

电渣重熔过程中两相区的识别¹⁾

黄光远 林 锋²⁾ 郑学锋

(山东大学)

(冶金部钢铁研究院)

摘 要

本文利用热传导方程中参数识别方法,将电渣重熔过程中两相区的识别问题化为最优控制问题来解决。根据脉冲变分原理,给出了识别参数的梯度公式及计算方法,最后的仿真结果说明了该方法的可行性。

关键词——电渣重熔,两相区,辨识,脉冲变分。

前 言

目前,分布参数系统的识别问题越来越引起人们的重视。因为解决问题的过程首先是了解系统(包括结构识别与参数识别),其次才能提出预测、控制、规划等其它问题。在特种钢的冶炼过程中,如何控制炉中固液分界面是一个影响质量的重要问题。控制的难点在于高温下无法用传感器直接测量这个曲面的位置。能否根据边界上可以测知的温度及热流讯息,通过模型估算出这个曲面,这是本文研究的主题。我们将利用优化方法解决这个识别问题。由于在固液分界面附近,介质参数发生剧烈变化,古典变分方法已不适用,利用脉冲变分原理^[1,2]——间断函数类的变分原理可以给出一种识别此分界面的计算方法。

一、物理背景与数学模型

工业上电渣重熔主要是用于冶炼特种钢,冶炼炉的结构示意图如图1所示。实际中两相分界面近旁有个小区域,称为两相区。该区域的形状决定着钢锭的结晶方向,并直接影响钢锭的重熔速度及质量。文献[3]根据热传导定律给出它的数学描述:以底部中心为坐标原点,建立柱坐标系,假设铸锭半径是 R ,高为 h ,且设温度分布是轴对称的,可化为二维问题,引入符号:

$$\Omega_r = \{(r, z) | r \in (0, R), z \in (0, h)\}, \quad (1.1)$$

$$Q = \Omega_r \times [0, T], T > 0, \quad (1.2)$$

本文于1987年5月11日收到。

1) 本文得到国家科学基金资助。

2) 林锋负责文章执笔。在仿真计算过程中感谢傅国华同志的协助。

$$\Omega_r = \{(z, t) | z \in (0, h), t \in (0, T)\}, \quad (1.3)$$

$$\Omega_z = \{(r, t) | r \in (0, R), t \in (0, T)\}, \quad (1.4)$$

则系统满足

$$c\rho \frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r} \left(K \frac{\partial Q}{\partial r} \right) + \frac{K}{r} \frac{\partial Q}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial Q}{\partial z} \right), \quad (r, z, t) \in \Omega, \quad (1.5)$$

$$Q|_{t=0} = Q_0(r, z), \quad (r, z) \in \Omega_t, \quad (1.6)$$

$$\left(-K \frac{\partial Q}{\partial z} + \beta Q \right)_{z=0} = \beta Q_w(r), \quad (r, t) \in \Omega_z, \quad (1.7)$$

$$Q|_{z=h} = f(r, t), \quad (r, t) \in \Omega_z, \quad (1.8)$$

$$\left(K \frac{\partial Q}{\partial r} + \alpha Q \right)_{r=R} = \alpha Q_s(z), \quad (z, t) \in \Omega_r. \quad (1.9)$$

为简便, 将初、边值条件统记为向量算子

$$M(Q) = g, \quad g = (Q_0, \beta Q_w, f, \alpha Q_s)^T.$$

其中 z 为铸锭中心轴向坐标; r 表示与中心轴垂直指向边界的向径; t 为时间; Q 表示铸锭的温度分布; Q_w, β 与 Q_s, α 分别为底部与侧边的水温及热交换系数; $K = K(r, z), c = c(r, z), \rho = \rho(r, z)$ 分别表示铸锭的热传导系数、比热与密度.

上部边界通常采用抛物分布的定常边界条件¹⁾

$$f(r, t) = Q_c - \eta r^2,$$

$\eta > 0$ 可由物理性能决定. Q_c 表示熔渣液化面(即 $z = h$) 的中心温度. 注意在边界上 $f(r, t)$ 是可测出的, 故 Q_c 亦可近似估出. 根据经验, 侧边界的散热系数 $\alpha(z)$ 在液体部分是固体部分的 10—40 倍, 而下部边界散热系数 $\beta(r)$ 与侧边固体部分比较接近. 在中心点, 由于热流量为零, 满足

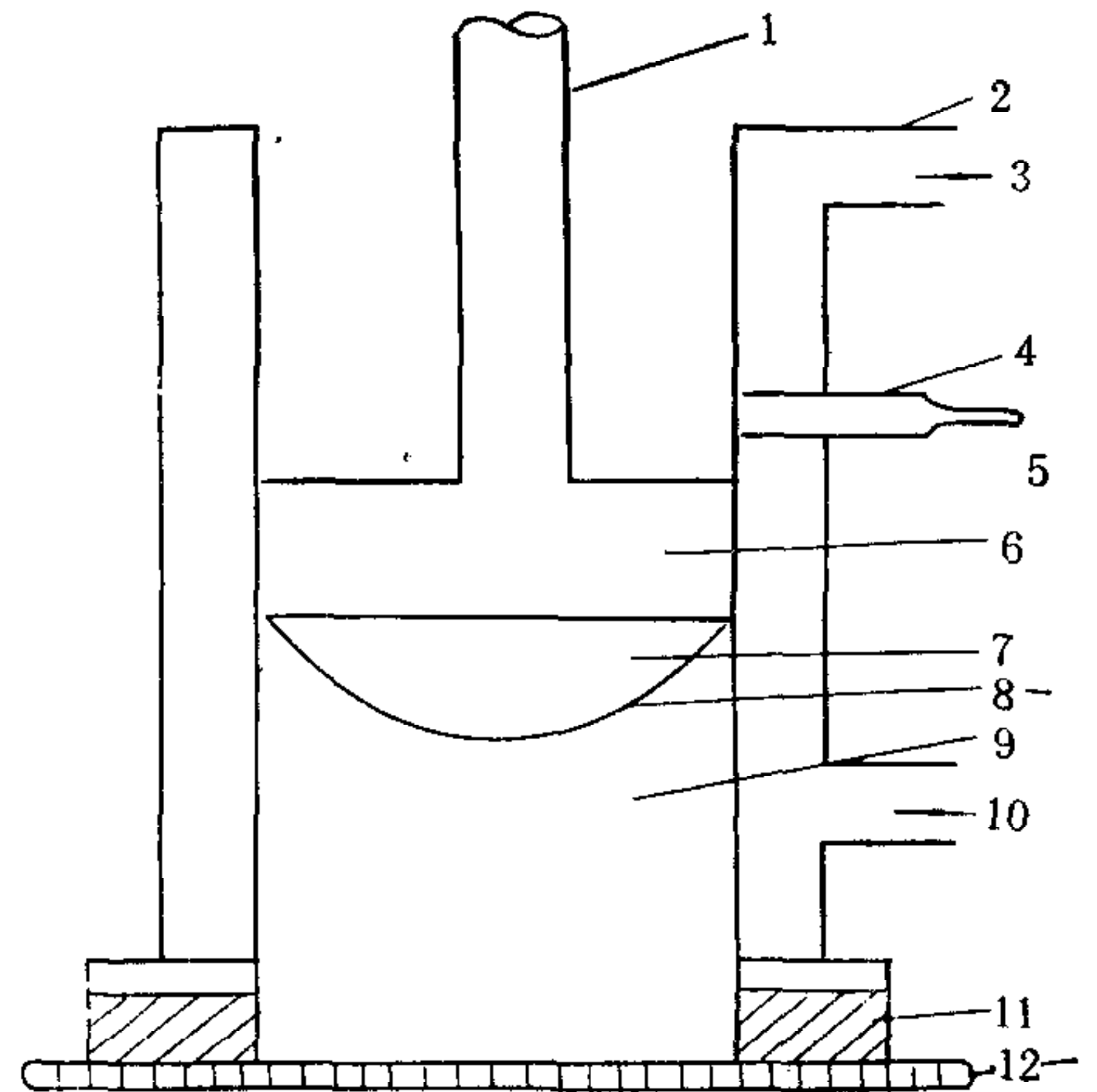
$$\left. \frac{\partial Q}{\partial r} \right|_{r=0} = 0. \quad (1.10)$$

由于渣液面在溶化过程中不断上升, 故 h 是随时间变化的. 当重溶过程经过初始阶段达到溶化速度与结晶速度平衡以后, 则可以看作向上移动坐标系中的固定区域 (h 为常数) 问题.

根据热物理性能知, 在高温状态下, 热传导系数 K 不是常数, 特别是在两相分界区产生剧烈变化时近似于间断函数(文献 [3] 中将 K 当做常数提到微分符号外是不准确的).

$$K \in \mathbf{K}_{ad} = \{K(r, z) | K \in C_p(\Omega_t), 0 < K_1 \leq K \leq K_2\}, \quad (1.11)$$

其中 $C_p(\Omega_t)$ 表示 Ω_t 中的逐片光滑函数类, K_1, K_2 是物理上已知的两常数.



1. 电极; 2. 铜结晶器; 3. 出水口; 4. 铜管; 5. 热电偶; 6. 溶渣; 7. 液态金属; 8. 两相分界面; 9. 钢锭; 10. 进水口; 11. 绝缘环; 12. 水冷板

图 1 电渣重熔装置示意图

1) 郑学锋, 电渣铸温度场数学模型的应用——大尺寸 M_2 高速钢电渣锭的工艺分析, 冶金部钢铁研究总院年会论文集, 1986.

今假定在 Ω 的某个子域 Ω_s (可以在边界) 上实测到某些与 Q 有关的信息 $F(Q^*)$ ($F(\cdot)$ 是线性算子), Q^* 表示实际系统的温度, 问题化为: 在 K_{ad} 中寻找函数 $K(r, z)$ 代入系统 (1.5)–(1.10) 式, 使其解 $Q(r, z, t)$ 满足 $F(Q) \equiv F(Q^*)$. 考虑到实际测量误差及模型误差, 精确实现恒等式是不现实的, 故改为求 $K \in K_{ad}$, 使泛函指标

$$J = \frac{1}{2} \int_{\Omega_s} (F(Q) - F(Q^*))^2 dr dz dt \quad (1.12)$$

达极小, 就认为这个 $K(r, z)$ 是近似真实的热传导系数的分布状态, 则它的间断面就近似真实的固液分界面了.

二、利用脉冲变分原理求解

由于 K_{ad} 是间断函数类, 不能简单地应用古典变分方法求解, 而借助于脉冲变分原理^[1,2].

对系统 (1.5)–(1.10) 式作变换

$$K \frac{\partial Q}{\partial r} = Q_1, \quad K \frac{\partial Q}{\partial z} = Q_2, \quad \frac{\partial Q}{\partial t} = Q_3. \quad (2.1)$$

这些量分别表示各方向的热流量及温度变化速度, 从物理上看即使在 K 的间断线处, 也能保证它们的连续性. 不妨设 $c\rho \equiv 1$, 则可化为系统

$$\begin{cases} \frac{\partial Q_1}{\partial r} + \frac{Q_1}{r} + \frac{\partial Q_2}{\partial z} = Q_3, \\ \frac{\partial Q}{\partial r} = \frac{Q_1}{K}, \\ \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{Q_2}{K}, \\ \frac{\partial Q}{\partial t} = Q_3. \end{cases} \quad (2.2)$$

初、边值条件为

$$\begin{aligned} (Q_1 + \alpha Q)|_{r=R} &= \alpha Q_s, \quad Q_1|_{r=0} = 0, \\ (-Q_2 + \beta Q)|_{z=0} &= \beta Q_w, \quad Q|_{z=h} = f(r, t), \\ Q|_{t=0} &= Q_0(r, z). \end{aligned}$$

为简便, 将所有初、边值条件记为向量算子. $M_1(\cdot) = g_1$, $g_1 = (\alpha Q_s, 0, \beta Q_w, f, Q_0)^T$. 并记 $\mathbf{Q} = (Q, Q_1, Q_2, Q_3)^T$, $\mathbf{x} = (r, z)$, $\mathbf{x} \in \Omega_s$. 取 Ω_s 中固定点 $\mathbf{y} = (r_0, z_0)$, 在 \mathbf{y} 附近对 K 作脉冲变动, 即

$$\bar{K}(r, z) = \begin{cases} P, & \mathbf{x} \in E_y, \mathbf{x} = (r, z), \\ K, & \text{其它}. \end{cases} \quad (2.3)$$

其中 $\text{mes } E_y = \varepsilon$, E_y 为包含 \mathbf{y} 的小邻域, $P \in [K_1, K_2]$. 设 K 与 \bar{K} 对应的系统 (2.2) 式的解为 \mathbf{Q} 与 $\bar{\mathbf{Q}}$, 则根据脉冲变分原理可得

$$\Delta \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}, p) = \bar{\mathbf{Q}} - \mathbf{Q} = \varepsilon \mathbf{H}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}, p) + \tilde{o}(\varepsilon, \mathbf{x}). \quad (2.4)$$

其中 $\Delta \mathbf{Q} = (\Delta Q, \Delta Q_1, \Delta Q_2, \Delta Q_3)^T$, $\mathbf{H} = (H, H_1, H_2, H_3)^T$. \mathbf{H} 满足

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial r} + \frac{H_1}{r} + \frac{\partial H_2}{\partial z} \\ \frac{\partial H}{\partial r} \\ \frac{\partial H}{\partial z} \\ \frac{\partial H}{\partial t} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{K} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{K} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{H} \\ & = \delta(x-y) \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{K(y)} \right) \begin{bmatrix} 0 \\ Q_1(y, t) \\ Q_2(y, t) \\ 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

可化为下面四个方程：

$$\begin{cases} \frac{\partial H_1}{\partial r} + \frac{H_1}{r} + \frac{\partial H_2}{\partial z} - H_3 = 0, \\ \frac{\partial H}{\partial r} - \frac{1}{K} H_1 = \delta(x-y) \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{K(y)} \right) Q_1(y, t), \\ \frac{\partial H}{\partial z} - \frac{1}{K} H_2 = \delta(x-y) \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{K(y)} \right) Q_2(y, t), \\ \frac{\partial H}{\partial t} - H_3 = 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

初、边值条件为

$$M_1(\mathbf{H}) = 0. \quad (2.7)$$

由(2.6), (2.7)式消去 H_1, H_2, H_3 有

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial r} \left(K \frac{\partial H}{\partial r} \right) + \frac{K}{r} \frac{\partial H}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial H}{\partial z} \right) \\ = \frac{\partial H}{\partial t} + \delta'_r(x-y) \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{K(y)} \right) K^2(y) \frac{\partial Q}{\partial r} \Big|_{x=y} \\ + \frac{1}{r_0} \delta(x-y) \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{K(y)} \right) K^2(y) \frac{\partial Q}{\partial r} \Big|_{x=y} \\ + \delta'_z(x-y) \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{K(y)} \right) K^2(y) \frac{\partial Q}{\partial z} \Big|_{x=y}, \\ M(H) = 0. \end{cases} \quad (2.8)$$

由(2.4)式

$$\Delta Q(x, t, y, p) = \varepsilon H(x, t, y, p) + \tilde{o}(\varepsilon, x). \quad (2.9)$$

若记

$$H(x, t, y, p) = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{K(y)} \right) K^2(y) H_0(x, t, y), \quad (2.10)$$

则 $H_0(x, t, y)$ 满足

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial r} \left(K \frac{\partial H_0}{\partial r} \right) + \frac{K}{r} \frac{\partial H_0}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial H_0}{\partial z} \right) = \frac{\partial H_0}{\partial t} + \delta'_r(x-y) \frac{\partial Q}{\partial r} \Big|_{x=y} \\ + \frac{1}{r_0} \delta(x-y) \frac{\partial Q}{\partial r} \Big|_{x=y} + \delta'_z(x-y) \frac{\partial Q}{\partial z} \Big|_{x=y}, \\ M(H_0) = 0. \end{cases} \quad (2.11)$$

注意到 F 为线性算子, y 为参变量, 则此时泛函指标的变化量为

$$\Delta J(y, p) = \delta J(y, p) + o(\varepsilon). \quad (2.12)$$

其中

$$\delta J(y, p) = \varepsilon \int_{\Omega_s} (F(\theta) - F(\theta^*)) F(H(x, t, y, p)) dr dz dt, \quad (2.13)$$

又记

$$X(y) = \int_{\Omega_s} (F(Q) - F(Q^*)) F(H_0(x, t, y)) dr dz dt, \quad (2.14)$$

则可直接得到

$$\delta J(y, p) = \varepsilon \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{K(y)} \right) K^2(y) X(y). \quad (2.15)$$

由上式, 令 $\delta J(y, p) < 0$, 便可以得到 J 对 K 在 y 点的强导数为

$$J'_K(y) = -X(y). \quad (2.16)$$

根据所求梯度, 便可利用最速下降法来识别参数 $K(r, z)$, 其步骤如下:

- 1) 给 $K(r, z)$ 的任意估计值 $K^n(r, z) \in K_{ad}$, 根据系统 (1.5)–(1.10) 式求出 $Q^n(r, z, t)$;
- 2) 由 (1.12), (2.11) 式分别求出 $J^n, H_0^n(r, z, t)$;
- 3) 由 (2.14), (2.16) 式求出 $J'_K(y)$;
- 4) 将 $J(K^n - \lambda J'_K)$ 作为 λ 的单参数函数进行一维搜索, 求出最佳值 $\lambda^n (\lambda > 0)$;
- 5) 令 $K^{n+1} = K^n - \lambda^n J'_K$, 循环运算, 直到满足 $J^n - J^{n+1}$ 足够小, 或 J^n 足够小为止.

三、差分计算及仿真结果

将区域 Ω 在 r, z, t 方向上分别划分 N, M, L 等分:

$$r \text{ 轴: } 0 = r_0 < r_1 < \cdots < r_N = R;$$

$$z \text{ 轴: } 0 = z_0 < z_1 < \cdots < z_M = h;$$

$$t \text{ 轴: } 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_L = T.$$

$$r_i - r_{i-1} = \Delta r, \quad i = 1, 2, \cdots, N, \quad z_j - z_{j-1} = \Delta z, \quad j = 1, 2, \cdots, M,$$

$$t_k - t_{k-1} = \Delta t, \quad k = 1, 2, \cdots, L.$$

设 $K(r, z)$ 在 Ω_i 上每个小区域内是常数

$$K(r, z) = K_{ij}, \quad r_{i-1} \leq r < r_i, \quad z_{j-1} \leq z < z_j,$$

又记

$$Q(r_i, z_j, t_k) = Q_{i,j}^k, \quad Q_0(r_i, z_j) = Q_{0i,j}, \quad \alpha(z_j) = \alpha_j,$$

$$\beta(r_i) = \beta_i, \quad Q_s(z_j) = g_{1j}, \quad f(r_i, t_k) = f_i^k, \quad Q_w(r_i) = g_{2i},$$

则系统的离散形式为

$$\begin{aligned} Q_{i,j}^{k+1} &= Q_{i,j}^k + \Delta t (L_{i,j,k}^{(1)} + L_{i,j,h}^{(2)} + L_{i,j,h}^{(3)}), \quad i \neq 0. \\ Q_{0,j}^{k+1} &= Q_{0,j}^k + \Delta t (2L_{0,j,k}^{(1)} + L_{0,j,k}^{(3)}), \quad i = 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

其中 $i \neq 0$ 时

$$L_{i,j,k}^{(1)} = \left[\frac{1}{2} (K_{i+1,j+1} + K_{i+1,j}) Q_{i+1,j}^k - \frac{1}{2} (K_{i+1,j+1} + K_{i+1,j} + K_{i,j+1} + K_{i,j}) \cdot Q_{i,j}^k + \frac{1}{2} (K_{i,j+1} + K_{i,j}) Q_{i-1,j}^k \right] / (\Delta r)^2, \quad (3.2)$$

$$L_{i,j,k}^{(2)} = (K_{i+1,j+1} + K_{i+1,j} + K_{i,j}) (Q_{i+1,j}^k - Q_{i-1,j}^k) / (r_i (\Delta r)^2), \quad (3.3)$$

$$L_{i,j,k}^{(3)} = \left[\frac{1}{2} (K_{i+1,j+1} + K_{i,j+1}) Q_{i,j+1}^k - \frac{1}{2} (K_{i+1,j+1} + K_{i+1,j} + K_{i,j+1} + K_{i,j}) Q_{i,j}^k + \frac{1}{2} (K_{i+1,j} + K_{i,j}) Q_{i,j-1}^k \right] / (\Delta z)^2. \quad (3.4)$$

当 $i = 0$ 时

$$L_{0,j,k}^{(1)} = (K_{1,j+1} + K_{1,j}) (Q_{1,j}^k - Q_{0,j}^k) / (\Delta r)^2, \quad (3.5)$$

$$L_{0,j,k}^{(3)} = (K_{1,j+1} Q_{0,j+1}^k - (K_{1,j+1} + K_{1,j}) Q_{0,j}^k + K_{1,j} Q_{0,j-1}^k) / (\Delta z)^2. \quad (3.6)$$

初、边值条件处理如下:

$$Q_{i,j}^0 = Q_{0,i,j}, \quad Q_{i,M}^{k+1} = f_i^{k+1}, \quad (3.7), (3.8)$$

$$Q_{N,j}^{k+1} = (a Q_{N-1,j}^{k+1} + \alpha_j \Delta r \cdot g_{1j}) / (a + \alpha_j \Delta r), \quad (3.9)$$

$$Q_{i,0}^{k+1} = (b Q_{i,1}^{k+1} + \beta_i \Delta z g_{2i}) / (b + \beta_i \Delta z). \quad (3.10)$$

其中

$$a = \frac{1}{2} (K_{N,j+1} + K_{N,j}), \quad j = 0, 1, \dots, M-1,$$

$$b = \begin{cases} \frac{1}{2} (K_{i+1,1} + K_{i,1}), & i = 1, 2, \dots, N-1, \\ K_{1,1}, & i = 0. \end{cases}$$

计算变分梯度时, 需要求解方程 (2.11) 式, 其差分格式及初、边值条件处理方法同上, 只需用 $H_{0,i,j,m,n}^k = H_0(r_i, z_j, t_k; r_m, z_n)$ 代替 $Q_{i,j}^k$, 方程右端出现的函数 $\delta(x-y)$, $\delta'_r(x-y)$ 和 $\delta'_z(x-y)$ 分别取值如下:

$$\delta_{i,j,m,n} = \begin{cases} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ 0 \end{cases}, \quad (\delta'_r)_{i,j,m,n} = \begin{cases} -\frac{1}{2\Delta r} \\ \frac{1}{2\Delta r} \\ -\frac{1}{2\Delta r} \\ \frac{1}{2\Delta r} \\ 0 \end{cases}, \quad (\delta'_z)_{i,j,m,n} = \begin{cases} -\frac{1}{2\Delta z}, & (i,j) = (m,n) \\ -\frac{1}{2\Delta z}, & (i,j) = (m-1,n) \\ \frac{1}{2\Delta j}, & (i,j) = (m,n-1) \\ \frac{1}{2\Delta j}, & (i,j) = (m-1,n-1) \\ 0, & (i,j) \text{ 取其它.} \end{cases}$$

梯度值便可由 (2.14), (2.16) 式得出

$$J'_{k,m,n} = - \sum_{k=1}^L \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (F(\theta) - F(\theta^*))_{i,j}^k F(H_0)_{i,j,m,n}^k. \quad (3.11)$$

识别过程中假设可测出下部的温度值, 即

$$F(\theta) = \theta|_{z=0}, \quad \Omega_s = [0, R] \times [0, T],$$

则识别结果见图 2。其中 (a) 表示在各种测量干扰下, 识别 K 的间断线与真实的结果比较; (b) 说明等温线的逼近结果仍是令人满意的。因为固液分界线应该是温场的等温线。

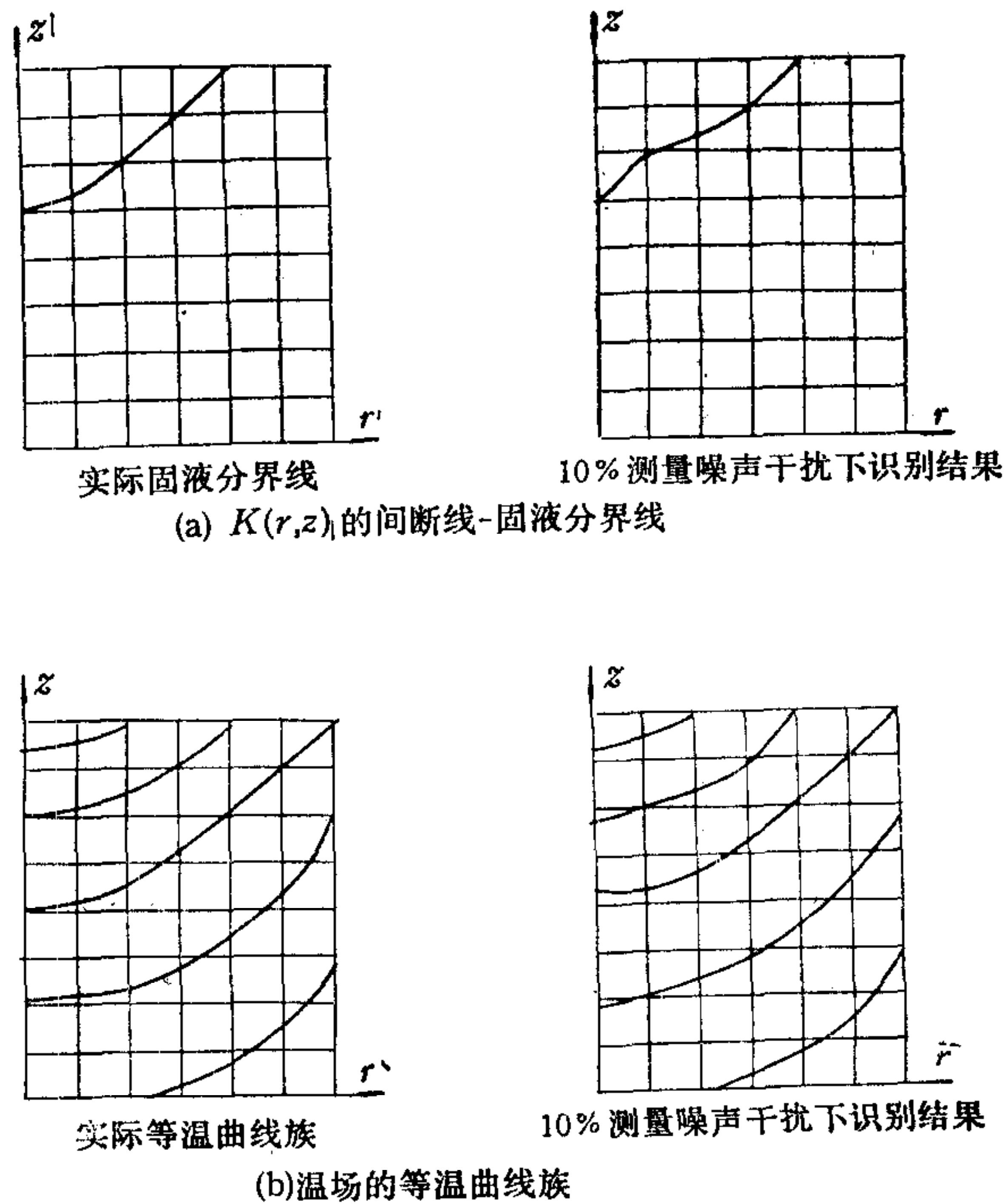


图 2 识别结果的比较

参 考 文 献

- [1] Huang Guang Yuan, Principle of Pulse Variation and Its Applications, Proceedings of Intern. Symp. on Math. Theory of Networks and Systems, 4(1981), 103—110, (Los Angeles).
- [2] 黄光远等, 地震勘探的一维反射波成象, 应用科学学报, 4(1986), 118—125.
- [3] Sun R. C. and Pridgen, J. W., A Mathematical Model for Electro-slag Remelt Furnace in Laboratory Science, Intern. Symp. on ESR Technique, Part 3, 1969(Pittsburgh).

THE IDENTIFICATION OF THE TWO-PHASE REGION IN AN ELECTRO-SLAG REMELTING PROCESS

HUANG GUANGYUAN LIN FENG

(Shandong University)

ZHENG XUEFENG

(Steel-Iron Research Institute)

ABSTRACT

In this paper, a new method to determine the interface of molten metal and ingot in an electro-slag remelting process (ESR) is presented. This method is based on the principle of pulse variation given by References [1, 2]. And the identification problem is transferred into an optimal control problem. Examples are given to show the efficiency and feasibility of this method.

Key words —— Electro-slag remelting; two-phase region; identification; pulse variation.