、函数最优化

系统的目标函数为

$$J = S[\mathbf{x}(l), l] + \sum_{k=h}^l L[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k]. \quad (17)$$

其中, $\mathbf{x}(k)$ 及 $\mathbf{u}(k)$ 分别为 kT 时刻的状态向量及控制向量; $\mathbf{x}(l)$ 为末值时刻 lT 的状态向量。单输入时的控制变量可用下述多项式表示

$$\mathbf{u}(k) = \sum_{i=0}^p a_i k^i T^i. \quad (18)$$

于是,通过对式 (18) 各项系数 $a_i (i = 0, 1, 2, \cdots, p)$ 的寻优就可求得最优控制函数 $\mathbf{u}^*(k)$ 。这就将函数最优化问题转化为参数最优化问题来处理。

项数 p 及各系数 a_i 的寻优可采用项数自动扩张法来确定,具体步骤是

- 1) 先假定 $p = 1$, 即 $\mathbf{u}(k) = a_0 + a_1 kT$, 再通过程序计算目标函数的极值 J_1^* ;
- 2) p 自动加 1, 即 $p = 2$, 则 $\mathbf{u}(k) = a_0 + a_1 kT + a_2 k^2 T^2$, 再通过程序计算目标函数的极值 J_2^* ;
- 3) 计算前、后两次极值目标函数的相对误差;
- 4) 若相对误差不大于给定的误差限, 则此时的多项式系数为最优值, 即求得 $\mathbf{u}^*(k)$; 否则再将 p 自动加 1, 重复上述过程。

相对误差判断公式为

$$|(J_p^* - J_{p+1}^*)/J_{p+1}^*| \leq E. \quad (19)$$

其中, E 为给定误差限。

各系数初值的选取,其原则是将新增加的系数初值取为零,其它系数的初值可取用前次优化的结果。

采用多项式的项数自动扩张法,其目的是节约函数寻优的机时。对于有经验的专业工作者,可直接对 p 及各系数的初值进行估计,这更利于节约机时。

多输入时的控制向量表述为

$$\mathbf{u}(k) = \sum_{i=0}^p \mathbf{a}_i k^i T^i. \quad (20)$$

其中, $\mathbf{u}(k) = [u_1(k) u_2(k) \cdots u_r(k)]^T$ 为控制向量; $\mathbf{a}_i = [a_{1i} a_{2i} \cdots a_{ri}]^T$ 为系数向量。可知,待优化系数的数目为单输入时的 r 倍。其优化方法仍采用上述的项数自动扩张法,故不赘述。

六、结 束 语

最优控制实质上是从理论上研究泛函的条件极值问题。然而,对于某些稍微复杂的系统,若用最优化控制理论求其最优控制及最优轨线都是相当困难的,在解析推演的过程中,还要借助计算机求解微分方程或非线性代数方程,既费人力又费机时。而采用本文的方法,则将艰深的理论问题转化成简单的数值计算问题来处理,且能快速获得准确的结果。

从控制系统的发展来看,计算机控制系统日益增多,这种系统瞬态过程中的采样点数往往较少,则采用本文方法其仿真快速性尤为突出。对于连续控制系统的数字仿真,可以引入虚拟采样器及虚拟保持器来解决。为了满足仿真精度,本文取用较小的虚拟采样周期,而使仿真速度减缓,这是由于瞬态过程中采样点数的增多以及卷积和算法并非递推形式,使后一步计算无法利用前一步计算的信息所致。随着系统阶数的增高及时间常数差异的加大,即会显示该方法的快速性。

对于线性反馈系统最优控制器结构及参数的机辅设计以及非线性时变反馈律的寻优,均可仿照本文中优化控制函数的方法进行处理。

关于方块脉冲响应序列及初值响应序列的具体计算以及应用举例(采样控制系统的参数优化及数字解耦系统的机辅设计)可参阅文献[1—3]。

参 考 文 献

- [1] 吕炳仁,采样控制系统对象模型的快速辨识及其控制器参数的快速寻优,北京工业大学学报,10(1984), No.4, 83—96.
- [2] Lu Bingren, A New Approach to CAD of Control Systems with Multiple Microprocessors, Advances in Modelling and Simulation, AMSE Press, 7(1987), No.1, 49—62.
- [3] 吕炳仁,多微机控制系统机辅设计新途径,北京工业大学学报,13(1987), No.2, 29—39.

AN EFFECTIVE METHOD OF CAD FOR MULTIVARIABLE LINEAR TIME-VARYING SYSTEMS

LU BINGREN

(The Mechanical Engineering College of Beijing Union University)

ABSTRACT

This paper presents a high-speed digital simulation method—the convolution summation method by using the blockpulse responses of the multivariable linear time-varying systems to obtain the time domain responses and objective functions of the systems. For calculating optimal control functions of the systems, each control function is expressed as a polynomial and the term number of every polynomial is expanded automatically by means of a program. Thus, the speed of optimizing the control functions is expedited and the total computer time is saved.

Key words ——CAD; multivariable; time-varying system; digital simulation.