第16卷 第1期　　自 动 化 学 报　　1
1990年1月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　Jan., 1990

分散化系统中的结构关联集及其应用

张红艺　文传源
（北京航空航天大学）

摘　　要

本文提出了分散化结构关联集（DSIS）的概念。它揭示了具有二个控制站的分散化系统中所具有不同类型的不变子空间之间的关系，并可用来确定分散化动态补偿器的结构。最后讨论了它在分散化动态补偿器干扰解耦问题中的应用。

关键词——分散化控制，干扰解耦，几何方法。

一、引　　言

在用几何方法研究多变量系统的综合控制问题时，系统的各种不变子空间起着主导作用[1]. 1975年 Hamano 和 Furuta[2] 把不变子空间的概念推广到具有二个控制站的分散化系统中. 继后，Leite[3] 企图推广到具有多个控制站的分散化系统中，可惜结论不完善. 本文针对具有二个控制站的分散化系统，研究了各个通道的相互影响，得到了一组具有特殊性质的分散化结构关联集，它可用来确定分散化动态补偿器的结构. 最后给出了用分散化动态补偿器进行干扰解耦的充要条件. 本文采用了几何方法中常用的符号，如：$\boldsymbol{k}$ 表示整数集 $\{1, 2, \cdots, k\}$，$\mathscr{X}$、$\mathscr{Y}$ 等表示线性空间或子空间，x、y 等表示空间中的元素，A、B 等表示矩阵或映象，$F|\varphi$ 表示映象 F 在子空间 φ 上的限制，$\mathrm{im}B$ 和 $\ker C$ 分别表示 B 的象空间和 C 的核空间，$\langle A|\mathrm{im}B\rangle$ 表示 (A, B) 能控子空间，即 $\sum_{i=1}^{n} A^{i-1}\mathrm{im}B$，$\boldsymbol{F}(\mathscr{V})$ 表示映象集 $\{F|(A+BF)\mathscr{V}\subset\mathscr{V}\}$; $\mathbf{G}(\mathscr{V})$ 表示映象集 $\{G|(A+GC)\mathscr{V}\subset\mathscr{V}\}$，$\boldsymbol{FG}(\mathscr{V})$ 表示映象集 $\{(F,G)|(A+BF+GC)\mathscr{V}\subset\mathscr{V}\}$，$\boldsymbol{F}_i\boldsymbol{G}_i(\mathscr{V})$ 表示映象集 $\{(F_i, G_i)|(A+B_iF_i+G_iC_i)\mathscr{V}\subset\mathscr{V}\}$. 其它特殊符号将在文中给予注释.

二、主 要 结 果

将下面的线性系统

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \tag{2.1}$$

本文于1987年3月16日收到.

按通道分解为具有二个控制站的分散化系统:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_1u_1(t) + B_2u_2(t), \\ y_i(t) &= C_ix(t), \quad i \in \mathbf{2}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

其中 x、u、y 是系统的状态、输入和量测输出; u_i、y_i 是第 i 个控制站的输入和量测输出; $u^T \triangleq [u_1^T u_2^T]$, $y^T = [y_1^T y_2^T]$, $B = [B_1 B_2]$, $C^T = [C_1^T C_2^T]$.

对 $\mathscr{X}$ 中的任意子空间 $\mathscr{V}$, 下面是所熟知的等价性质[4]:

1. $\mathscr{V}$ 是 (A, B)-不变的 $\Leftrightarrow \exists F: \mathscr{X} \to \mathscr{U}$, 使得 $F \in \boldsymbol{F}(\mathscr{V}) \Leftrightarrow A\mathscr{V} \subset \mathscr{V} + \mathrm{im}B$;

2. $\mathscr{V}$ 是 (C, A)-不变的 $\Leftrightarrow \exists G: \mathscr{Y} \to \mathscr{X}$, 使得 $G \in \mathbf{G}(\mathscr{V}) \Leftrightarrow A(\mathscr{V} \cap \ker C) \subset \mathscr{V}$.

定义 2.1. 对于子空间 $\mathscr{V} \subset \mathscr{X}$, 如果存在映象 $F: \mathscr{X} \to \mathscr{U}$, $G: \mathscr{Y} \to \mathscr{X}$, 使得 $(F, G) \in \boldsymbol{FG}(\mathscr{V})$, 则称 $\mathscr{V}$ 是 (C, A, B)-不变的.

命题 2.1. 任意子空间 $\mathscr{V} \subset \mathscr{X}$ 是 (C, A, B)-不变的充要条件是

$$A(\mathscr{V} \cap \ker C) \subset \mathscr{V} + \mathrm{im}B. \tag{2.3}$$

证明. 必要性显然. 充分性: 存在子空间 $\tilde{\mathscr{V}}$ 使得 $\mathscr{V} = (\mathscr{V} \cap \ker C) \oplus \tilde{\mathscr{V}}$. 令 $\{\alpha_i, i \in \boldsymbol{r}_1\}$ 和 $\{\beta_i, i \in \boldsymbol{r}_2\}$ 分别是 $\mathscr{V} \cap \ker C$ 和 $\tilde{\mathscr{V}}$ 的基底. 易知, $\{C\beta_i, i \in \boldsymbol{r}_2\}$ 是线性独立的. 由式(2.3)知, $\exists \bar{\alpha}_i \in \mathscr{V}$, $\boldsymbol{u}_i \in \mathscr{U}$, 有 $A\alpha_i = \bar{\alpha}_i + B\boldsymbol{u}_i$, $i \in r_1$. 故选取:

$F: \mathscr{X} \to \mathscr{U}$;

$\alpha_i \longmapsto -\boldsymbol{u}_i$, $i \in \boldsymbol{r}_1$;

$\beta_i \longmapsto 0$, $i \in \boldsymbol{r}_2$. 其余为零.

$G: \mathscr{Y} \to \mathscr{X}$;

$C\beta_i \longmapsto \bar{\beta}_i - A\beta_i$, $\bar{\beta}_i \in \mathscr{V}$, $i \in \boldsymbol{r}_2$, 其余为零.

那么可以验证 $(F, G) \in \boldsymbol{FG}(\mathscr{V})$.

现在, 把上面几种不变类型的不变子空间用到分散化系统中以描述各个通道之间的关系.

定义 2.2. 对于系统 (2.2), 如果有一组子空间集 $(\mathscr{V}_i \subset \mathscr{X}, i \in \mathbf{4})$ 满足下列条件:

$$\mathscr{V}_1 \text{ 是 } (C, A)\text{-不变的}; \tag{2.4a}$$

$$\mathscr{V}_2 \text{ 是 } (C_2, A, B_1)\text{-不变的}; \tag{2.4b}$$

$$\mathscr{V}_3 \text{ 是 } (C_1, A, B_2)\text{-不变的}; \tag{2.4c}$$

$$\mathscr{V}_4 \text{ 是 } (A, B)\text{-不变的}. \tag{2.4d}$$

并且,

$$\mathscr{V}_1 \subset \mathscr{V}_2 \cap \mathscr{V}_3, \quad \mathscr{V}_2 + \mathscr{V}_3 \subset \mathscr{V}_4, \tag{2.4e}$$

则称子空间集 $(\mathscr{V}_i, i \in \mathbf{4})$ 是系统(2.2)的分散化结构关联集(简写成 DSIS).

对系统(2.2),加入一个分散化动态补偿器:

$$\begin{aligned} \dot{w}_i(t) &= M_iy_i(t) + N_iw_i(t), \\ u_i(t) &= K_iy_i(t) + L_iw_i(t). \end{aligned} \quad i \in \mathbf{2}, \tag{2.5}$$

闭环后,得到一个增广的系统方程:

$$\dot{x}_e(t) = A_e x_e(t),$$
$$y_{ei}(t) = C_{ei} x_e(t),\quad i \in \mathbf{2}. \tag{2.6}$$

其中，$x_e \triangleq [x^T w_1^T w_2^T]^T \in \mathscr{X}_e \triangleq \mathscr{X} \oplus \mathscr{W}_1 \oplus \mathscr{W}_2$，$y_{ei} \triangleq [y_i^T \boldsymbol{w}_i^T]^T \in \mathscr{Y}_{ei} \triangleq \mathscr{Y}_i \oplus \mathscr{W}_i, i \in \mathbf{2}$，

$$A_e = \begin{bmatrix} A + B_1K_1C_1 + B_2K_2C_2 & B_1L_1 & B_2L_2 \\ M_1C_1 & N_1 & 0 \\ M_2C_2 & 0 & N_2 \end{bmatrix}, \tag{2.7}$$

$$C_{e1} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix},\quad C_{e2} = \begin{bmatrix} C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}. \tag{2.8}$$

假设 $\mathscr{V}_e$ 是 $\mathscr{X}_e$ 中的子空间，定义

$$\mathscr{V}_1^* = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathscr{X} \,\middle|\, \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathscr{V}_e \right\}, \tag{2.9a}$$

$$\mathscr{V}_2^* = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathscr{X} \mid \exists \boldsymbol{w}_1 \in \mathscr{W}_1 : \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{w}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathscr{V}_e \right\}, \tag{2.9b}$$

$$\mathscr{V}_3^* = \left\{ x \in \mathscr{X} \mid \exists \boldsymbol{w}_2 \in \mathscr{W}_2 : \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ w_2 \end{bmatrix} \in \mathscr{V}_e \right\}, \tag{2.9c}$$

$$\mathscr{V}_4^* = \left\{ x \in \mathscr{X} \mid \exists w_i \in \mathscr{W}_i,\ i \in \mathbf{2} : \begin{bmatrix} x \\ w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \in \mathscr{V}_4 \right\}. \tag{2.9d}$$

明显有：

$$\mathscr{V}_1^* \subset \mathscr{V}_2^* \cap \mathscr{V}_3^*,\quad \mathscr{V}_2^* + \mathscr{V}_3^* \subset \mathscr{V}_4^*. \tag{2.9e}$$

命题 2.2. 存在映象 K_i、L_i、M_i、N_i $(i \in \mathbf{2})$，使得 $\mathscr{X}_e$ 中的某个子空间 $\mathscr{V}_e$ 是 A_e-不变的充要条件为子空间集（$\mathscr{V}_i^*$，$i \in \mathbf{4}$）是个 DSIS.

证明. 因为 $A_e = \bar{A} + \sum_{i \in \mathbf{2}} B_{ei} F_{ei} C_{ei}$，其中

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad F_{ei} = \begin{bmatrix} K_i & L_i \\ M_i & N_i \end{bmatrix},\quad i \in \mathbf{2},$$

$$B_{e1} = \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\quad B_{e2} = \begin{bmatrix} B_2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix},$$

那么由文[5]知，$\exists K_i$、L_i、M_i、N_i $(i \in \mathbf{2})$ 使得 $A_e \mathscr{V}_e \subset \mathscr{V}_e$ 的充要条件为 $\mathscr{V}_e$ 满足下列关系式：

$$\bar{A}(\mathscr{V}_e \cap \ker C_e) \subset \mathscr{V}_e, \tag{2.10a}$$
$$\bar{A}(\mathscr{V}_e \cap \ker C_{e2}) \subset \mathscr{V}_e + \mathrm{im} B_{e1}, \tag{2.10b}$$
$$\bar{A}(\mathscr{V}_e \cap \ker C_{e1}) \subset \mathscr{V}_e + \mathrm{im} B_{e2}, \tag{2.10c}$$

$$\bar{A}\mathscr{V}_e \subset \mathscr{V}_e + \mathrm{im}B_{e1} + \mathrm{im}B_{e2}. \tag{2.10d}$$

其中 $C_e^T = [C_{e1}^T C_{e2}^T]$. 因此，只需证明式 (2.10$a$)—(2.10$d$) 与式 (2.4$a$)—(2.4$d$) 分别对应地等价即可. 这里，只证明 (2.10b)$\Longleftrightarrow$(2.4b)，其余类似.

(2.10b) $\Rightarrow$ (2.4b): 对 $\forall x \in \mathscr{V}_2^* \cap \ker C_2$, $\exists \boldsymbol{w}_1 \in \mathscr{W}_1$, 有

$$\begin{bmatrix} x \\ w_1 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathscr{V}_e \cap \ker C_{e2}.$$

由 (2.10b) 知

$$\exists \begin{bmatrix} x' \\ w_1' \\ w_2' \end{bmatrix} \in \mathscr{V}_e, \ \boldsymbol{u}_i \in \mathscr{U}_i \ (i \in \mathbf{2})$$

有:

$$\bar{A}\begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{w}_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ax \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ w_1' \\ w_2' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1\boldsymbol{u}_1 \\ \boldsymbol{u}_2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

于是有: $w_2' = 0$ 及 $Ax = \boldsymbol{x}' + B_1\boldsymbol{u}_1$, 且 $x' \in \mathscr{V}_2^*$, 故 $A(\mathscr{V}_2^* \cap \ker C_2) \subset \mathscr{V}_2^* + \mathrm{im}B_1$.

(2.10b) $\Leftarrow$ (2.4b): 对

$$\forall \begin{bmatrix} x \\ w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \in \mathscr{V}_e \cap \ker C_{e2},$$

必有 $\boldsymbol{w}_2 = 0$，所以 $x \in \mathscr{V}_2^* \cap \ker C_2$. 由(2.4$b$)知，$\exists x' \in \mathscr{V}_2^*$, $\boldsymbol{u}_1 \in \mathscr{U}_1$ 有 $Ax = \boldsymbol{x}' + B_1\boldsymbol{u}_1$，而且 $\exists w_1' \in \mathscr{W}_1$ 使得

$$\begin{bmatrix} x' \\ w_1' \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathscr{V}_e.$$

取 $\boldsymbol{u}_2 = -\boldsymbol{w}_1'$，则有:

$$\bar{A}\begin{bmatrix} x \\ w_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1' \\ w_1' \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

故 $\bar{A}(\mathscr{V}_e \cap \ker C_{e2}) \subset \mathscr{V}_e + \mathrm{im}B_{e1}$. 得证.

命题 2.3. 对任意的 DSIS ($\mathscr{V}_i$, $i \in \mathbf{4}$)，存在二个子空间 $\mathscr{W}_1$ 和 $\mathscr{W}_2$，使得 $\mathscr{X}_e$ 中某一子空间 $\mathscr{V}_e$ 所构成的子空间集 ($\mathscr{V}_i^*$, $i \in \mathbf{4}$) 是 DSIS，且 $\mathscr{V}_i = \mathscr{V}_i^*(i \in \mathbf{4})$. 进一步，存在映象 K_i、L_i、M_i、$N_i(i \in \mathbf{2})$ 使得 $\mathscr{V}_e$ 是 A_e-不变的.

命题 2.4. 给定一个 DSIS ($\mathscr{V}_i$, $i \in \mathbf{4}$) 和二个增广子空间 $\mathscr{W}_1 = \mathscr{V}_4/\mathscr{V}_3$、$\mathscr{W}_2 = \mathscr{V}_4/\mathscr{V}_2$. 如果 $\mathscr{V}_1 = \mathscr{V}_2 \cap \mathscr{V}_3$，那么存在映象 K_i、L_i、M_i、$N_i(i \in \mathbf{2})$ 使得 $\mathscr{X}_e$ 中某个子空间 $\mathscr{V}_e$ 是 A_e-不变的，且 $\mathscr{V}_i = \mathscr{V}_i^*$ ($i \in \mathbf{4}$).

证明. 定义映象 R_i: $\mathscr{V}_4 \to \mathscr{W}_i$, ($i \in \mathbf{2}$) 及子空间

$$\mathscr{V}_e=\left\{\begin{bmatrix}x\\R_1x\\R_2x\end{bmatrix}\middle|x\in\mathscr{V}_4\right\}.$$

按式 (2.9a)—(2.9d) 的定义,由 $\mathscr{V}_e$ 可得到子空间集 ($\mathscr{V}_i^*$, $i\in\mathbf{4}$). 下面证明 $\mathscr{V}_1=\mathscr{V}_1^*$.

若 $x\in\mathscr{V}_1^*$，那么

$$\begin{bmatrix}x\\0\\0\end{bmatrix}\in\mathscr{V}_e,$$

即 $R_1x=R_2x=0$，$x\in\mathscr{V}_i$，$i=2$，3，从而 $x\in\mathscr{V}_2\cap\mathscr{V}_3$，于是 $x\in\mathscr{V}_1$.

又若 $x\in\mathscr{V}_1=\mathscr{V}_2\cap\mathscr{V}_3$，则有 $R_1x=R_2x=0$，即

$$\begin{bmatrix}x\\0\\0\end{bmatrix}\in\mathscr{V}_e,$$

于是 $x\in\mathscr{V}_1^*$. 故 $\mathscr{V}_1=\mathscr{V}_1^*$.

同理可证 $\mathscr{V}_2=\mathscr{V}_2^*$, $\mathscr{V}_3=\mathscr{V}_3^*$,再由定义可得 $\mathscr{V}_4=\mathscr{V}_4^*$. 因此,($\mathscr{V}_i^*$, $i\in\mathbf{4}$) 是一个 DSIS. 故由命题 2.2 知，$\exists K_i$、L_i、M_i、$N_i(i\in\mathbf{2})$ 使得 $\mathscr{V}_e$ 是 A_e-不变的.

命题 2.5. 给定一个 DSIS ($\mathscr{V}_i$, $i\in\mathbf{4}$)，存在一个增广子空间和相应的子空间集 ($\bar{\mathscr{V}}_i$, $i\in\mathbf{4}$)，使得 ($\bar{\mathscr{V}}_i$, $i\in\mathbf{4}$) 是一个 DSIS，且具有 $\bar{\mathscr{V}}_1=\bar{\mathscr{V}}_2\cap\bar{\mathscr{V}}_3$.

上述命题说明命题2.4中的约束 $\mathscr{V}_1=\mathscr{V}_2\cap\mathscr{V}_3$ 并不失一般性. 同样地，在下面讨论中,总可假定 $\mathscr{V}_1=\mathscr{V}_2\cap\mathscr{V}_3$ 成立而所得结果不失一般性.

现在进一步讨论如何确定映象 K_i、L_i、M_i、$N_i(i\in\mathbf{2})$ 来构造动态补偿器 (2.5).

引理 2.1. 给定一个 DSIS ($\mathscr{V}_i$, $i\in\mathbf{4}$)，如果 $\mathscr{V}_1=\mathscr{V}_2\cap\mathscr{V}_3$，那么存在映象 $F\in\boldsymbol{F}(\mathscr{V}_4)$，且满足

$$F=\begin{bmatrix}K_1&0\\0&K_2\end{bmatrix}C+\begin{bmatrix}F_{01}\\F_{02}\end{bmatrix}\triangleq KC+F_0,\tag{2.11a}$$

$$(A+BF)\mathscr{V}_2\cap\ker C_2\subset\mathscr{V}_2,\tag{2.11b}$$

$$(A+BF)\mathscr{V}_3\cap\ker C_1\subset\mathscr{V}_3,\tag{2.11c}$$

$$F_{01}|\mathscr{V}_3=0,\quad F_{02}|\mathscr{V}_2=0.\tag{2.11d}$$

证明略,参见文[6].

引理 2.2. 给定一个 DSIS ($\mathscr{V}_i$, $i\in\mathbf{4}$) 具有 $\mathscr{V}_1=\mathscr{V}_2\cap\mathscr{V}_3$,存在$F$: $\mathscr{X}\to\mathscr{U}$、$G_{0i}$: $\mathscr{Y}_i\to\mathscr{V}_4(i\in\mathbf{2})$，具有 $F\in\boldsymbol{F}(\mathscr{V}_4)$ 以及

$$(F,\ G_{01})\in\boldsymbol{FG}_1(\mathscr{V}_3),\tag{2.12a}$$

$$(F,\ G_{02})\in\boldsymbol{FG}_2(\mathscr{V}_2).\tag{2.12b}$$

令 $\boldsymbol{P}(\mathscr{V}_i,\ i\in\mathbf{4})$ 是所有满足式(2.11)—(2.12)的映象对 (F, G) 组成的集合，其中 $G=[G_1,\ G_2]$，$G_i=B_iK_i+G_{0i}$，$i\in\mathbf{2}$.

定理 2.1. 对任一 DSIS ($\mathscr{V}_i$, $i\in\mathbf{4}$)，取二个增广子空间 $\mathscr{W}_1=\mathscr{V}_4/\mathscr{V}_3$, $\mathscr{W}_2=\mathscr{V}_4/\mathscr{V}_2$. 若 $\mathscr{V}_1=\mathscr{V}_2\cap\mathscr{V}_3$，那么存在 ($F$, G)$\in\boldsymbol{P}(\mathscr{V}_i,\ i\in\mathbf{4})$ 和 R_i: $\mathscr{V}_4\to\mathscr{W}_i$

$(i\in \mathbf{2})$，使得子空间

$$\mathscr{V}_e=\left\{\begin{bmatrix} x \\ R_1x \\ R_2x\end{bmatrix}\middle| x\in \mathscr{V}_4\right\}$$

为 A_e-不变的，且 A_e 具有形式：

$$A_e=\begin{bmatrix} A+B_1K_1C_1+B_2K_2C_2 & B_1F_{01}R_1^+ & B_2F_{02}R_2^+ \\ -R_1G_{01}C_1 & R_1(A+BF+G_{01}C_1)R_1^+ & 0 \\ -R_2G_{02}C_2 & 0 & R_2(A+BF+G_{02}C_2)R_2^+\end{bmatrix}.$$

其中 R_i^+ 是 R_i 的右逆。

证明．因为 $\boldsymbol{P}(\mathscr{V}_i,\ i\in \mathbf{4})$ 非空，任取一 $(F,G)\in \boldsymbol{P}(\mathscr{V}_i, i\in \mathbf{4})$．由于 $F_{01}|\mathscr{V}_3=0$，所以取 L_1 使得 $L_1R_1=F_{01}$；又由 $\mathrm{im}G_{01}\subset\mathscr{V}_4$，可取 $M_1=-R_1G_{01}$．同样地，可取 $L_2R_2=F_{02}$，$M_2=-R_2G_{02}$．最后定义 N_i 是满足下式的诱导映象：

$$N_iR_i=R_i(A+BF+G_{0i}C_i)|\mathscr{V}_4,\ i\in \mathbf{2}.$$

注意到 R_i 是满射，故 R_i^+ 存在．于是构造了 A_e，直接可以验算 $\mathscr{V}_e$ 是 A_e-不变的．

三、分散化动态补偿器干扰解耦

研究下列分散化系统：

$$\begin{aligned}\dot{x}(t)&=Ax(t)+\sum_{i\in 2}B_i\boldsymbol{u}_i(t)+Eq(t),\\ y_i(t)&=C_ix(t),\quad i\in \mathbf{2},\\ z(t)&=Dx(t).\end{aligned}\tag{3.1}$$

其中 q 是干扰输入，z 是受控输出，其余按式(2.2)中的定义．

若加入分散化动态补偿器式(2.5)，则增广的系统方程为：

$$\begin{aligned}\dot{x}_e(t)&=A_ex_e(t)+E_eq(t),\\ z(t)&=D_ex_e(t).\end{aligned}\tag{3.2}$$

其中 x_e、A_e 同式(2.6)—(2.7)，

$$E_e=\begin{bmatrix} E \\ 0 \\ 0\end{bmatrix},\ D_e=[D\ 0\ 0].$$

分散化动态干扰解耦问题是通过确定增广子空间 $\mathscr{W}_i$ 及式(2.5)中的映象 K_i、L_i、M_i、N_i，$(i\in \mathbf{2})$，使得干扰 $q(t)$ 不影响受控输出，即满足

$$\langle A_e|\mathrm{im}E_e\rangle\subset\ker D_e.\tag{3.3}$$

命题 3.1. 分散化动态干扰解耦问题可解的充要条件是存在一个 DSIS $(\mathscr{V}_i^*, i\in \mathbf{4})$ 具有

$$\mathrm{im}E\subset\mathscr{V}_1^*\subset\mathscr{V}_4^*\subset\ker D.\tag{3.4}$$

证明．由文[1]知，式(3.3)成立$\Longleftrightarrow$存在一个 A_e-不变子空间 $\mathscr{V}_e\subset\mathscr{X}_e$，有

$$\mathrm{im}E\oplus\mathscr{O}_1\oplus\mathscr{O}_2\subset\mathscr{V}_e\subset\ker D\oplus\mathscr{W}_1\oplus\mathscr{W}_2.$$

再由命题 2.2 知，$\mathscr{V}_e$ 是 A_e-不变的$\Longleftrightarrow$子空间集（$\mathscr{V}_i^*$，$i\in\mathbf{4}$）是一个 DSIS. 最后注意到下面关系式：

$$\mathrm{im}E\oplus\mathscr{O}_1\oplus\mathscr{O}_2\subset\mathscr{V}_e\Longleftrightarrow\mathrm{im}E\subset\mathscr{V}_1^*,$$

$$\mathscr{V}_e\subset\ker D\oplus\mathscr{W}_1\oplus\mathscr{W}_2\Longleftrightarrow\mathscr{V}_4^*\subset\ker D.$$

由此命题可证.

由上述命题及命题 2.3 可得：

定理 3.1. 对任意 DSIS（$\mathscr{V}_i$，$i\in\mathbf{4}$），分散化动态干扰解耦问题可解$\Longleftrightarrow\mathrm{im}\,E\subset\mathscr{V}_1\subset\mathscr{V}_4\subset\ker D$.

推论 3.1. 若取 $L_i=0$、$M_i=0$、$N_i=0$，$i\in\mathbf{2}$，那么干扰解耦问题可解$\Longleftrightarrow$存在一个 DSIS（$\mathscr{V}_i$，$i\in\mathbf{4}$）具有 $\mathrm{im}E\subset\mathscr{V}_1=\mathscr{V}_4\subset\ker D$.

再由定理 2.1 可推得下面结果.

定理 3.2. 对一个 DSIS（$\mathscr{V}_i$，$i\in\mathbf{4}$）具有 $\mathscr{V}_1=\mathscr{V}_2\cap\mathscr{V}_3$，那么存在二个子空间 $\mathscr{W}_i(i\in\mathbf{2})$，其维数分别为 $\dim\mathscr{V}_4-\dim\mathscr{V}_3$，$\dim\mathscr{V}_4-\dim\mathscr{V}_2$，使得分散化动态干扰解耦问题可解$\Longleftrightarrow\mathrm{im}\,E\subset\mathscr{V}_1\subset\mathscr{V}_4\subset\ker\,D$.

例. 研究下列系统：

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}1&0&1&1\\2&0&1&1\\1&1&0&1\\0&1&0&0\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix}\boldsymbol{u}_1(t)+\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}\boldsymbol{u}_2(t)+\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}q(t),$$

$$y_1(t)=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}x(t),\quad y_2(t)=[\,1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\,]x(t),$$

$$z(t)=[\,0\ \ 1\ \ 0\ \ 0\,]x(t).$$

选取：

$$\mathscr{V}_2=\mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right\},\quad \mathscr{V}_3=\mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right\},$$

$$\mathscr{V}_1=\mathscr{V}_2\cap\mathscr{V}_3,\quad \mathscr{V}_4=\mathscr{V}_2+\mathscr{V}_3.$$

易验证（$\mathscr{V}_i$，$i\in\mathbf{4}$）是一个 DSIS，且满足定理 3.2 中的条件，故分散化动态干扰解耦问题可解. 实际上选取：

$$\dim\mathscr{W}_1=\dim\mathscr{V}_4-\dim\mathscr{V}_3=1,\quad \dim\mathscr{W}_2=\dim\mathscr{V}_4-\dim\mathscr{V}_2=0,$$

$$\dot{\boldsymbol{w}}_1(t)=[\,0\ \ 1\,]y_1(t),\quad \boldsymbol{u}_1(t)=-[\,0\ \ 1\,]y_1(t)-\boldsymbol{w}_1(t),\quad \boldsymbol{u}_2(t)=-y_2(t).$$

则实现干扰解耦.

四、结　　语

由本文可见，用 DSIS 能够刻划各个控制站之间的相互影响，并能确定分散化动态补

偿器的结构。须指出，对于控制站个数大于2的分散化系统，DSIS 中的子空间个数将随着控制站的个数增加而急剧增加，因而研究起来非常复杂。

目前，分散化控制综合理论比较薄弱。因此，DSIS 概念给这一领域带来了新的研究途径[6]。这里虽然只讨论了分散化动态干扰解耦问题，但它还可用来研究分散化稳定补偿器、分散化观测器等综合问题。

参 考 文 献

[1] Wonham, W. M., Linear Multivariable Control, Springer-Verlag, 1974.

[2] Hamano, F. and Furuta, K., Localization of Disturbances and Output Decomposition in Decentralized Linear Multivariable Systems, *Int. J. Control*, **22** (1975), 4, 551—562.

[3] Leite, V. M. P., Disturbance Decoupling in Decentralized Linear Systems by Non-dynamic Feedback of State or Measurement, *Int. J. Control*, **42**(1985) 4, 913—937.

[4] Schumacher, J. M., Regulator Synthesis Using (C, A, B)-Pairs, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **AC-27** (1982), 6, 1211—1221.

[5] 张红艺，文传源，分散化动态干扰解耦及输出分解，控制理论及其应用年会论文集，1987.

[6] 张红艺，分散化和递阶控制系统的结构特性及大系统辨识的数值问题，北京航空航天大学博士论文，1989.

STRUCTURAL INTERCONNECTED SETS IN DECENTRALIZED SYSTEMS AND ITS APPLICATION

ZHANG HONGYI WEN CHUANYUAN

(Beijing University of Aeronautics and Astronautics)

ABSTRACT

The concept of decentralized structural interconnected sets (DSIS) is presented in this paper. It reveals the relations between different types of invariant subspaces in decentralized systems with two control stations, and can be used to determine the structure of decentralized dynamic compensators. Finally, its application to the dynamic disturbance decoupling problem is discussed.

Key words ——Decentralized control; disturbance decoupling; geometric approach.