第16卷 第1期 自 动 化 学 报 Vol. 16, No. 1
1990年1月 ACTA AUTOMATICA SINICA Jan., 1990

线性定常时滞系统全时滞渐近稳定的充分代数判据

周朝顺 邓聚龙
(华中理工大学)

摘 要

本文探讨了线性定常时滞系统全时滞渐近稳定性问题，并给出了简单实用的稳定性充分代数判据.

关键词——稳定性，时滞系统，线性系统.

本文讨论下述线性定常时滞系统的稳定性:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-\tau), \ \tau > 0. \tag{1}$$

引理1[1]. 系统(1)全时滞渐近稳定的充要条件是对于所有满足 $\mathrm{Re}(s) \geqslant 0$ 与 $|z| = 1$ 的 s 与 z，不等式 $\det(sI - A(z)) \neq 0$ 成立. 其中 $A(z) = A + Bz$，$z \triangleq e^{-\tau s} \in C$.

对于向量 $z = (z_1, z_2, \cdots, z_n)^T \in C^n$ 与任意给定的正定矩阵 $W = \mathrm{diag}(w_1, w_2, \cdots, w_n)$，显然泛函 $\|Z\|_W = \sum_{i=1}^{n} |w_i z_i|$ 是向量Z的范数. 称 $\|Z\|_W$ 为向量Z的W范数.

引理2. 假设 $D = [d_{ij}] \in C^{n\times n}$ 且泛函 $\|D\|_W$ 表示对应于向量范数 $\|Z\|_W$ 的算子范数[2]，则下式成立:

$$\|D\|_W = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \left\{ \sum_{i=1}^{n} |w_i d_{ij}| / |w_j| \right\}. \tag{2}$$

证明. 令 $y = Wz$. 根据向量范数 $\|\cdot\|_W$ 与 $\|\cdot\|_1$ 及矩阵的算子范数的定义知:

$$\|D\|_W = \max_Z \{ \|DZ\|_W | \ \|Z\|_W = 1\}$$
$$= \max_Y \{ \|WDW^{-1}Y\|_1 | \ \|Y\|_1 = 1\}.$$

由此式便知(2)式成立，即引理得证.

引理3. 假定 $D = [d_{ij}] \in C^{n\times n}$，$M = [m_{ij}] \in R^{n\times n}$，且 $m_{ij} \geqslant |d_{ij}| \ (\forall i, j \in \{1, 2, \cdots, N\})$，则 $\rho(D) \leqslant \rho(M)$ 成立. 其中 $\rho(\bullet)$ 表示矩阵$\bullet$的谱半径.

证明. 令 $M_1 = M + aU$，且 $0 < a < 1$，$U = [1] \in R^{n\times n}$，则 M_1是一个非负不可约矩阵. 根据 Perron-Frobenius 定理[3]知，存在正向量 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$ 满足 $x^T M_1 = \rho(M_1) x^T$. 由此知:

本文于1987年4月24日收到.

$$\rho(M_1) = \max_{1\leqslant j\leqslant n}\left\{\sum_{i=1}^{n} x_i(m_{ij}+a)/x_j\right\} \geqslant \max_{1\leqslant j\leqslant n}\left\{\sum_{i=1}^{n} x_i(|d_{ij}|+a)/x_j\right\}. \tag{3}$$

令 $W = \mathrm{diag}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$. 则由(2)式与(3)式及矩阵的算子范数与其谱半径的关系知:

$$\rho(M_1) > \rho(D). \tag{4}$$

根据矩阵特征值摄动定理[4]知,不等式

$$\rho(M_1) \leqslant \rho(M) + a^{1/n}b, \ \forall a\in(0, 1) \tag{5}$$

成立. 其中 b 为正常数. 由(4)式及(5)式知:

$$0 < \rho(M) - \rho(D) + a^{1/n}b, \ \forall a\in(0, 1).$$

对此式取极限 ($a\to 0^+$) 便知该引理得证.

定理 1. 系统(1)是全时滞渐近稳定的,若存在对称正定阵 P 使下述矩阵关系成立:

$$(A+B)^TP + P(A+B) = -I, \tag{6}$$

$$I - 2(|B^TP| + |PB|) > 0 \ (\text{即正定}). \tag{7}$$

其中,矩阵 $|\bullet|$ 的元素为矩阵 $\bullet$ 的对应元素的绝对值,I 为单位阵.

证明: 令 $Q(z) = -((A+Bz)^*P + P(A+Bz)), \ \forall z\in\{z||z|=1\}$. 由(6)式及引理3知: $Q(z) = I + B^TP(1-z^*) + PB(1-z) \geqslant I - 2\rho(|B^TP| + |PB|)I$, $\forall z\in\{z||z|=1\}$. 由此式与(7)式及 Perron-Frobenius 定理知:

$$Q(z) > 0, \ \forall z\in\{z||z|=1\}.$$

由此式及李亚普诺夫稳定性定理[2]知,对于 $\forall z\in\{z||z|=1\}$, 不等式 $\mathrm{Re}\lambda_i(A+Bz)<0$, ($\forall i\in\{1,2,\cdots,n\}$) 成立. 亦即不等式 $\det(sI - A(z))\neq 0$ 对满足 $\mathrm{Re}(s)\geqslant 0$ 与 $|z|=1$ 的所有 s 与 z 成立. 再由引理 1 便知该定理成立.

推论 1. 若李亚普诺夫矩阵方程 $A^TP + PA = -I$ 的对称解 $P>0$, 且

$$I - (|B^TP| + |PB|) > 0,$$

则系统(1)全时滞渐近稳定.

定理 2. 对于任意给定的实对称正定矩阵 Q, 假定矩阵方程

$$A^*(z)P(z) + P(z)A(z) = -Q, \ \forall z\in\{z||z|=1\}$$

的解为 $P(z) = P_1(x,y) + jP_2(x,y)$, 且 $P(z) = P^*(z)$, $z = x + jy$. 若矩阵关系

$$P = [p_{ij}] > 0, \ \forall P\in L[P_1(x,y)] \tag{8}$$

成立,则系统(1)全时滞渐近稳定. 其中,

$$L[P_1(x,y)] = \left\{[p_{1ij}^{(1)}\delta_{ij} + p_{1ij}^{(2)}(1-\delta_{ij})]\in R^{n\times n} \,\middle|\, \begin{matrix}\forall\delta_{ij}\in\{0,1\}, & i\neq j;\\ \delta_{ij}=1, & i=j.\end{matrix}\right\}, \tag{9}$$

$$p_{1ij}^{(1)} = \inf_{|z|=1} p_{1ij}(x,y), \ p_{1ij}^{(2)} = \sup_{|z|=1} p_{1ij}(x,y), \ P_1(x,y) = [P_{1ij}(x,y)]. \tag{10}$$

证明. 令 $Y = Y_1 + jY_2\in C^n$, Y_1、$Y_2\in R^n$. 根据该定理的假设、引理 1 及李亚普诺夫定理知,系统(1)全时滞渐近稳定的充要条件是下式成立:

$$Y^*P(z)Y = Y_1^TP_1(x,y)Y_1 + Y_2^TP_1(x,y)Y_2 \geqslant 0, \ \forall Y\in C^n, \ \forall z\in\{z||z|=1\}.$$

显然,此式与下式等价:

$$Y_e^TP_1(x,y)Y_e \geqslant 0, \ \forall Y_e\in R^n, \ \forall z\in\{z||z|=1\}, \tag{11}$$

证。令 $Y_e=[y_1,y_2,\cdots,y_n]^T\in R^n$，且令

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1, & 当\ y_iy_j\geqslant 0\ 时,\\ 0, & 当\ y_iy_j<0\ 时.\end{cases} \tag{12}$$

则对于 $\forall Y_e\in R^n$ 有

$$Y_e^TP_1(x,y)Y_e=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}p_{1ij}(x,y)y_iy_j\geqslant\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(p_{1ij}^{(1)}\delta_{ij}+p_{1ij}^{(2)}(1-\delta_{ij}))y_iy_j.$$

由此式及(8)—(12)式知，(8)式的成立确保了(11)式的成立，即定理得证.

注：若 $L[P_1(x,y)]\subset\{P_1(x,y)|x,y\in R$ 且 $x^2+y^2=1\}$，则(8)式成立是系统(1)全时滞渐近稳定的充要条件.

推论 2. 若矩阵关系 $\bar{P}-rI>0$ 与 $P(z)=P^*(z)$ 成立，则系统(1)全时滞渐近稳定．其中 $P(z)$、$p_{1ij}^{(1)}$ 与 $p_{2ij}^{(2)}(i,j\in\{1,2,\cdots,n\})$ 与定理 2 中的相同，且

$$\bar{P}=[\bar{p}_{ij}]\in R^{n\times n},\quad r=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left\{\sum_{j=1}^{n}(\bar{p}_{ij}-p_{1ij}^{(1)})\right\},$$

$$\bar{p}_{ij}=\begin{cases}(p_{1ij}^{(1)}+p_{1ij}^{(2)})/2, & i\neq j;\\ p_{1ij}^{(1)}, & i=j.\end{cases}$$

证明．由定理 2 及文[5]中的定理 1 便得证.

例 1. 考虑下述系统的稳定性.

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}0.925 & 5.925\\ -2.075 & -5.075\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}0.075 & 0.075\\ 0.075 & 0.075\end{bmatrix}x(t-\tau),\quad \tau>0.$$

通过计算知，满足矩阵方程(6)的解为

$$P=\begin{bmatrix}9/14 & 8/14\\ 8/14 & 11/14\end{bmatrix}>0,$$

且 $I-2(|B^TP|+|PB|)>0$. 由定理 1 知该系统全时滞渐近稳定.

例 2. 考虑下述时滞系统的稳定性.

$$\dot{x}(t)=ax(t)+bx(t-\tau),\ \tau>0,\ x(t)\in R. \tag{13}$$

令 $(a+bz)^*P(z)+P(z)(a+bz)=-1$，由此式得

$$P(z)=-1/2(a+bx),\ \forall z=x+jy\ 且\ |z|=1.$$

显然，由(8)—(10)式知，$L[P_1(x,y)]=\{[p_{111}^{(1)}]\}$，且

$$p_{111}^{(1)}=\begin{cases}1/2(|b|-a), & 当|a|>|b|时,\\ -\infty, & 当|b|>|a|时,\\ 不存在, & 当\ a=b=0\ 时.\end{cases}$$

由此式及定理2知，当 $|b|>a$ 且 $|a|>|b|$（即 $a<-|b|$）时，系统(13)全时滞渐近稳定，又当 $|a|>|b|$ 时，$L[P_1(x,y)]\subset\{P_1(x,y)|x^2+y^2=1,x,y\in R\}$ 成立，故 $a<-|b|$ 也是系统(13)全时滞渐近稳定的必要条件.

参 考 文 献

[1] Kamen, E. W., On the Relationship Between Zero Criteria for Two-variable Polynomials and Asymptotical Stability of Delay Differential Equations, *IEEE Trans. Auto. Contr.*, AC-25(1980)

No. 5, 983—984.
[2] 黄琳，系统与控制理论中的线性代数，科学出版社 (1984), 244—245.
[3] Gantmacher, F. R., The Theory of Matrices, New York: Chelsea(1959), 53—54.
[4] 蒋尔雄等，线性代数，人民教育出版社 (1978), 446—451.
[5] Zhou Chaoshun and Deng Julong, The Stability of the Grey Linear System, International Journal of Control, **43**(1986), 1, 313—320.

A SUFFICIENT ALGEBRA CRITERIA FOR STABILITY OF LINEAR CONSTANT TIME-DELAY SYSTEM

ZHOU CHAOSHUN　　DENG JULONG

(Huazhong University of Science and Technology)

ABSTRACT

In this paper, the problem of asymptotical stability of linear constant time-delay systems independent of delay is considered and some sufficient algebra criteria for the stability are submitted. The criteria has the same advantages as those in [4], and can be used for the judgement of asymptotical stability of linear constant time-delay systems independent of delay through simple calculation (it is not necessary to do that by means of computer) and for stability test of a class of linear constant time-delay systems whose stabilities can not be tested by those in [4]—[6].

Key words ——Stability; time-delay systems; linear systems.