

# 自适应递推去卷滤波器

邓自立

解三名

(黑龙江大学应用数学研究所) (山东省计委经济预测中心)

## 摘 要

本文提出了信号去卷的一种新的自适应递推去卷滤波器,它由两部份组成:(1)次优递推滤波器,推广了 Tamura<sup>[1]</sup>的结果;(2)自适应噪声统计估值器,推广了 Sage 和 Husa<sup>[2]</sup>及作者<sup>[3]</sup>的结果,可应用于油田地震勘探<sup>[6,7]</sup>和通讯系统<sup>[5,8]</sup>。数值仿真例子说明了所提出的结果的有效性。

**关键词**——去卷,信号恢复,自适应递推滤波器,噪声统计估值器。

## 一、引 言

信号去卷 (Deconvolution) 或信号恢复 (Restoration) 是反射地震学<sup>[4]</sup>和通讯系统<sup>[5]</sup>的重要的理论和应用课题。特别是在油田勘探地震数据处理问题中,白噪声信号去卷问题已有许多报道<sup>[6,7,9]</sup>,但有色噪声信号去卷问题报道很少<sup>[4,8]</sup>。本文讨论用多变量 AR 模型描写的有色噪声信号去卷问题。应用矩阵极小值原则提出了一种新的计算简单的次优递推去卷滤波器,它是 Tamura<sup>[1]</sup>的次优递推滤波器 (SMART) 的直接推广,同时应用极大后验 (MAP) 方法和渐消记忆指数加权方法提出了一种新的常的和时变的噪声统计估值器,具有无偏性和递推计算简单的优点,推广了 Sage 和 Husa<sup>[2]</sup>及作者<sup>[3]</sup>的结果,从而构成了一种新的自适应递推去卷滤波器。

## 二、次优递推去卷滤波器

设有色噪声信号  $\mathbf{x}(k)$  用如下 AR<sub>N</sub> 模型描写<sup>[4]</sup>:

$$\mathbf{x}(k+1) = \sum_{i=0}^N A_i(k) \mathbf{x}(k-i) + \mathbf{w}(k), \quad (1)$$

观测信号  $\mathbf{y}(k)$  用如下卷和模型描写<sup>[4]</sup>:

$$\mathbf{y}(k) = \sum_{i=0}^L H_i(k) \mathbf{x}(k-i) + \mathbf{v}(k), \quad (2)$$

其中信号  $\mathbf{x}(k)$  是  $n \times 1$  维向量,观测信号  $\mathbf{y}(k)$  是  $m \times 1$  维向量,  $A_i(k)$ 、 $H_i(k)$  是已

知的适当维矩阵,  $w(k)$  和  $v(k)$  是独立的高斯白噪声, 噪声统计分别为:

$$Ew(k) = q, Ev(k) = r; \text{Var}w(k) = Q, \text{Var}v(k) = R. \quad (3)$$

其中  $E$  是均值号,  $\text{Var}$  是方差号.

注意(2)式, 因为信号  $x(k)$  是以卷和形式被观测, 所以信号去卷问题是基于已知的观测数据  $(y(k), y(k-1), \dots, y(0))$  求信号  $x(k)$  的滤波估值  $\hat{x}(k)$ .

观测方程(2)包括文献[1]中的观测方程 ( $L=0$ ) 作为特例.

记滤波误差及方差阵分别为  $\tilde{x}(k) = x(k) - \hat{x}(k)$  和  $P(k) = E(\tilde{x}(k)\tilde{x}^T(k))$ ,  $T$  为转置号. 为了导出次优递推去卷滤波器, 下述假定及其解释同文献 [1]: (1)  $\text{Cov}(x(k), w(j)) = 0, \text{Cov}(x(k), v(j)) = 0, k = 0, -1, \dots, -\theta, \forall j$ ; (2)  $\text{Cov}(x(k), x(j)) = 0, k \neq j, k, j = 0, -1, \dots, -\theta$ ; (3) 当  $k \geq \theta + 1$  时, 假定  $\tilde{x}(k), \tilde{x}(k-1), \dots, \tilde{x}(k-\theta)$  是独立的; (4)  $\hat{x}(i) = Ex(i), \text{Var}x(i) = P(i), i = 0, -1, \dots, -\theta$ , 其中  $\theta = \max(N, L-1)$ ,  $\text{Cov}$  是协方差号.

在上述假定下, 对于无观测滞后 ( $L=0$ ) 情形, Tamura<sup>[1]</sup> 应用射影理论导出了一种计算简单的次优递推滤波器 (SMART), 它是普通 Kalman 滤波器的自然推广. 这里把 Tamura 的结果推广到带观测滞后 ( $L \neq 0$ ) 的情形.

假定滤波估值  $\hat{x}(k), \hat{x}(k-1), \dots, \hat{x}(k-\theta)$  已知时, 考虑  $x(k+1)$  的一步次优预报器:

$$\hat{x}(k+1|k) = \sum_{i=0}^N A_i(k)\hat{x}(k-i) + q, \quad (4)$$

引入次优新息

$$e(k+1) = y(k+1) - \hat{y}(k+1|k), \quad (5)$$

式中  $\hat{y}(k+1|k)$  是  $y(k+1)$  的一步次优预报, 由(2)式有

$$\hat{y}(k+1|k) = H_0(k+1)\hat{x}(k+1|k) + \sum_{i=0}^{L-1} H_{i+1}(k+1)\hat{x}(k-i) + r. \quad (6)$$

考虑信号  $x(k+1)$  的次优去卷滤波器

$$\hat{x}(k+1) = \hat{x}(k+1|k) + K(k+1)e(k+1) \quad (7)$$

应当选择滤波增益阵  $K(k+1)$  极小化性能指标

$$J = \text{tr}P(k+1) = E(\tilde{x}^T(k+1)\tilde{x}(k+1)), \quad (8)$$

式中  $\text{tr}$  为矩阵的迹,  $K(k+1)$  可由  $\partial J / \partial K(k+1) = 0$  求得.

记  $x(k+1)$  的一步预报误差及方差阵分别为  $\tilde{x}(k+1|k) = x(k+1) - \hat{x}(k+1|k)$  和  $P(k+1|k) = E(\tilde{x}(k+1|k)\tilde{x}^T(k+1|k))$ , 由假定 (1)–(4) 和式 (1)–(6) 易知:

$$\tilde{x}(k+1|k) = \sum_{i=0}^N A_i(k)\tilde{x}(k-i) + (w(k) - q), \quad (9)$$

$$P(k+1|k) = \sum_{i=0}^N A_i(k)P(k-i)A_i^T(k) + Q, \quad (10)$$

且有次优新息表达式:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}(k+1) = & H_0(k+1)\hat{\mathbf{x}}(k+1|k) + \sum_{i=0}^{L-1} H_{i+1}(k+1)\hat{\mathbf{x}}(k-i) \\ & + (\mathbf{v}(k+1) - \mathbf{r}), \end{aligned} \quad (11)$$

易知它是拟白噪声:

$$E\mathbf{e}(i) = \mathbf{0}, \quad i \geq 0; \quad (12)$$

$$E\mathbf{e}(i)\mathbf{e}^T(j) = B(i) + R; \quad E\mathbf{e}(i)\mathbf{e}^T(j) = O, \quad |i-j| > \theta. \quad (13)$$

其中  $B(i)$  的表达式为

$$\begin{aligned} B(i) = & H_0(i)P(i|i-1)H_0^T(i) + \sum_{s=0}^{L-1} H_{s+1}(i)P(i-1-s)H_{s+1}^T(i) \\ & + H_0(i) \sum_{s=0}^h A_s(i-1)P(i-1-s)H_{s+1}^T(i) \\ & + \left( \sum_{s=0}^h A_s(i-1)P(i-1-s)H_{s+1}^T(i) \right)^T H_0^T(i), \end{aligned} \quad (14)$$

式中  $h = \min(N, L-1)$ .

易导出次优滤波误差为

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(k+1) = & [I - K(k+1)H_0(k+1)] \left[ \sum_{i=0}^N A_i(k)\hat{\mathbf{x}}(k-i) + (\mathbf{w}(k) - \mathbf{q}) \right] \\ & - K(k+1) \left[ \sum_{i=0}^{L-1} H_{i+1}(k+1)\hat{\mathbf{x}}(k-i) + (\mathbf{v}(k+1) - \mathbf{r}) \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

于是有次优滤波误差方差阵  $P(k+1)$  为

$$\begin{aligned} P(k+1) = & [I - K(k+1)H_0(k+1)]P(k+1|k)[I - K(k+1)H_0(k+1)]^T \\ & + K(k+1) \left[ \sum_{i=0}^{L-1} H_{i+1}(k+1)P(k-i)H_{i+1}^T(k+1) + R \right] K^T(k+1) \\ & - [I - K(k+1)H_0(k+1)] \left[ \sum_{i=0}^h A_i(k)P(k-i)H_{i+1}^T(k+1) \right] K^T(k+1) \\ & - K(k+1) \left[ \sum_{i=0}^h A_i(k)P(k-i)H_{i+1}^T(k+1) \right]^T [I - K(k+1) \\ & \times H_0(k+1)]^T. \end{aligned} \quad (16)$$

利用矩阵迹的梯度运算公式<sup>[10]</sup>, 令  $\partial J / \partial K(k+1) = 0$ , 可求得次优滤波增益阵为

$$\begin{aligned} K(k+1) = & \left[ P(k+1|k)H_0^T(k+1) + \sum_{i=0}^h A_i(k)P(k-i)H_{i+1}^T(k+1) \right] \\ & \times \left\{ H_0(k+1)P(k+1|k)H_0^T(k+1) + \sum_{i=0}^{L-1} H_{i+1}(k+1)P(k-i)H_{i+1}^T(k+1) \right. \\ & + H_0(k+1) \left[ \sum_{i=0}^h A_i(k)P(k-i)H_{i+1}^T(k+1) \right] \\ & \left. + \left[ \sum_{i=0}^h A_i(k)P(k-i)H_{i+1}^T(k+1) \right]^T H_0^T(k+1) + R \right\}^{-1}. \end{aligned} \quad (17)$$

把(17)式代入(16)式整理可得:

$$P(k+1) = [I - K(k+1)H_0(k+1)]P(k+1|k) - K(k+1) \sum_{i=0}^h H_{i+1}(k+1)P(k-i)A_i^T(k). \quad (18)$$

综上所述有如下次优递推去卷滤波器:

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \hat{\mathbf{x}}(k+1|k) + K(k+1)\mathbf{e}(k+1), \quad (19)$$

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1|k) = \sum_{i=0}^N A_i(k)\hat{\mathbf{x}}(k-i) + \mathbf{q}, \quad (20)$$

$$\mathbf{e}(k+1) = \mathbf{y}(k+1) - H_0(k+1)\hat{\mathbf{x}}(k+1|k) - \sum_{i=0}^{L-1} H_{i+1}(k+1)\hat{\mathbf{x}}(k-i) - \mathbf{r}, \quad (21)$$

$$P(k+1|k) = \sum_{i=0}^N A_i(k)P(k-i)A_i^T(k) + Q, \quad (22)$$

$$K(k+1) = \left[ P(k+1|k)H_0^T(k+1) + \sum_{i=0}^h A_i(k)P(k-i)H_{i+1}^T(k+1) \right] \times \left\{ H_0(k+1)P(k+1|k)H_0^T(k+1) + \sum_{i=0}^{L-1} H_{i+1}(k+1)P(k-i)H_{i+1}^T(k+1) + H_0(k+1) \sum_{i=0}^h A_i(k)P(k-i)H_{i+1}^T(k+1) + \left[ \sum_{i=0}^h A_i(k)P(k-i)H_{i+1}^T(k+1) \right]^T H_0^T(k+1) + R \right\}^{-1}, \quad (23)$$

$$P(k+1) = [I - K(k+1)H_0(k+1)] - K(k+1) \sum_{i=0}^h H_{i+1}(k+1)P(k-i)A_i^T(k). \quad (24)$$

初值为  $\hat{\mathbf{x}}(-i) = \mathbf{x}_{i0}$ ,  $P(-i) = P_{i0}$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, \theta$ .

### 三、自适应噪声统计估值器

当噪声统计  $\mathbf{q}$ ,  $Q$ ,  $\mathbf{r}$ ,  $R$  是常的且未知时, 为了实现上述次优递推去卷滤波器, 要求给出噪声统计估值器。平行于 Sage 和 Husa<sup>[2]</sup> 或笔者<sup>[3]</sup>的推导, 可得到基于观测 ( $\mathbf{y}(k+1)$ ,  $\mathbf{y}(k)$ ,  $\dots$ ,  $\mathbf{y}(0)$ ) 的次优无偏极大后验 (MAP) 噪声统计估值器:

$$\hat{\mathbf{q}}(k+1) = \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^k \left( \hat{\mathbf{x}}(j+1) - \sum_{i=0}^N A_i(j)\hat{\mathbf{x}}(j-i) \right), \quad (25)$$

$$\hat{Q}(k+1) = \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^k \left( K(j+1)\mathbf{e}(j+1)\mathbf{e}^T(j+1)K^T(j+1) + P(j+1) - \sum_{i=0}^N A_i(j)P(j-i)A_i^T(j) \right), \quad (26)$$

$$\hat{\mathbf{r}}(k+1) = \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^k \left( \mathbf{y}(j+1) - H_0(j+1)\hat{\mathbf{x}}(j+1|j) - \sum_{i=0}^{L-1} H_{i+1}(j+1)\hat{\mathbf{x}}(j-i) \right), \quad (27)$$

$$\hat{R}(k+1) = \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^k (\boldsymbol{\epsilon}(j+1)\boldsymbol{\epsilon}^T(j+1) - B(j+1)). \quad (28)$$

事实上,由(12)、(19)和(20)式立刻有  $E\hat{\mathbf{q}}(k+1) = \mathbf{q}$ . 由(12)和(21)式立刻有  $E\hat{\mathbf{r}}(k+1) = \mathbf{r}$ . 由(13)式也立刻有  $E\hat{R}(k+1) = R$ . 最后依次把(13)、(14)、(22)、(23)和(24)式的转置代入(26)式引出  $E\hat{Q}(k+1) = Q$ . 这证明了无偏性.

易知(25)–(28)式的递推形式为:

$$\hat{\mathbf{q}}(k+1) = \frac{1}{k+1} \left( k\hat{\mathbf{q}}(k) + \hat{\mathbf{x}}(k+1) - \sum_{i=0}^N A_i(k)\hat{\mathbf{x}}(k-i) \right), \quad (29)$$

$$\hat{Q}(k+1) = \frac{1}{k+1} \left( k\hat{Q}(k) + K(k+1)\boldsymbol{\epsilon}(k+1)\boldsymbol{\epsilon}^T(k+1)K^T(k+1) + P(k+1) - \sum_{i=0}^N A_i(k)P(k-i)A_i^T(k) \right), \quad (30)$$

$$\hat{\mathbf{r}}(k+1) = \frac{1}{k+1} \left( k\hat{\mathbf{r}}(k) + \mathbf{y}(k+1) - H_0(k+1)\hat{\mathbf{x}}(k+1|k) - \sum_{i=0}^{L-1} H_{i+1}(k+1)\hat{\mathbf{x}}(k-i) \right), \quad (31)$$

$$\hat{R}(k+1) = \frac{1}{k+1} (k\hat{R}(k) + \boldsymbol{\epsilon}(k+1)\boldsymbol{\epsilon}^T(k+1) - B(k+1)), \quad (32)$$

相应的自适应递推去卷滤波器由(19)–(24)式组成,但其中噪声统计  $\mathbf{q}$ 、 $Q$ 、 $\mathbf{r}$ 、 $R$  应当分别用由(29)–(32)式递推计算的在时刻  $k$  的估值  $\hat{\mathbf{q}}(k)$ 、 $\hat{Q}(k)$ 、 $\hat{\mathbf{r}}(k)$ 、 $\hat{R}(k)$  近似代替. 初值为  $\hat{\mathbf{x}}(-i) = \mathbf{x}_{i0}$ ,  $P(-i) = P_{i0}$ ,  $i = 0, 1, \dots, \theta$ ;  $\hat{\mathbf{q}}(0) = \mathbf{q}_0$ ,  $\hat{Q}(0) = Q_0$ ,  $\hat{\mathbf{r}}(0) = \mathbf{r}_0$ ,  $\hat{R}(0) = R_0$ .

现在对于系统(1)和(2)假定它带有未知慢时变噪声统计:

$$E\mathbf{w}(k) = \mathbf{q}(k), E\mathbf{v}(k) = \mathbf{r}(k); \text{Var}\mathbf{w}(k) = Q(k), \text{Var}\mathbf{v}(k) = R(k). \quad (33)$$

利用渐消记忆指数加权法<sup>[10]</sup>,由(25)–(28)式可得到未知时变噪声统计  $\mathbf{q}(k)$ 、 $Q(k)$ 、 $\mathbf{r}(k)$ 、 $R(k)$  的递推估值器为

$$\hat{\mathbf{q}}(k+1) = (1-d_k)\hat{\mathbf{q}}(k) + d_k \left( \hat{\mathbf{x}}(k+1) - \sum_{i=0}^N A_i(k)\hat{\mathbf{x}}(k-i) \right), \quad (34)$$

$$\hat{Q}(k+1) = (1-d_k)\hat{Q}(k) + d_k \left( K(k+1)\boldsymbol{\epsilon}(k+1)\boldsymbol{\epsilon}^T(k+1)K^T(k+1) + P(k+1) - \sum_{i=0}^N A_i(k)P(k-i)A_i^T(k) \right), \quad (35)$$

$$\hat{\mathbf{r}}(k+1) = (1-d_k)\hat{\mathbf{r}}(k) + d_k \left( \mathbf{y}(k+1) - H_0(k+1)\hat{\mathbf{x}}(k+1|k) \right)$$

$$- \sum_{i=0}^{L-1} H_{i+1}(k+1) \hat{x}(k-i)), \quad (36)$$

$$\hat{R}(k+1) = (1 - d_k) \hat{R}(k) + d_k (\mathbf{e}(k+1) \mathbf{e}^T(k+1) - B(k+1)), \quad (37)$$

其中  $d_k = (1 - d)/(1 - d^{k+1})$ ,  $0 < d < 1$ ,  $d$  是遗忘因子。

相应的自适应递推去卷滤波器由(19)–(24)式组成,但其中  $q$ 、 $Q$ 、 $r$ 、 $R$  分别用由(34)–(37)式递推计算的估值  $\hat{q}(k)$ 、 $\hat{Q}(k)$ 、 $\hat{r}(k)$ 、 $\hat{R}(k)$  近似代替。这样(19)–(24)式和(34)–(37)式构成递推链,初值同前。

## 四、仿真例子

考虑单变量系统

$$x(k+1) = 0.7x(k) + 0.3x(k-1) + w(k), \quad (38)$$

$$y(k) = 0.8x(k) + 0.4x(k-1) + v(k). \quad (39)$$

其中  $x(0) = 0.7$ ,  $x(-1) = 0.5$ ,  $w(k)$  和  $v(k)$  是独立的高斯白噪声,带有未知的常

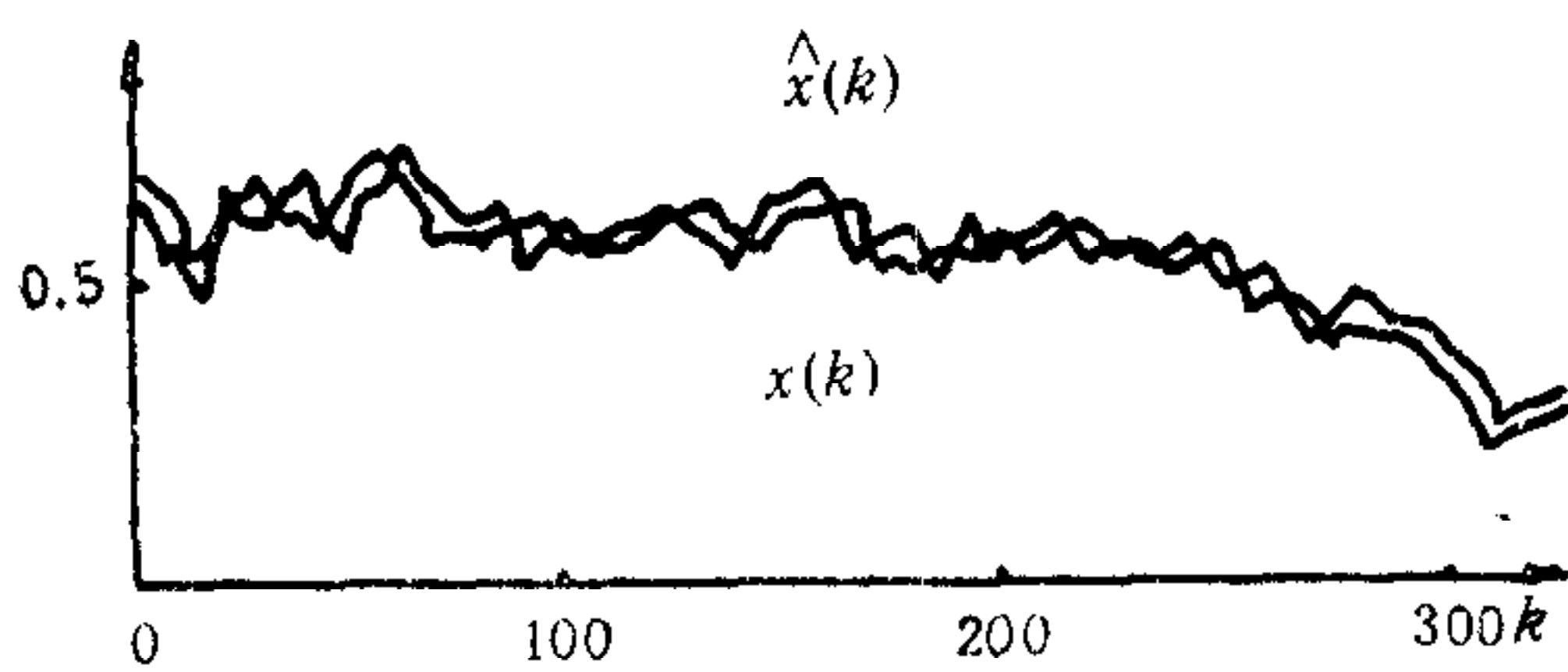


图1 自适应去卷滤波估值  $\hat{x}(k)$  与真实值  $x(k)$  比较

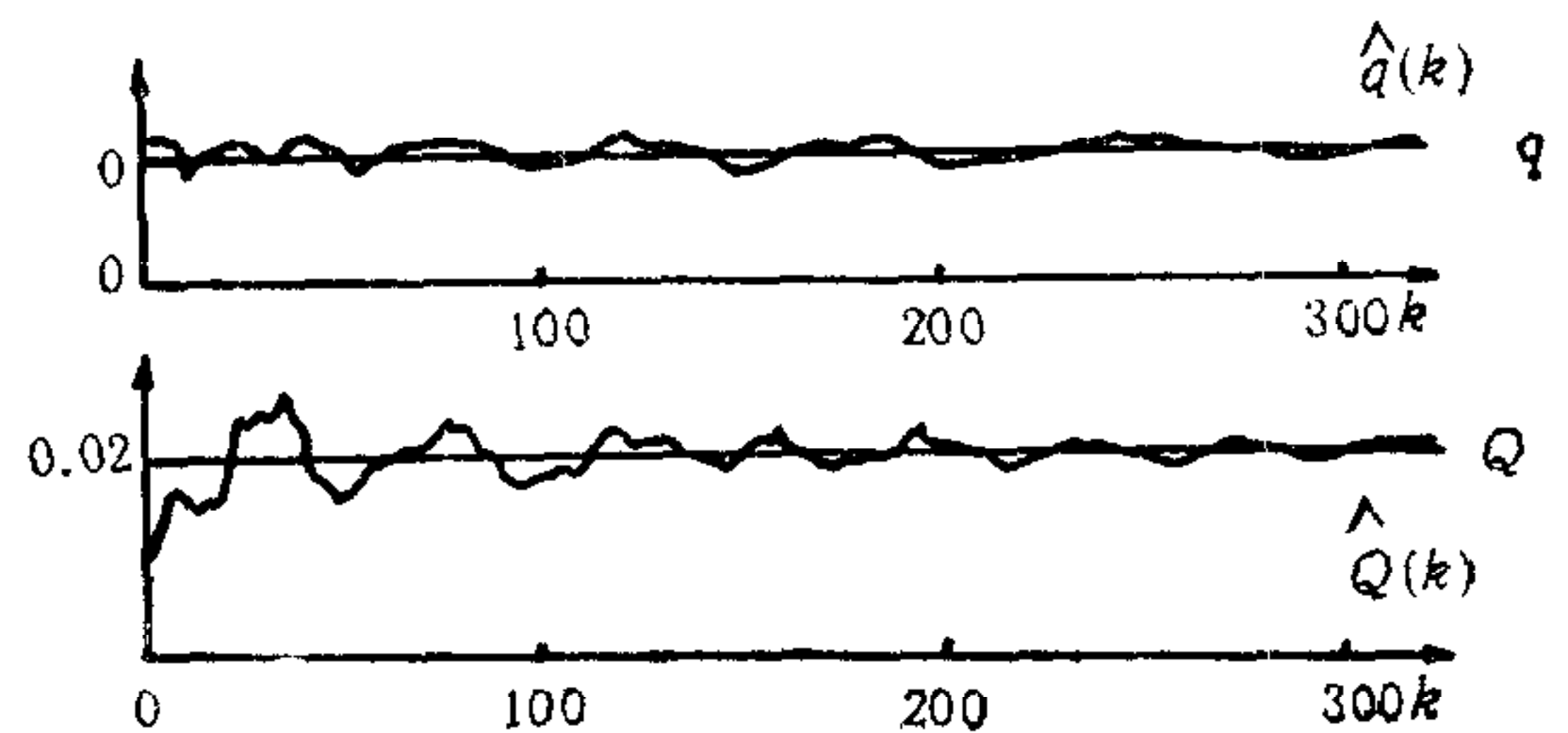


图2 噪声统计  $q$ 、 $Q$  与估值  $\hat{q}(k)$ 、 $\hat{Q}(k)$  比较

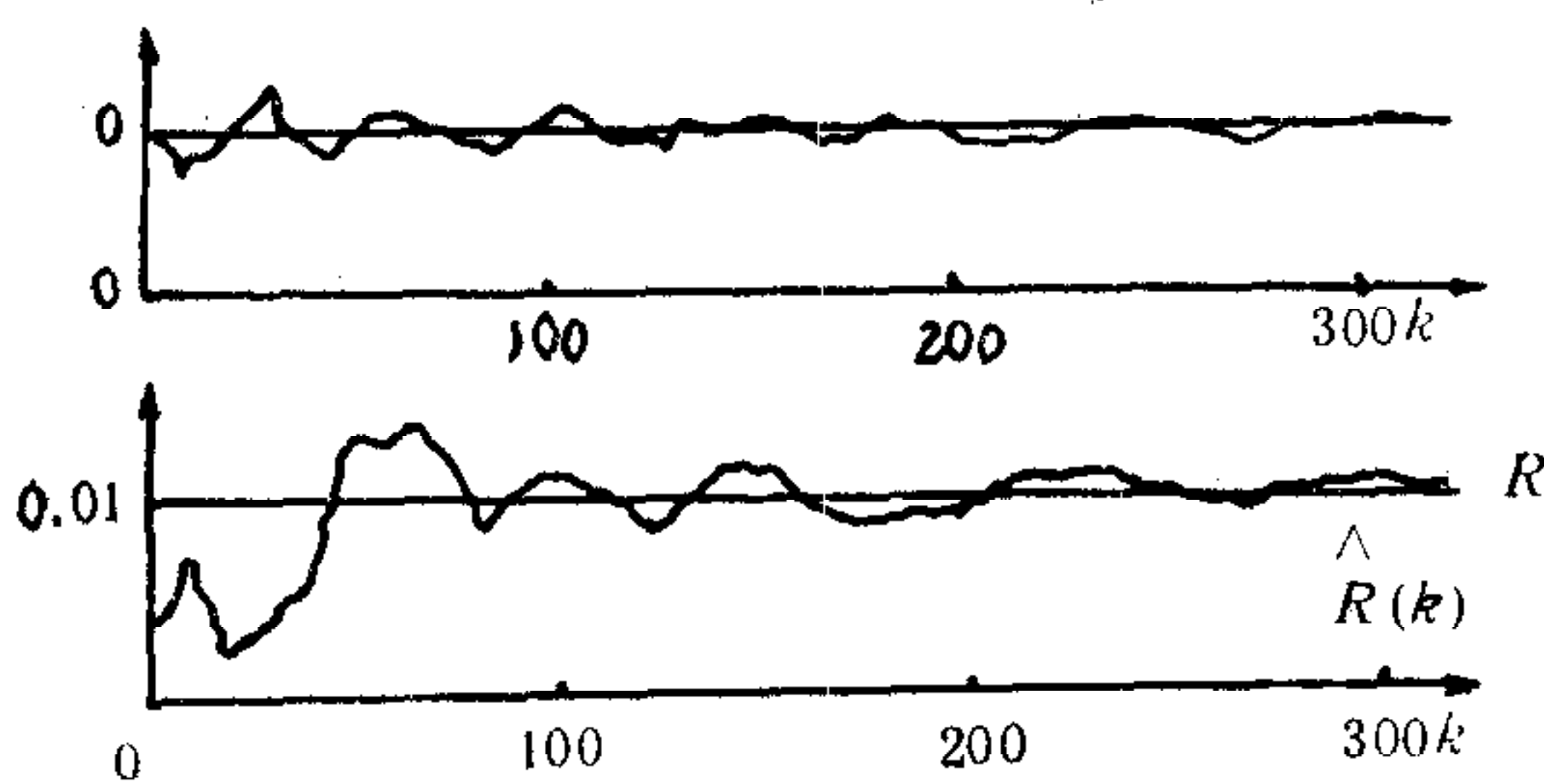


图3 噪声统计  $r$ 、 $R$  与估值  $\hat{r}(k)$ 、 $\hat{R}(k)$  比较

的噪声统计:

$$q = 0, Q = 0.02; r = 0, R = 0.01. \quad (40)$$

在仿真过程中,取  $k = 300$ ,初值为

$$\hat{x}(0) = 0.5, \hat{x}(-1) = 0.1,$$

$$P(0) = P(-1) = 1;$$

$$\hat{q}(0) = 0, \hat{Q}(0) = 0.01; \hat{r}(0) = 0, \hat{R}(0) = 0.004. \quad (41)$$

应用本文的递推算法(19)–(24)式和(29)–(32)式可得自适应递推去卷滤波器  $\hat{x}(k)$ 。仿真结果如图1至图3所示。由图1可看到自适应去卷滤波估值  $\hat{x}(k)$  跟踪真实值  $x(k)$  的变化,估值误差小,滤波器性能良好。由图2和图3看到自适应噪声统计估值  $\hat{q}(k)$ 、 $\hat{Q}(k)$ 、 $\hat{r}(k)$ 、 $\hat{R}(k)$  分别逼近于各自的真实值,具有良好的收敛性能。

## 参 考 文 献

- [1] Tamura, H, Ueno, N., Suboptimal Recursive Filter for the Distributed-Delay Model—SMART,

- 计测自动制御学会论文集, **11**(1975), 296—302.
- [2] Sage, A. P., Husa, G. W., Adaptive Filtering with Unknown Prior Statistics, Joint Auto. Contr. Conf., 1969, 760—769.
- [3] 邓自立, 郭一新, 多重时滞系统的自适应递推滤波器, 控制理论与应用, **1**(1984), No. 3, 124—129.
- [4] Crump, N. D., A Kalman Filter Approach to the Deconvolution of Seismic Signals, Geophysics, **39** (1974), No. 1.
- [5] Goodwin, G. C., Doan, H. B., Cantoni, A., Application of ARMA Models to Automatic Channel Equalization, Information Sciences, **22** (1980), No. 2, 107—129.
- [6] Mendel, J. M., Kormylo, J., New Fast Optimal White-Noise Estimators for Deconvolution, IEEE Trans. Geoscience Electronics, Vol. **GE-15** (1977), No. 1.
- [7] Mendel, J. M., White Noise Estimators for Seismic Data Processing in Oil Exploration, IEEE Trans. Automat. Contr. **AC-22** (1977), 694—706.
- [8] Goodwin, G. C., Sin, K. S., Adaptive Filtering, Prediction and Control, Prentice-Hall, Inc., 1984, 368—371.
- [9] 邓自立, 应用于地震数据去卷的自校正白噪声估值器, 自动化学报, **12**(1986), No. 2, 155—161.
- [10] 邓自立, 郭一新, 现代时间序列分析及其应用——建模、滤波、去卷、预报和控制, 知识出版社, 1989.

## THE ADAPTIVE RECURSIVE DECONVOLUTION FILTER

DENG ZILI

(Heilongjiang University)

XIE SANMING

(The Planning Committee of Shandong Province)

### ABSTRACT

This paper presents a new adaptive recursive deconvolution filter for signal deconvolution. It consists of two parts: (1) the suboptimal recursive deconvolution filter, which extends Tamura's<sup>[1]</sup> result; (2) the adaptive noise statistics estimators, which extend the results of Sage and Husa<sup>[2]</sup> and the authors<sup>[3]</sup>. It can be applied to oil seismic exploration<sup>[6,7]</sup> and communication systems<sup>[5,8]</sup>. A simulation example is given to show the usefulness of the proposed results.

**Key words** ——Deconvolution; signal restoration; adaptive recursive filter; noise statistics estimators.