第16卷 第1期　　自 动 化 学 报　　Vol. 16, No. 1
1990 年 1 月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　Jan., 1990

利用超稳定性理论证明随机自适应控制算法的稳定性

何勤奋　史　维
(东　南　大　学)

摘　　要

超稳定性理论是自适应控制稳定性证明的有力工具，但至今它只限于确定性系统．通过对超稳定性理论进一步研究和算法结构变化，本文给出了利用超稳定性理论证明随机自适应控制(特别是 Goodwin 的随机逼近法)的稳定性．结果表明，与目前的证明方法——Martingale 函数法和 Ljung 的 ODE 法相比，超稳定性方法有相当的优越性．它不需要象 Martingale 函数法那样去构造一个相当困难的随机 Lyapunov 函数，也可放松 ODE 法所必需的系统噪声平稳的条件.

关键词——超稳定性，正实函数，自适应控制.

一、引　　言

本文所用记号：β_0、β_1 和 β_2 分别表示实数、正实数和非负实数，H 为以 u 为输入、y 为输出的系统，Z 为超前算子，$\langle u, y\rangle = \sum\limits_{i=1}^{T} u_i y_i$，$\|u\|_T^2 = \sum\limits_{i=1}^{T} u_i^2$.

目前证明随机自适应控制稳定性的工具只是鞅论（Martingale 函数法）和常微分方程（Ljung 的 ODE 法）. Martingale 函数法[1-3]由于要构造一个能量函数，这对随机系统是相当困难的；ODE 法[4]是从随机过程谱理论出发，故要求系统噪声平稳．另外，ODE 法还不能证明自适应控制算法中状态的有界性[1]，因此限制了它的应用.

超稳定性理论对确定自适应控制稳定性证明的优越性是众所周知的[5-8]．本文从超稳定性理论出发，对随机闭环系统进行了深入研究，从而成功地进行了随机自适应控制的稳定性证明，克服了以往方法的缺点和不足.

二、有关超稳定性理论的研究

定义 1.　*A*）若 $\langle u, y\rangle_T \geqslant \beta_0$，记 $H\in P$.

B）若 $\langle u, y\rangle_T \geqslant \beta_1'\|y\|_T^2 + \beta_0'$，记 $H\in SP$.

本文于 1987 年 5 月 9 日收到.

C）若 $\langle u, y\rangle_T \geqslant \beta_1''\|u\|_T^2 + \beta_0''$，记 $H \in \overline{SP}$.

在系统 $H(Z^{-1})$ 输出端引入时变因子 $\alpha(T)$，使系统 H 变成 H^*，即 $H^* = \alpha(T)H(Z^{-1})$，$u_T^* = u_T$，$y_T^* = \alpha(T)y_T$，有：

引理 1. A）若 $\alpha(T) > 0$，$\alpha(T+1) \leqslant \alpha(T)$，$H$ 正实，则 $H^* \in P$.

B）若 $\alpha(T) > 0$，$\alpha(T+1) \leqslant \alpha(T)$，$\lim\limits_{T\to\infty}\alpha(T) = 0$，$\langle u^*, y^*\rangle_T \leqslant \beta_0$，$H$ 严格正实，则 $\lim\limits_{T\to\infty}\alpha(T)\|y\|_T^2 = 0$，$\lim\limits_{T\to\infty}\alpha(T)\|u\|_T^2 = 0$.

证. A）
$$\langle u^*, y^*\rangle_T = \sum_{i=1}^{T}\alpha(i)u_iy_i = \sum_{i=1}^{T}\alpha(i)\left[\sum_{j=1}^{i} u_jy_j - \sum_{j=1}^{i-1} u_jy_j\right]$$
$$= \sum_{i=1}^{T}\left[\alpha(i)\sum_{j=1}^{i} u_jy_j - \alpha(i-1)\sum_{j=1}^{i-1} u_jy_j\right]$$
$$- \sum_{i=1}^{T}[\alpha(i) - \alpha(i-1)]\sum_{j=1}^{i} u_jy_j.$$

因为 H 正实，$\alpha(T+1) \leqslant \alpha(T)$，有 $\langle u^*, y^*\rangle_T \geqslant \alpha(T)\sum\limits_{i=1}^{T} u_iy_i + \beta_0 \geqslant \beta_0'$.

B）因为 H 严格正实，$\alpha(T+1) \leqslant \alpha(T)$，利用严格正实特性[9]，有
$$\langle u^*, y^*\rangle_T = \sum_{i=1}^{T}\alpha(i)u_iy_i \geqslant \beta_1\sum_{i=1}^{T}\alpha(i)u_i^2 + \beta_0,$$
$$\langle u^*, y\ \rangle_T = \sum_{i=1}^{T}\alpha(i)u_iy_i \geqslant \beta_1'\sum_{i=1}^{T}\alpha(i)y_i^2 + \beta_0'.$$

再利用 Kronecher 引理，即可得证.

现在建立带有噪声 ω_i 的闭环系统如图 1.

设 $\alpha(T) > 0$，可对图 1 作等效变换得图 2. 若要 y_{1k} 收敛到零，至少 $\alpha(T)\omega_T$ 输

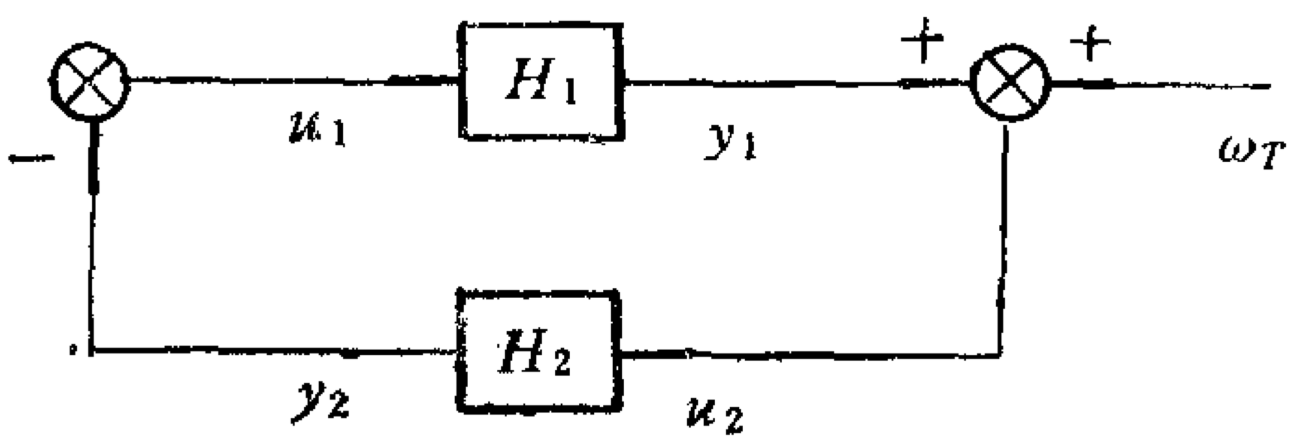

图 1

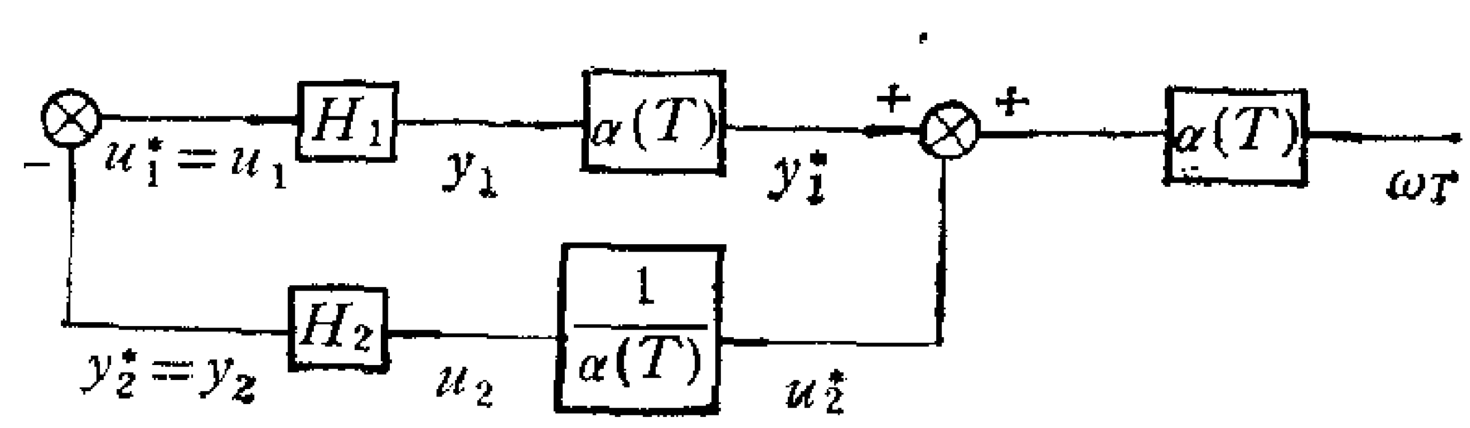

图 2

入端引入的能量应有限，即 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}[\alpha(i)\omega_i]^2 < \infty$；若 $\omega_k \leqslant \beta_2$，有 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\alpha^2(i) \leqslant \beta_2'$. 由此可知，$\alpha(T)$ 必是一个递减序列，与 $1/T^p(p > 1/2)$ 相当. 另外，当 $H_1(Z^{-1})$ 严格正实，$\lim\limits_{T\to\infty}\alpha(T) = 0$，$\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_{1i}^*y_{1i}^* < \infty$，由引理 1 得 $\lim\limits_{T\to\infty}\alpha(T)\sum\limits_{i=1}^{T} u_{1i}^2 = 0$，$\lim\limits_{T\to\infty}\alpha(T)\sum\limits_{i=1}^{T} y_{1i}^2 = 0$. 然而，希望 $\lim\limits_{T\to\infty} u_{1T} = 0$，$\lim\limits_{T\to\infty} y_{1T} = 0$，故 $\alpha(T)$ 应与 $1/T^p(p \leqslant 1)$ 相当.

为了方便取 p 为整数，仅有 $p = 1$ 适当. 所以 $\alpha(T)$ 只可取 $1/T$，或有此特性的递减序列. 根据图 2 有：$\langle \alpha(i)w_i, y_{2i}^*\rangle_T = \langle u_{1i}^*, y_{1i}^*\rangle_T + \langle u_{2i}^*, y_{2i}^*\rangle_T$.

由超稳定性理论证明确定性系统的稳定性可知：若 $\langle\alpha(i)w_i, y_{2i}^*\rangle_T$ 有界，则 $\langle u_{1i}^*, y_{1i}^*\rangle_T + \langle u_{i2}^*, y_{i2}^*\rangle_T \leqslant \beta_0$. 这样带 ω_i 随机噪声的问题就近似成了不带噪声的确定性问题了，$\alpha(i)\omega_i$ 犹如一个具有有限能量的输入或一个系统的初始能量. 下面给出严格的数学描述和证明.

引理 2. ω_i 是概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的随机序列，ω_i 是 $\mathscr{F}_i$ 可测，$\mathscr{F}_i$ 是一个递增 σ 子环，且属于 $\mathscr{F}$ 环，取 $X_T = \langle\alpha(i)\omega_i, y_{2i}^*\rangle_T$，$R_T = E[\alpha(i+1)\omega_{i+1}y_{2i+1}^*/\mathscr{F}_T]$. 根据随机过程收敛定理[10]，若 $R_T > 0^{a.s}$，$\sum_{i=1}^{\infty} R_i < \infty^{a.s}$，$H_1^*, H_2^* \in P$，则 $\langle u_{1i}^*, y_{1i}^*\rangle_T \leqslant \beta_0^{a.s}$，$\langle u_{2i}^*, y_{2i}^*\rangle_T \leqslant \beta_0'^{a.s}$.

三、证明随机自适应控制的稳定性

设被控对象为：

$$A(Z^{-1})y_i = B(Z^{-1})u_{i-1} + C(Z^{-1})\omega_i, \tag{3.1}$$

这里 $A(Z^{-1}), B(Z^{-1}), C(Z^{-1})$ 分别为 n, m, l 阶差分多项式. $\mathscr{F}_i$ 由 σ 子环 $\{\omega_j, j \leqslant i\}$ 构成，且满足

$$E\{\omega_{T+1}/\mathscr{F}_T\} = 0^{a.s},\ E\{\omega_{T+1}^2/\mathscr{F}_T\} = \sigma_{T+1}^{2\ a.s},\ \lim_{T\to\infty}\|\omega\|_T^2/T < \infty^{a.s}. \tag{3.2}$$

根据上节理论，先把算法等效成图 1 形式的误差模型，再引入 $\alpha(T)$ 进行稳定性分析. 下面以随机逼近法[3]为例说明整个证明过程.

1. 建立误差闭环系统

令
$$\begin{aligned} e_k^0 &= y_k - y_{mk} = y_k - \phi_{k-1}^T\hat{\theta}_{k-1} = (1/C(Z^{-1}))(-\phi_{k-1}^T\tilde{\theta}_{k-1}) + \omega_k \\ &= e_k' + \omega_k. \end{aligned} \tag{3.3}$$

这里
$$\left.\begin{aligned} \phi_{k-1}^T &= [y_{k-1}, \cdots, y_{k-p}, u_{k-1}, \cdots, u_{k-m}, -y_{mk-1}, \cdots, -y_{mk-l}], \\ \hat{\theta}_k &= [\hat{c}_{1k} - \hat{a}_{1k}, \cdots, \hat{c}_{pk} - \hat{a}_{pk}, \hat{b}_{1k}, \cdots, \hat{b}_{mk}, \hat{c}_{1k}, \cdots, \hat{c}_{lk}], \\ \theta_0 &= [c_1 - a_1, \cdots, c_p - a_p, b_1, \cdots, b_m, c_1, \cdots, c_l], \\ \tilde{\theta}_k &= \hat{\theta}_k - \theta_0,\ p = \max[n, l]. \end{aligned}\right\} \tag{3.4}$$

自适应算法：

$$\left.\begin{aligned} \hat{\theta}_k &= \hat{\theta}_{k-1} + a\phi_{k-1}e_k^0/\gamma(k), \\ \gamma(k) &= \gamma(k-1) + \phi_{k-1}^T\phi_{k-1},\ \gamma(0) > 0. \end{aligned}\right\} \tag{3.5}$$

对应图 1 有：

$$\left.\begin{aligned} u_{1k} &= -y_{2k} = -\phi_{k-1}^T\tilde{\theta}_{k-1}, \\ u_{2k} &= y_{1k} + \omega_k = e_k' + \omega_k = (1/C(Z^{-1}))(-\phi_{k-1}^T\tilde{\theta}_{k-1}) + \omega_k = H_1u_{1k} + \omega_k. \end{aligned}\right\} \tag{3.6}$$

2. 稳定性证明

定理 1. 若 $C(Z^{-1}) - a/2$ 严格正实，$B(Z^{-1})$ 渐近稳定，$|y_{mT}| \leqslant \beta_0$，则 A) $|\tilde{\theta}_T| < \beta_0^{a.s}$，B) $\lim_{T\to\infty}\gamma(T)/T < \infty^{a.s}$，C) $\lim_{T\to\infty}\|e'\|_T^2/T = 0^{a.s}$.

证. 应用已有的超稳定性理论证明确定自适应控制稳定性的技术及误差模型变换，可得图 1 的等效变换为图 3. 令

$$h_k = a\phi_{k-1}^T\phi_{k-1}/2\gamma(k), \tag{3.7}$$

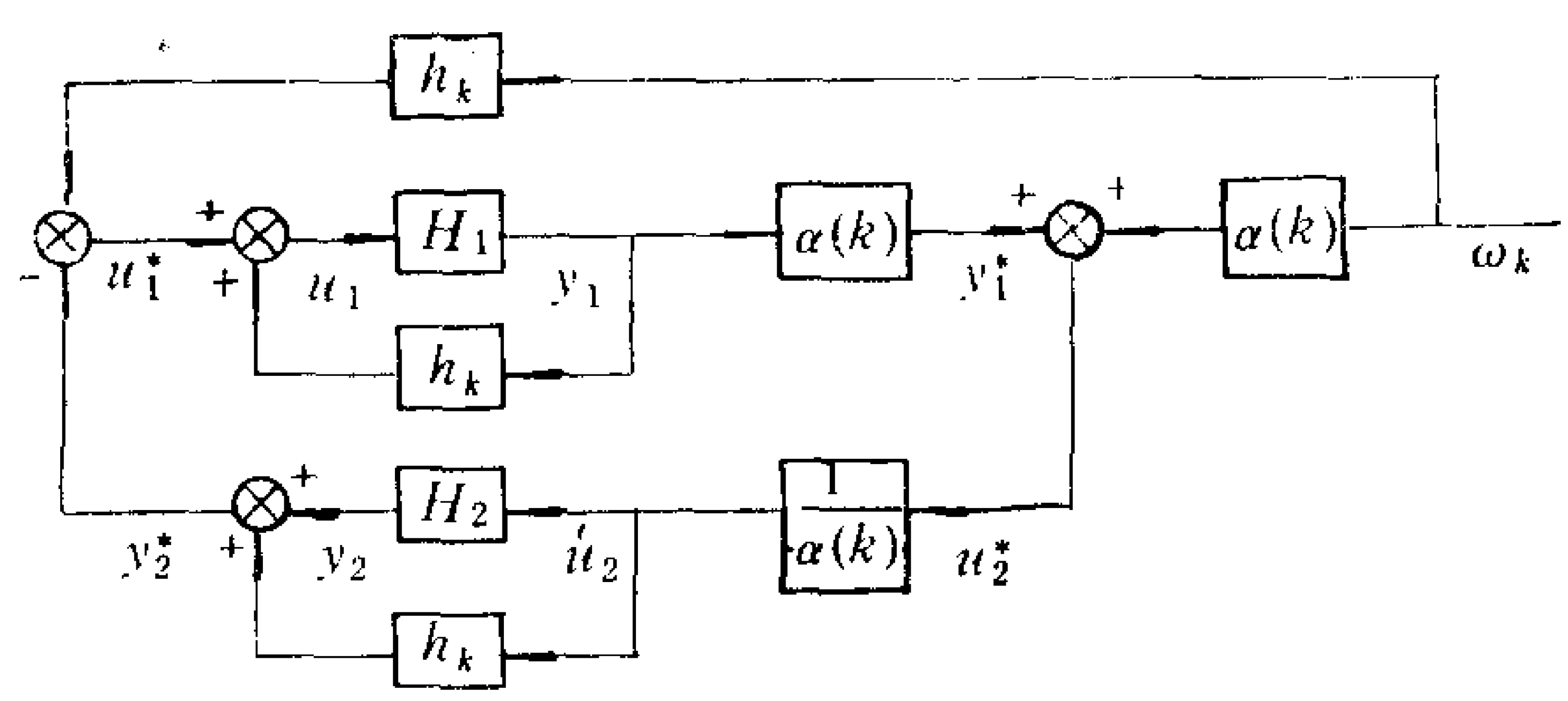

图 3

因 y_{mk} 不恒为零且有界，ϕ_k 要求是有界的，故 $1/\gamma(k)$ 有序列 $1/k$ 特性，可取 $\alpha(k) = 1/\gamma(k)$.

又由(3.4)、(3.5)、(3.7)式可知，$\gamma(T)$、ϕ_{T-1}、h_T 是 $\mathscr{F}_{T-1}$ 可测的，由图 3 得：

$$\langle u_{1k}^*, y_{1k}^*\rangle_T + \langle u_{2k}^*, y^*_k\rangle_T = \langle \alpha(k)\omega_k, y_{2k}^* + h_k y_{1k}\rangle_T. \tag{3.8}$$

取 $X_T = \langle \alpha(k)\omega_k, y^*_k + h_k y_{1k}\rangle_T$，则

$$\begin{aligned} R_T &= E\{\alpha(T+1)\omega_{T+1}(y_{2T+1}^* + h_{T+1}y_{1T+1}) \mid \mathscr{F}_T\} \\ &= E\{\alpha(T+1)\omega_{T+1}y_{2T+1} \mid \mathscr{F}_T\} + E\{\alpha(T+1)\omega_{T+1}h_{T+1}u_{2T+1} \mid \mathscr{F}_T\} \\ &\quad + E\{\alpha(T+1)\omega_{T+1}h_{T+1}y_{1T+1} \mid \mathscr{F}_T\} \\ &= a\phi_T^T\phi_T E\{\omega_{T+1}^2 \mid \mathscr{F}_T\}/\gamma^2(T) = a\phi_T^T\phi_T\sigma_T^2/\gamma(T) \geqslant 0^{a.s}, \end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} R_i = \sum_{i=1}^{\infty} a\phi_i^T\phi_i\sigma_i^2/\gamma(i) \leqslant a\beta_2 \sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\gamma(i-1)} - \frac{1}{\gamma(i)}\right] \leqslant \infty^{a.s}. \tag{3.10}$$

由图 3 可得：

$$\left.\begin{aligned} y^*_k &= y_{2k} + h_k u_{2k} = \phi_{k-1}^T\tilde{\theta}_{k-1} + (a/2)\phi_{k-1}^T\phi_{k-1}u^*_k, \\ \tilde{\theta}_k &= \tilde{\theta}_{k-1} + a\phi_{k-1}u_{2k}^*. \end{aligned}\right\} \tag{3.11}$$

利用时变正性系统定理[9]可得 $\langle u_{2k}^*, y_{k2}^*\rangle_T \geqslant \beta_0$.

由图 3，$y_{1k} = H_1(u_{1k}^* + h_k y_{1k})$，有 $\langle u_{1k}^*, y_{1k}\rangle_T \geqslant \langle y_{1k}, [C(Z^{-1}) - a/2]y_{1k}\rangle_T$. 因 $C(Z^{-1}) - a/2$ 严格正实，利用引理 1 的 A)，$H_1^* \in P$. 这样，引理 2 的所有条件均已满足，则

$$\langle u_{1k}^*, y_{1k}^*\rangle_T \leqslant \beta_0^{a.s}, \quad \langle u_{2k}^*, y_{2k}^*\rangle_T \leqslant \beta_0'^{a.s}. \tag{3.12}$$

由(3.12)可得 A) $|\tilde{\theta}_T| < \beta_0^{a.s}$. 考虑到 $\gamma(T) > 0$ 且单调增至无穷，利用引理 1 的 B) 有 $\lim\limits_{T\to\infty}\|y_1\|_T^2/\gamma(T) = 0$，再利用 $B(Z^{-1})$ 是渐近稳定和 $|y_{mT}| \leqslant \beta_0$，可立即得结果 B)、C).

四、结　论

可以看出，利用超稳定性理论证明随机自适应控制稳定性较 Martingale 函数法[3]简单且系统. 在随机过程收敛定理中所用的函数不是靠构造，而是靠超稳定性理论分析自然获得的，因此大大简化了证明. 另外，在证明中设做噪声平稳的假设，这是 ODE 法所

无法办到的． 其它随机自适应控制的稳定性证明(如 *Goodwin* 的随机最小二乘法[3]等)也可按本文步骤进行，同样可体现超稳定性理论证明的优越性．

参 考 文 献

[1] Landau, I. D., New Supermartingale for Convergence Analysis of Recursive Identification and Adaptive Control Schemes, *INT. J. Control,* 1982, 197—226.

[2] Solo, V., The Convergence of AMC, *IEEE. Trans. A. C.,* 1979, 958—962.

[3] Goodwin, G. C. and Sin, K. S., Adaptive Filtering Prediction and Control, Autralia, 1980.

[4] Liung, L., On Positive Real Transfer Function and The Convergence of Some Recursive Schemes, *IEEE. Trans. A. C.,* 1977, 539—551.

[5] Popov, V. M., Hyperstability of Automatic Control System, Springer, 1973.

[6] Landau, I. D., An Extension of a Stability Theorem Application to Adaptive Control, *IEEE. Trans. A. C.,* 1980, 814—817.

[7] 何勤奋，史维，严格正实裕度及其应用，控制理论与应用，1987，No. 1，36—41.

[8] He Qinfen and Shi Wei, Margin of Strictly Positive Read Transfer Function and Its Application to a New Kind of Adaptive Control Algorithms, IFAC'88. Identification, 1988, 210—214.

[9] Landau, I. D., Adaptive Control——The Model Reference Approach, Dekker, 1979.

[10] 严加安，鞅与随机积分引论，上海科技出版社，1981.

HYPERSTABILITY THEORY FOR STABILITY PROOFS OF STOCHASTIC ADAPTIVE CONTROL ALGORITHMS

He Qinfen Shi Wei

(Southeast University)

Abstract

Hyperstability theory is a significant tool for stability proofs of adaptive control, but so far it is only used for deterministic systems. Based on a further study of hypestability theory and a suitable conversion of the adaptive control construction, hyperstability theory are used for the stability proofs of stochastic adaptive control. It is shown that hyperstability theory can be used in stochastic case and has advantages over the previous Martingale function method and Ljung's ODE method. Comparing with the Martingale method, it does not require to build sedulously a stochastic Lyapunov function, which is usually very difficult to do. And it also omits the condition of stationary process of system noise, which is necessary in Ljung's ODE method.

Key words ——Hyperstability; positive real function; adaptive control.