

# 一种基于能量准则的平滑滤波器

孙学宁 阎平凡  
(清华大学)

## 摘 要

本文提出一种基于能量准则的平滑滤波器,它可以用于滤除噪声、检测纹理结构和检测边缘。和高斯函数的拉普拉斯算子相比较,这种平滑滤波器用于边缘检测时,具有更好的定位精度以及同样的噪声抑制效果,对于各种图象所进行的实验,其结果是令人满意的。

**关键词**——平滑滤波,边缘检测,图象分割,图象处理。

## 一、引 言

数字图象处理技术在各个领域得到了越来越广泛的应用,在图象的边缘检测中,人们习惯于先将原始图象进行平滑滤波,然后再取梯度算子而获得边缘图象,边缘检测的关键是去除噪声和提高边缘的定位精度。根据不确定性原理,这两项指标又是相互矛盾的,不可能同时达到最优。强调了噪声的抑制,必然要平滑原始图象,必然破坏边缘的尖锐程度,从而降低了边缘的定位精度;强调定位精度,只能对原始图象略作平滑处理,以便保持边缘的尖锐程度,从而减弱了对噪声的抑制作用,只能在这两项指标之间取一个折衷。本文从设计最优平滑滤波器的角度出发,以阶跃型边缘和斜变型边缘为基本边缘模式,得到了一种指数形式的平滑滤波器,并且讨论了它在边缘检测中的一些应用。

## 二、针对两类边缘的最优平滑滤波器

设  $S_i(x)$  是一平滑滤波器的输入信号,  $S_i(x)$  中只含有加性高斯噪声,即

$$S_i(x) = S(x) + N(x),$$

其中  $S(x)$  是一个阶跃信号,即

$$S(x) = \begin{cases} A, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

$N(x)$  是高斯分布的白噪声,它具有下列的统计特性:

$$E\{N(x)\} = 0, \quad E\{N^2(x)\} = n_0^2.$$

设  $f(x)$  是一个线性滤波器,所以:

$$S_0(x) = f(x) * S_i(x) = f(x) * S(x) + f(x) * N(x). \quad (1)$$

为了得到最优的滤波结果,应使滤波器输出的信号能量尽可能大于噪声的能量。同时,为了更有效地检测边缘,应使输出的信号的一阶导数的能量尽可能大于噪声的一阶导数的能量,即使得下面两个式子尽可能地大:

$$\text{SNR} = \frac{(f(x) * S(x))^2}{E\{(f(x) * N(x))^2\}}, \quad F = \frac{[(f(x) * S(x))']^2}{E\{[(f(x) * N(x))']^2\}}$$

为了得到综合的优化效果,设目标函数为  $C = \text{SNR} \cdot F$ , 目的是解出  $f(x)$ , 使  $C$  取得极大值。经过简单的推导,得到

$$C = \frac{A^4 f^2(0) \left( \int_{-\infty}^0 f(x) dx \right)^2}{4n_0^4 \int_{-\infty}^0 f^2(x) dx \cdot \int_{-\infty}^0 f'^2(x) dx} \quad (2)$$

如果给  $f(x)$  加上一个宽度为  $2W$  的矩形窗,则:

$$C = \frac{A^4 f^2(0) \left( \int_{-W}^0 f(x) dx \right)^2}{4n_0^4 \int_{-W}^0 f^2(x) dx \cdot \int_{-W}^0 f'^2(x) dx} \quad (3)$$

根据变分的理论,优化目标函数  $C$ , 等价于下列非线性变分问题。

以  $\int_{-W}^0 f(x) dx = K_1$ ,  $f(0) = K_2$ ,  $\int_{-W}^0 f'^2(x) dx = K_3$  为约束条件, 极小化目标为  $\int_{-W}^0 f^2(x) dx$ 。

依据拉格朗日乘子法,可以构造出下面的函数:

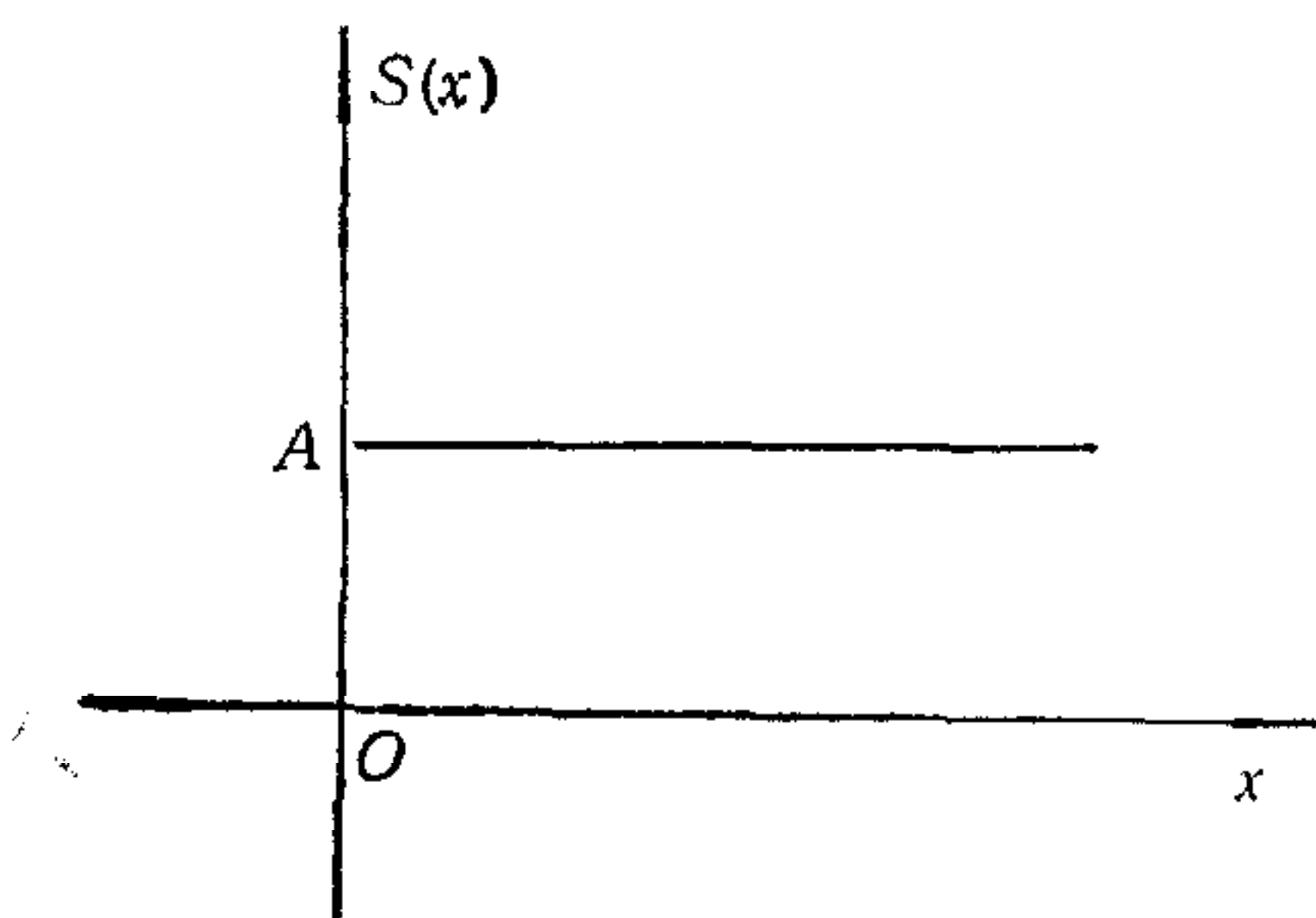


图 1

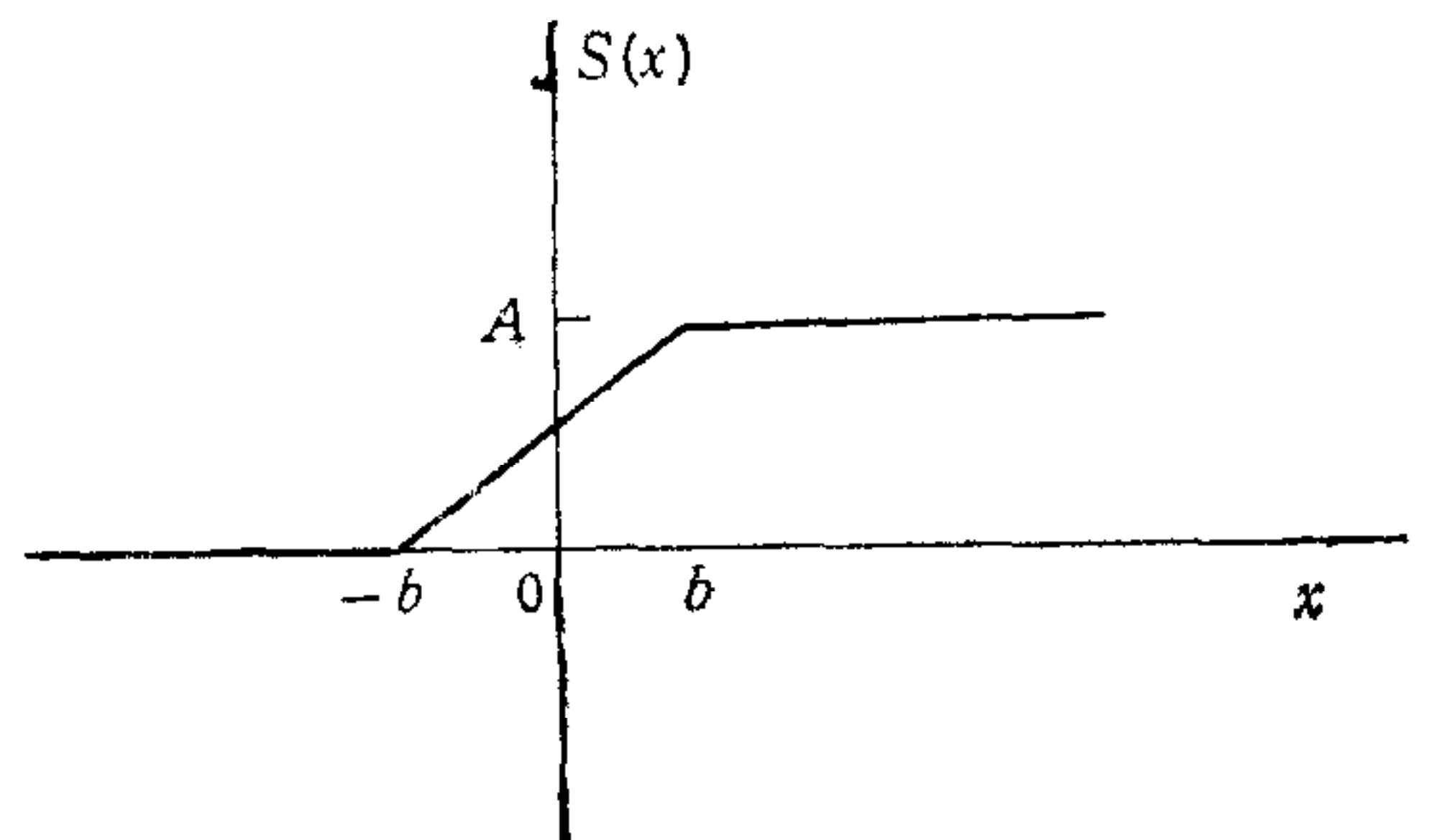


图 2

$$\psi(f, f') = f^2 + \lambda_1 f + \lambda_2 f'^2, \quad (4)$$

式中  $\lambda_1$ 、 $\lambda_2$  是拉格朗日乘子,且使得  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_2 > 0$ 。

暂时不求解式(4),再分析斜变型边缘的情况,同样有:  $S_i(x) = S(x) + N(x)$ , 其中

$$S(x) = \begin{cases} Ax/2b + A/2, & |x| \leq b, \\ A, & x > b, \\ 0, & x < -b. \end{cases}$$

$N(x)$  具有如下的统计特性:

$$E\{N(x)\} = 0, E\{N^2(x)\} = n_0^2.$$

应用同样的分析方法得到:

$$C = \frac{(A^4/b^2) \left( \int_0^\infty f(x) dx \int_0^b f(x) dx \right)^2}{4n_0^4 \int_0^\infty f^2(x) dx \cdot \int_0^\infty f'^2(x) dx}.$$

如果给  $f(x)$  加上一个宽度为  $2W$  的矩形窗, 且  $W \geq b$ , 则有:

$$C = \frac{(A^4/b^2) \left( \int_0^W f(x) dx \int_0^b f(x) dx \right)^2}{4n_0^4 \int_0^W f^2(x) dx \cdot \int_0^W f'^2(x) dx}. \quad (5)$$

极大化式(5)等价于下面的变分问题. 设

$$\frac{\int_0^b f(x) dx}{\int_0^W f(x) dx} = C_0, \text{ 则 } \int_0^b f(x) dx = C_0 \int_0^W f(x) dx.$$

因此,  $\int_0^b f(x) dx = K'$  的约束可以由  $\int_0^W f(x) dx$  的约束来替换. 因而, 非线性变分问题是:

以  $\int_0^W f(x) dx = K_1$  和  $\int_0^W f'^2(x) dx = K_2$  为约束, 极小化  $\int_0^W f^2(x) dx$ .

依据变分原理, 可以构造出下面的函数:

$$\phi(f, f') = f^2 + \lambda_1 f + \lambda_2 f'^2, \quad (6)$$

式中  $\lambda_1, \lambda_2$  均为拉格朗日乘子.

比较(4)、(6)两式, 在两种类型的边缘模型下, 可以归结为同样的优化问题.

应用欧拉公式  $\phi_f - \frac{d}{dx} \phi_{f'} = 0$ , 得到  $f''(x) - \frac{1}{\lambda_2} f(x) - \frac{\lambda_1}{2\lambda_2} = 0$ ,

解微分方程得:

$$f(x) = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x},$$

式中

$$m_{1,2} = \frac{\frac{1}{\lambda_2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{\lambda_2}\right)^2 + \frac{2\lambda_1}{\lambda_2}}}{2},$$

$c_1, c_2$  是待定常数.

当窗口宽度  $2W \rightarrow \infty$  时,  $f(x) \rightarrow 0$ . 因此,  $c_1 = 0$ . 由于  $f(x)$  是偶对称的, 所以,  $f(x) = c_2 e^{m_2 |x|}$ , 或者写成  $f(x) = c_2 e^{-p|x|}$ , ( $p > 0$ ).

对  $f(x)$  作归一化处理, 可以将  $f(x)$  看成是某一概率分布. 因此,  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$ , 则

$c_2 = \frac{p}{2}$ , 也就是

$$f(x) = \frac{p}{2} e^{-p|x|}. \quad (7)$$



### 四、实验结果和结论

为了实际检验指数型滤波器的性能,用它对一批图象进行了边缘检测处理,其结果是

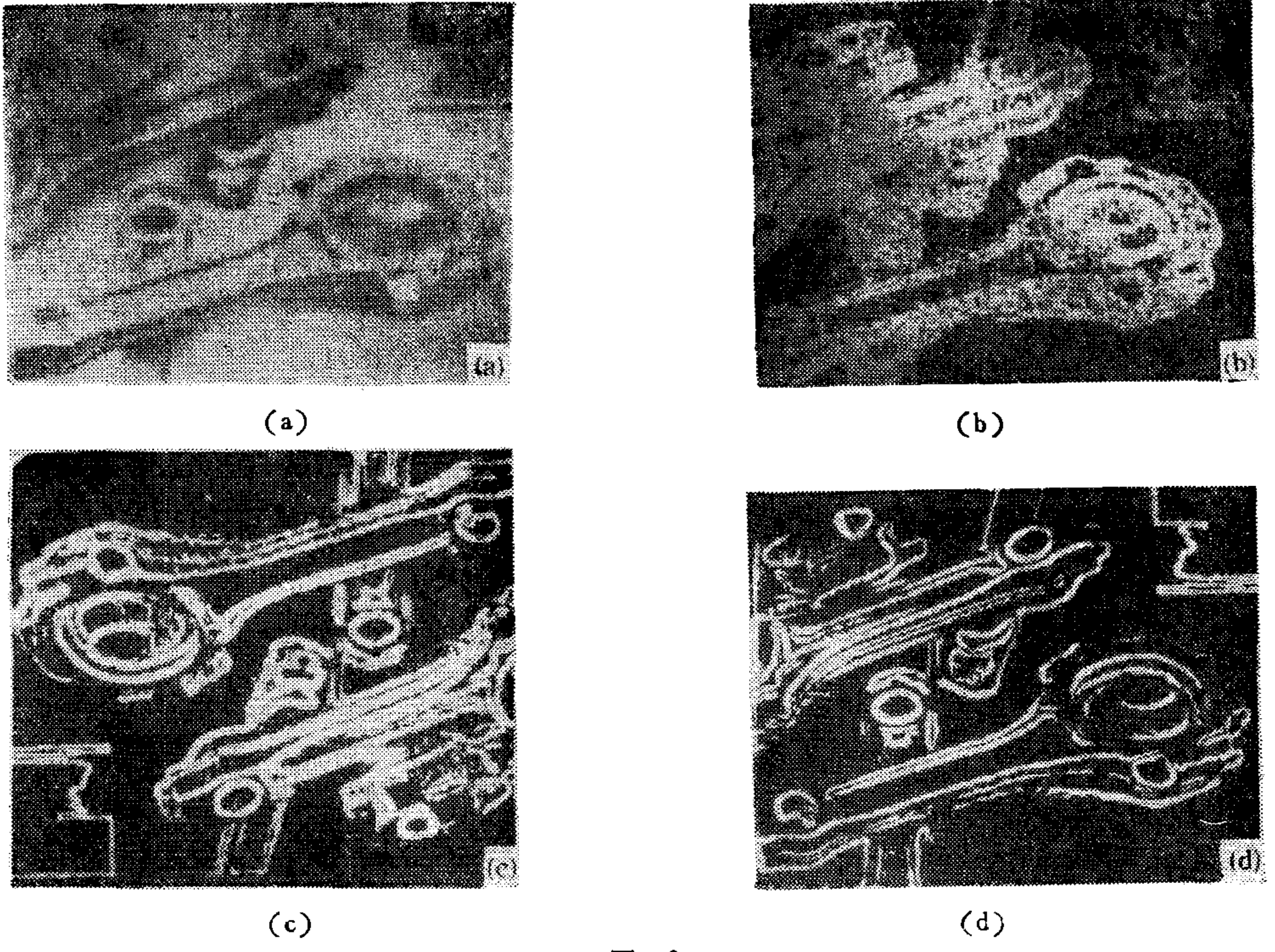


图 3

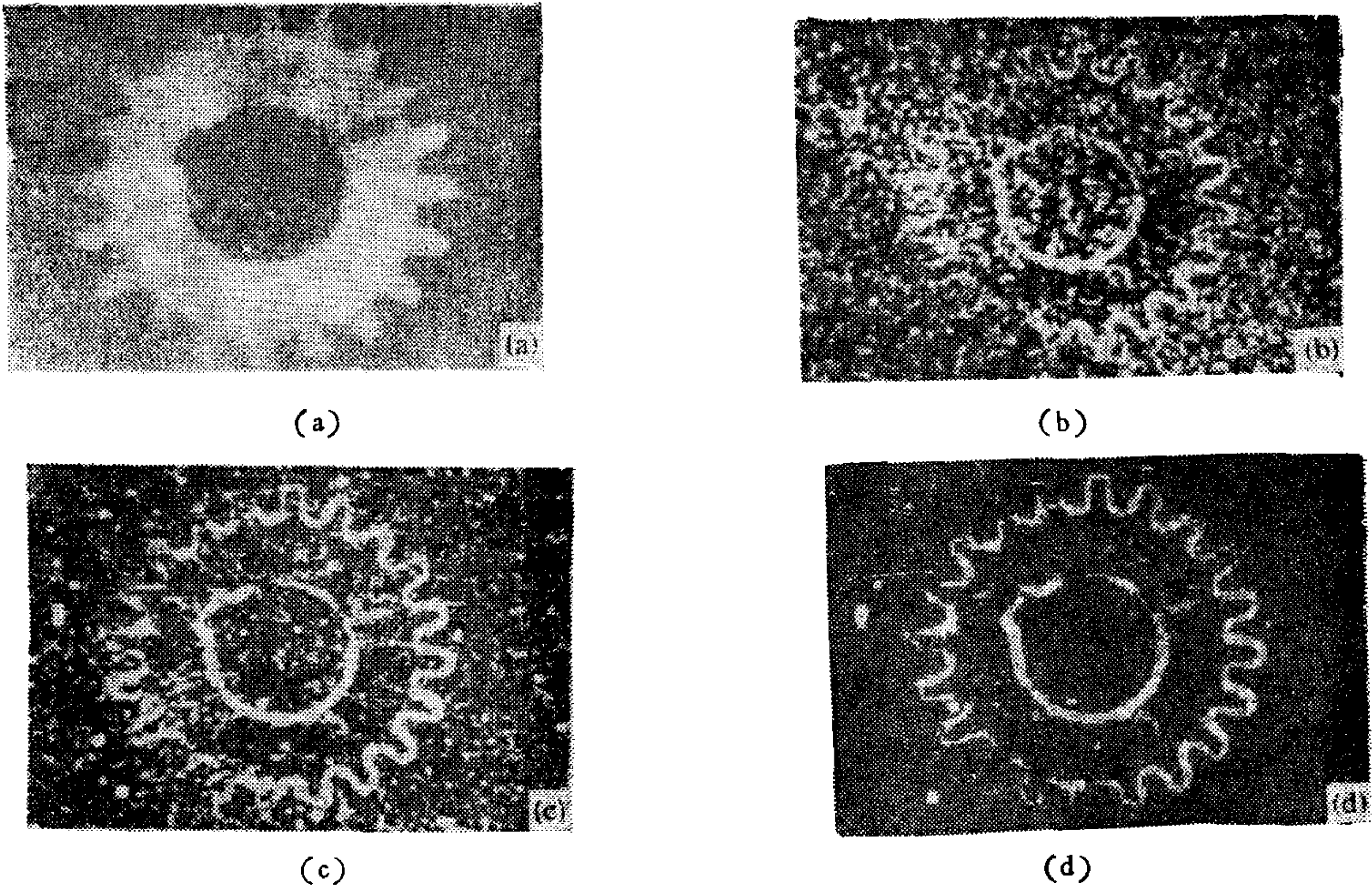


图 4



令人满意的,其中一部分结果示于图3和图4。图中,(a)是原始的噪声图象,(b)是Sobel算子的结果,(c)是高斯滤波器的结果,(d)是指数型滤波器的结果。

理论分析和实验结果都表明:指数型滤波器用于边缘检测时,具有更好的定位精度,并且具有和高斯滤波器大体相同的抑制噪声的作用;从实验结果看,它得到的边缘图象的质量优于高斯滤波器,它有可能在图象分析和计算机视觉方面得到应用。

### 参 考 文 献

- [1] Marr, D., *Vision*, Freeman, W. H. and Co., San Francisco, USA, 1980.
- [2] Canny, J. F., *Finding Edges and Lines in Images*, MIT AI Lab Tech Report 720, 1983.
- [3] Rosenfeld, A. and Thurston, M., *Edge and Curve Detection for Visual Scene Analysis*, *IEEE Trans. Comput.* **c-20**(1971), 562—569.

## A NEW OPTIMAL SMOOTHING FILTER FOR EDGE DETECTION BASED ON THE ENERGY CRITERION

SUN XUENING    YAN PINGFAN

(*Tsinghua University*)

### ABSTRACT

Based on the energy criterion, a new optimal smoothing filter is proposed in this paper. Compared with the Laplacian-Gaussian filter, this filter is more precise for the location of edge and less sensitive to noise. Experiments have been performed on various images and the results are very satisfactory.

**Key words** ——Smoothing filtering; edge detection; image segmentation; image processing.