

Marr-Hildreth 边界检测器定位性能分析

郭 雷

(西安电子科技大学)

摘 要

本文分析了 Marr-Hildreth 边界检测器 ($-\nabla^2 G$) 在检测图象中的阶跃 (step) 边界时产生定位误差的三个原因,即由于侧向曲率、高斯滤波和噪声干扰带来的影响。首先导出了拉普拉斯、二阶梯度方向导数和侧向曲率三者之间的关系式,指出由于侧向曲率的影响,拉普拉斯在检测弯曲边界时必然产生定位误差。依据按曲率分段逼近阶跃边界的模型,给出了误差的定量分析。最后解释了高斯滤波和噪声干扰对定位的影响。

关键词——图象分析,边界检测,曲率计算。

一、引 言

在许多计算机视觉系统中,视觉图象的第一步处理都采用了边界检测^[1]。被检测出的边界曲线形成了对原始图象的基本描述^[2]。该描述既包含了原始图象的视觉信息,又使图象数据得到了压缩,为图象的进一步分析奠定了基础。因此边界检测器是计算机视觉系统的一个重要组成部分。

80年代以来,在图象边界检测领域内,一个相当有效的方案就是零交边界检测。被誉为性能最佳的高斯拉普拉斯边界检测器是由 Marr 和 Hildreth 提出的^[3,4]。这个边界检测器的特点是采用了使空频不确定性极小化的高斯分布函数^[3,5,6]对图象滤波,高斯分布函数的方差 σ 决定了滤波的比例 (scale)。在滤波基础上求拉普拉斯。由于滤波和拉普拉斯都是线性运算,因此它们两者的计算次序可以颠倒。

关于这个边界检测器的性能已经有了一些分析。Marr 和 Hildreth 指出当图象边界是直线时,拉普拉斯的定位是准确的,且和沿梯度方向的二阶方向导数的定位是一致的^[3],许多作者在实验中都发现了这一现象^[1,5,6,7,8,9]。但是,尽管他们都注意到拉普拉斯在检测弯曲边界时有误差存在,却没有意识到拉普拉斯算子本身包含有曲率分量,因而无法解释产生误差的原因。本文提出了侧向曲率的概念,它对应着边界线的曲率,指出了拉普拉斯与侧向曲率的关系。在此基础上,分析了 Marr-Hildreth 检测器在检测阶跃边界 (step edges) 时产生定位误差的三个原因,即由于侧向曲率、高斯滤波和噪声的影响。依据按曲率分段逼近的边界模型(即分成小段,使每一小段上曲率为常数),给出了误差的定量分析。

二、侧向曲率

本节给出侧向曲率的概念。目的是要把边界线的曲率用图象的空间方向导数表示出来,使曲率计算化为点的局部运算。以下的分析均假设图象是一个二元连续函数。

设 $f(x, y)$ 为直角坐标系下一个二阶连续可微的二元函数(图象), p 是 f 的一个非零梯度点, 即 $\nabla f(p) \neq 0$ 。又设 C 是一个与 $x-y$ 平面平行的平面 T 与 f 在 p 点的交线, 如图 1 所示。因此 C 是一条平面曲线。将 C 在 p 点的曲率称为 f 在 p 点的侧向曲率, 记为 $K_H(p)$ 。

由定义可见, 在灰度图象中的边界点上的侧向曲率就是该边界线的曲率。但侧向曲率并不局限于边界点, 它可描述图象上的各点。

下面导出侧向曲率的计算公式。由于 C 是平行于 $x-y$ 平面的平面曲线, 因此可直接利用平面曲线的曲率计算公式得到 C 的曲率

$$K_H = y_{xx} / (1 + y_x^2)^{3/2}, \quad (1)$$

其中 y_x 和 y_{xx} 表示 y 对 x 的偏导数。另一方面, 交线 C 上的点 (x, y) 满足

$$f(x, y) = f(p). \quad (2)$$

这里 p 是一定点。将 y 看成由上式决定的 x 的隐函数, (2) 式两边对 x 求导得

$$f_x + f_y y_x = 0,$$

即

$$y_x = -f_x / f_y. \quad (3)$$

将上式再对 x 求一次导数, 和(3)式一起代入(1)式, 便得到侧向曲率的计算公式:

$$K_H = \frac{f_x^2 f_{yy} - 2 f_x f_y f_{xy} + f_y^2 f_{xx}}{(f_x^2 + f_y^2)^{3/2}}. \quad (4)$$

由上式可见, K_H 是点的局部运算, 它可由图象的空间导数来计算。现在来讨论侧向曲率与梯度方向导数的关系。

利用图象 f 沿正交梯度方向 n_\perp 的二阶方向导数 $\partial^2 f / \partial n_\perp^2$ 的计算公式^[6], 并且与侧向曲率的计算公式(4)比较后, 可得

$$K_H = \partial^2 f / \partial n_\perp^2 / \nabla f. \quad (5)$$

式中 $\nabla f = \sqrt{f_x^2 + f_y^2}$ 为 f 的梯度。由图 1 可见, 曲线 C 是 f 在 p 点的等值线, 从而 C 在 p 点的切线方向即为 f 在 p 点的正交梯度方向, 因此 C 的曲率与 f 的二阶正交梯度方向导数 $\partial^2 f / \partial n_\perp^2$ 之间必然有确定关系。(5) 式完全表达了这个关系。从(5)式还可看出侧向曲率 K_H 的符号由 $\partial^2 f / \partial n_\perp^2$ 的符号决定。这样 K_H 的符号反映了图象 f 在正交梯度方向的凸或凹的信息。

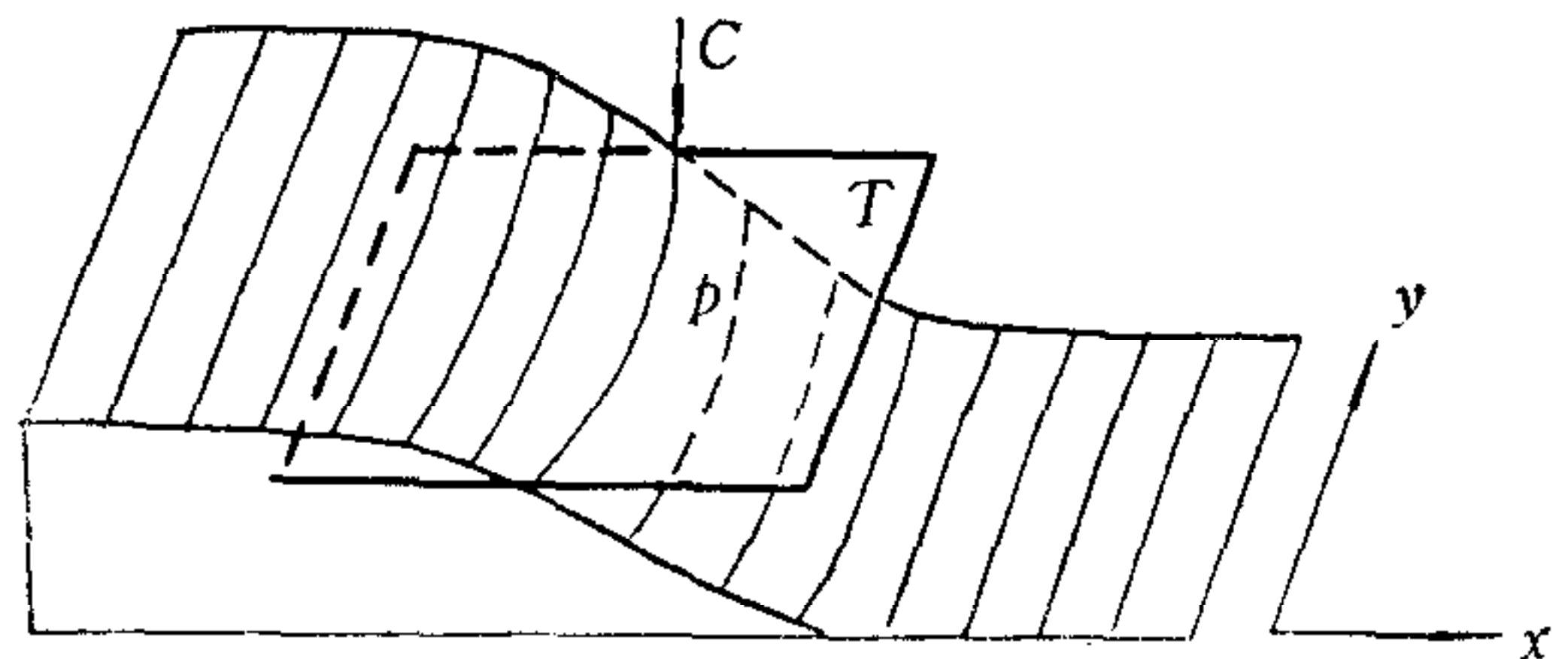


图 1 切平面与交线

三、拉普拉斯与侧向曲率的关系

已有许多文献报道 Marr-Hildreth 边界检测算子在检测圆形物体边界和角边界时有定位误差存在, 其定位性能不如沿梯度方向二阶导数算子 ($\partial^2 f / \partial n^2$) 的定位性能好^[5-9], 但对于误差存在的原因并没有论述. 在这一节中, 将从原理上对这个问题作出回答.

已知拉普拉斯能够表示为二项之和^[6]:

$$\nabla^2 f = \partial^2 f / \partial n^2 + \partial^2 f / \partial n_{\perp}^2, \quad (6)$$

其中 $\nabla^2 f$ 为 f 的拉普拉斯, $\partial^2 f / \partial n^2$ 为 f 在梯度方向二阶导数. 比较(5)式和(6)式, 可得到一个重要关系式:

$$\nabla^2 f = \partial^2 f / \partial n^2 + \nabla f \cdot K_H. \quad (7)$$

由上式明显可见: 拉普拉斯算子中包含有曲率的分量, 该曲率直接影响着拉普拉斯的数值. 只有当侧向曲率为零时, 拉普拉斯与二阶梯度方向导数才能有相同的零点. 也就是说, 在检测直线边界时, 拉普拉斯与二阶梯度方向导数有相同的定位; 但在检测弯曲边界时, 两者就不同了, 其差异正比于边界线的曲率. 这和许多作者在实验中所得到的结果是一致的. 下面用一个曲率不为零的边界模型来更加细致地分析误差的大小.

许多作者在分析边界检测器的定位性能时, 边界模型往往采用一维(直线型)阶跃边界模式^[1,2,5], 本文采用一个弯曲的阶跃边界模型. 为了简单起见, 设边界是由一个半径为

R 的圆台经过高斯模糊(卷积)之后形成的, 可用极坐标表示为

$$I(r) = \int_{r-R}^{+\infty} G(r) dr, \quad r > 0, R > 0. \quad (8)$$

式中 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 为矢径,

$$G(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-r^2/2\sigma^2}$$

为高斯分布函数, $I(r)$ 是圆对称的, 它的径向剖面图示于图 2, 准确的边界位置在 $r = R$ 处. 因此这个边界模型的边界线的曲率为 $1/R$, 边界梯度为 $1/\sqrt{2\pi}\sigma$. 显然, 通过参数 R 和 σ 的选择, 可以用这个圆模型上的一段弧去逼近任意一个实际阶跃边界的一小段, 只要这个边界在这一小段上的曲率和梯度近似为常数. 这个条件总能够通过不断细分来达到. 因此式(8)中的边界模式具有普遍意义.

由于 $I(r)$ 是圆对称的, 所以有:

$$K_H(r) = -1/r, \quad (9)$$

$$\nabla I = |\partial I / \partial r| = G(r - R), \quad (10)$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial n^2} = \frac{\partial^2 I}{\partial r^2} = \frac{r - R}{\sigma^2} G(r - R). \quad (11)$$

可见 $\partial^2 I / \partial r^2$ 的零点为 $r = R$. 将(9)–(11)式代入(7)式得

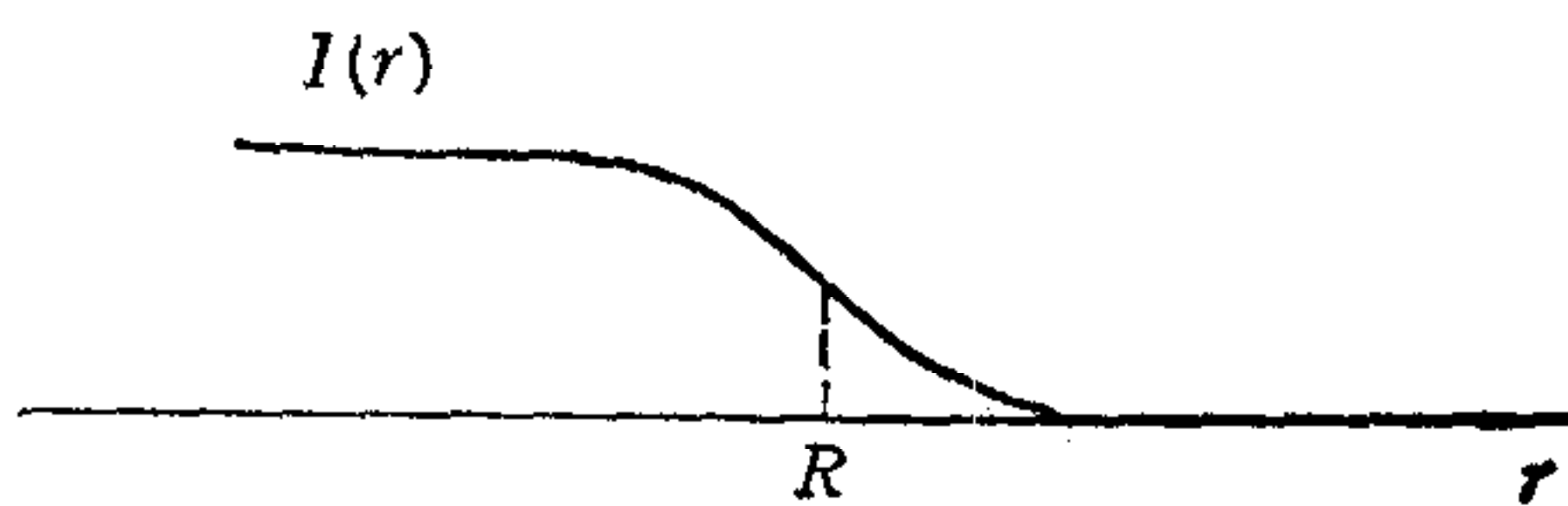


图 2 边界模型的剖面图

$$\nabla^2 I = \left(\frac{r-R}{\sigma^2} - \frac{1}{r} \right) G(r-R), \quad (12)$$

令 $\nabla^2 I = 0$, 可得到 $r^2 - Rr - \sigma^2 = 0$. 该方程的有意义的解为 $\nabla^2 I$ 的零交点:

$$r_0 = \frac{R}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{R^2 + 4\sigma^2}. \quad (13)$$

显然 $r_0 > R$, 即有定位误差. 利用(9)和(10)式, 可写出真实边界线的曲率 $K_I = 1/R$ 与 $\nabla^2 I$ 的零交线的曲率 $K_0 = 1/r_0$ 之比及定位误差为

$$K_I/K_0 = r_0/R = 1/2 + \sqrt{1 + \beta^2}/2, \quad (14)$$

$$r_0 - R = |K_H(R)| (\sqrt{1 + \beta^2}/2 - 1/2). \quad (15)$$

其中 $\beta = 2\sigma/R = 2\sqrt{2\pi}K_H(R)/\nabla I(R)$.

从以上结果可得到如下结论:

1) $\nabla^2 I$ 的零交线的曲率不大于真实图象边界的曲率. 当该边界的侧向曲率为零时, 两者相等;

2) 拉普拉斯的定位误差与边界点的侧向曲率成正比, 与边界点处的梯度成反比.

四、Marr-Hildreth 边界检测算子的定位误差

M-H 边界检测器的定位误差有三类:

1) 侧向曲率 K_H 带来的误差. 这个误差前面已经做了分析, 它是由拉普拉斯本身引起的. 当被检测的物体尺寸很小且与背景的灰差很小时, 该项误差就会很突出.

2) 高斯滤波引起的误差. 当图象中只有一个直线阶跃边界 $u(x)$ 时, 它与高斯的拉普拉斯的卷积为

$$\nabla^2 G(x, y) * u(x) = -\frac{x}{\sigma^2} G(x),$$

其零交点位于 $x = 0$, 正好是 $u(x)$ 的阶跃位置. 由此可见, 当图象平面上只有一条理想的(无噪声)直线边界时, 高斯滤波对边界定位没有影响. 但当图象平面中存在两条直线边界时, 则有

$$I(x, y) = u(x - \alpha) - u(x + \alpha), \quad \alpha > 0.$$

I 与该算子的卷积

$$\begin{aligned} \nabla^2 G(x, y) * I(x, y) &= \frac{x + \alpha}{\sigma^2} G(x + \alpha) \\ &\quad - \frac{x - \alpha}{\sigma^2} G(x - \alpha) \end{aligned}$$

的零交点的位置却向 $x = \alpha$ 和 $x = -\alpha$ 两侧偏移. 这个偏移量与高斯滤波的比例参数 σ 成正比. 产生这一误差的原因是因为高斯分布函数是布满整个平面的. 当图象中存在两条以上的边界时, 相互之间产生了

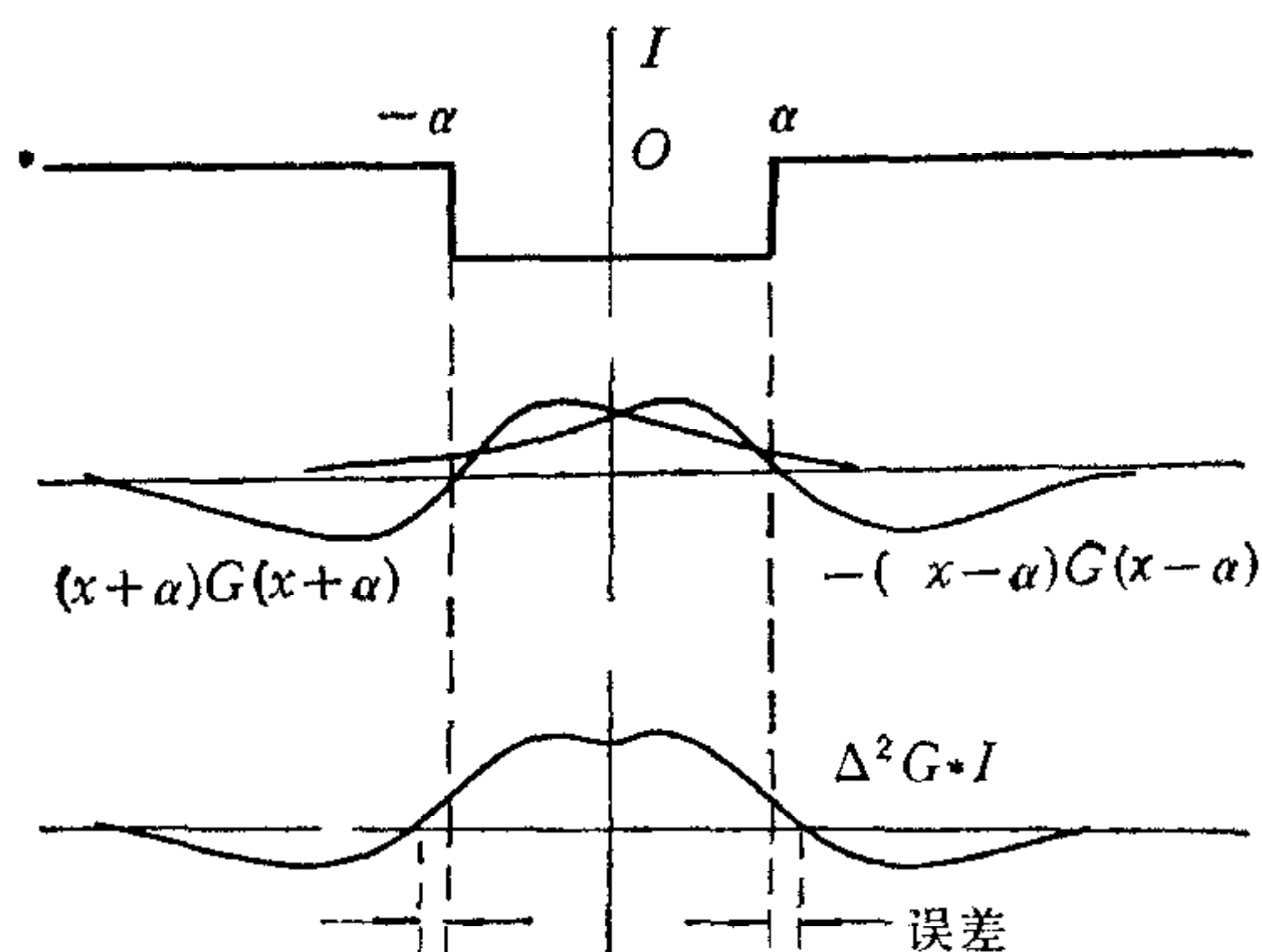


图3 误差图示

为高斯分布函数是布满整个平面的. 当图象中存在两条以上的边界时, 相互之间产生了

干扰。从图 3 中可以清楚地看到误差与 σ 成正比,与两线间距成反比。

3) 噪声引起的误差. 设图象中存在相加型白噪声 $n(x, y)$ 功率谱密度为 $N_0/2$. 该噪声通过 $\nabla^2 G$ 滤波器之后的方差为

$$\sigma_{n_0}^2 = \frac{N_0}{2} \iint_{-\infty}^{+\infty} [\nabla^2 G]^2 dx dy = \frac{N_0}{4\pi\sigma^6},$$

由上式可见, 噪声的影响与高斯滤波的比例 σ 成反比。

五、讨 论

前面已经讨论了 Marr-Hildreth 边界检测算子的三类定位误差。一个自然的问题是怎样减小这些误差。第一类误差与图象结构有关, 是不可避免的; 另一方面, 为了减小噪声影响, 高斯滤波的比例必须加大, 但第二类误差必然加大, 两者互为矛盾。 σ 取什么值是最佳的? 这个问题比较复杂, 涉及图象边界的模式及噪声的强度与类型, 要具体问题具体对待。一般的规则是使算子的直径等于待检测物体的宽度。这个方案本质上就是在不致产生较大的第二类误差的条件下使第三类误差达到最小, 但必须先知道待检测物体

的大小。

参 考 文 献

- [1] Canny, J., A Computational Approach to Edge Detection, *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, **PAMI-8** (1986), 6, 679—698.
- [2] Marr, D., Early Processing of Visual Information, *Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. B* 275, 1976.
- [3] Marr, D. and Hildreth, E. C., Theory of Edge Detection, *Proc. Roy. Soc. London, Ser. B* 207, 187—217, 1980.
- [4] Hildreth, E. C., The Detection of Intensity Changes by Computer and Biological Vision System, *Comput. Vision Graphics Image Process.*, **22**(1983), 1—27.
- [5] Lunscher, W. H. H. J. and Beddoes, M. P., Optimal Edge Detector Design I: Parameter Selection and Noise Effects, *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, **PAMI-8** (1986), 2, 164—177.
- [6] Torre, V. and Poggio, T., On Edge Detection, *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, **PAMI-8** (1986), 2, 147—163.
- [7] Haralick, R. M., Digital Step Edge from Zero-Crossing of Second Directional Derivatives, *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, **PAMI-6** (1984), 1, 58—68.
- [8] Nalwa, V.S. and Binford, T. O., On Detecting Edge, *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, **PAMI-8** (1986), 6, 699—714.
- [9] Berzins, V., Accuracy of Laplacian Edge Detectors, *Comput. Vision Image Process.*, **27** (1984), 195—210.

MARR-HILDRETH EDGE DETECTOR LOCATION ERROR

GUO LEI

(Xi'an University of Electronic Science and Technology)

ABSTRACT

In the paper, the curvature of the line of level crossings of a surface as a description to the surface is introduced. The relation between the level crossing curvature and the Laplacian is derived and, by the relation, we analyse the location errors of the Laplacian when detecting bending step edges. Our results show that the level crossing curvature can cause location error of the Laplacian, particularly when the edges with large curvatures and small gradients. Thus there are three reasons for the location errors of the Marr-Hildreth edge detector, that is, the level crossing curvature, Gaussian filtering, and noise.

Key words —Image analysis; edge detection; curvature computation.