第 16 卷 第 1 期 自动化学报 Vol. 16, No. 1
1990 年 1 月 ACTA AUTOMATICA SINICA Jan., 1990

广义系统的可逆性

杨成梧　谭华林
(华东工学院)

摘　要

本文提出了“L-微分逆”和“固有微分”的概念,给出了广义系统可逆性的充要条件判据和逆系统的构造方法,并讨论了有关的性质.

关键词——广义系统,可逆性,线性系统.

线性系统可逆性的实质是重构系统输入的能力. 关于正常系统的可逆性，人们的兴趣主要集中于用原系统的系数矩阵描述逆系统的存在性、构造和性质，这些工作因 Sain 和 Massey[1] 的文章而显得成熟. 对广义系统的可逆性，至今只有 Lewis[2] 就离散的情形进行了讨论. 本文考察连续的情形,解决可逆性的主要问题,即存在性、构造和有关性质.

一、基本定义

设线性定常广义系统为

$$S:\quad E\dot{x} = Ax + Bu,\qquad y = Cx. \tag{1}$$

其中 $x\in R^n$, $u\in R^p$, $y\in R^m$, E 奇异. 恒假定 S 正则,即 $\det(sE-A)\neq 0$. 再设初值 $x(0-)=0$.

定义 1. 系统 $\hat{S}(\hat{E},\hat{A},\hat{B},\hat{C})$ 称为系统 $S(E,A,B,C)$ 的一个 L-微分逆,如果

$$\hat{H}(s)H(s) = (s+\mu)^L I_p. \tag{2}$$

这里 $\hat{H}(s)$、$H(s)$ 分别是系统 $\hat{S}$、S 的传递函数阵,μ 是满足 $\det(\mu E + A)\neq 0$ 的任一标量，I_p 是 p 阶单位阵.

定义 2. 系统 S 称为可逆的,如果对某有限的 L、S 有一个 L-微分逆，使 L-微分逆存在的最小非负整数 L 称为可逆系统的固有微分,记为 L_0.

注记 1. (2) 式表明，当 $\hat{S}$ 与 S 串联时，$\hat{S}$ 的输出 $\hat{y}(s)$ 正是 S 的输入 $u(s)$ 及它的 1 至 L 阶微分的线性组合,这就是 L-微分逆的含义,这也与广义系统解中输入部分的结构相吻合.

注记 2. 为保证定义 2 有意义,要求定义 1 中的逆系统是广义系统. 这样，可逆系统的固有微分是重构系统输入所需积分的最少次数.

本文于 1987 年 7 月 23 日收到.

注记 3. 由(2)式易见，$\hat{S}$ 是 S 的一个左逆，因而总有 $p \leqslant m$. 另外可证，当 S 降为正常系统（E 非奇异)时，若 S 可逆，则其必有 0-微分逆(即正常系统重构输入不需积分)，这表明本文定义与文[1]的有关定义相容.

二、存 在 性

对系统 S 作变换:

$$z(t) = x(t)\exp(\mu t), \tag{3}$$

其中 μ 使 $\det(\mu E + A) \neq 0$，则由 S 可得:

$$\bar{S}^*:\ \begin{aligned} \bar{E}\dot{z} &= z + \bar{B}\omega, \\ \gamma &= \bar{C}z. \end{aligned} \tag{4}$$

及

$$\bar{S}_D:\ \begin{aligned} \dot{z} &= \bar{E}z + \bar{B}\omega, \\ \gamma &= \bar{C}z. \end{aligned} \tag{5}$$

这里 $\bar{E} = (\mu E + A)^{-1}E$，$\bar{B} = (\mu E + A)^{-1}B$，$\bar{C} = C$，且 $\omega = u\exp(\mu t)$，$\gamma = y\exp(\mu t)$ 为新的输入、输出. 称 $\bar{S}$、$\bar{S}_D$ 互为传递函数对偶.

引理. 设系统 S、$\bar{S}$、$\bar{S}_D$ 的传递函数阵依次为 $H(s)$、$\bar{H}(s)$、$\bar{H}_D(s)$，则

$$H(s) = \bar{H}(s + \mu), \tag{6}$$

$$\bar{H}_D(s) = -\frac{1}{s}\bar{H}\left(\frac{1}{s}\right). \tag{7}$$

记:

$$M_i = \begin{bmatrix} \bar{C}\bar{B} & 0 & \cdots & 0 \\ \bar{C}\bar{E}\bar{B} & \bar{C}\bar{B} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \bar{C}\bar{E}^{i-1}\bar{B} & \bar{C}\bar{E}^{i-2}\bar{B} & \cdots & \bar{C}\bar{B} \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \cdots, \tag{8}$$

$$N = \begin{bmatrix} \bar{C}\bar{B} & 0 & \cdots & 0 \\ \bar{C}\bar{E}\bar{B} & \bar{C}\bar{B} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{C}\bar{E}^{n}\bar{B} & \bar{C}\bar{E}^{n-1}\bar{B} & \cdots & \bar{C}\bar{B} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{C}\bar{E}^{2n-1}\bar{B} & \bar{C}\bar{E}^{2n-2}\bar{B} & \cdots & \bar{C}\bar{E}^{n-1}\bar{B} \end{bmatrix}. \tag{9}$$

定理 1. 对任何正整数 L，

$$\operatorname{rank}(M_{L+1}) - \operatorname{rank}(M_L) \leqslant p \tag{10}$$

成立，且等式成立的充要条件是系统 S 有 $(L-1)$-微分逆.

证明. 首先证明

$$\hat{H}(s)H(s) = (s + \mu)^L I_p \tag{11}$$

成立，当且仅当等式

$$\hat{H}_D(s)\bar{H}_D(s) = \frac{1}{s^{L+2}} I_p \tag{12}$$

成立. 这里 $H(s)$、$\hat{H}(s)$ 是 S 及某(广义)系统 $\hat{S}$ 的传递函数阵，$\bar{H}_D(s)$、$\hat{H}_D(s)$ 则是相

应的正常系统 $\bar{S}_D$、$\hat{\bar{S}}_D$ 的传递函数阵。

事实上，由引理易得:

$$\hat{H}_D(s)\bar{H}_D(s)=\frac{1}{s^2}H\left(\frac{1}{s}-\mu\right)H\left(\frac{1}{s}-\mu\right), \tag{13}$$

$$\hat{H}(s)H(s)=\frac{1}{(s+\mu)^2}\hat{H}_D\left(\frac{1}{s+\mu}\right)\bar{H}_D\left(\frac{1}{s+\mu}\right). \tag{14}$$

由此，若(11)式成立，由(13)式得:

$$\hat{H}_D(s)\bar{H}_D(s)=\frac{1}{s^2}(s-\mu+\mu)^L I_p=\frac{1}{s^{L+2}}I_p.$$

反之，若(12)式成立，由(14)式知:

$$\hat{H}(s)H(s)=\frac{1}{(s+\mu)^2}\cdot\frac{1}{\left(\frac{1}{s+\mu}\right)^{L+2}}I_p=(s+\mu)^L I_p.$$

注意到 $\bar{S}_D$ 即正常系统(5)，上面的讨论表明 S 有 L-微分逆当且仅当 $\bar{S}_D$ 有 $(L+2)$-积分逆，故由文[1]知本定理得证。

由定理 1 的证明过程立即有:

推论 1. 广义系统 S 可逆（按本文的定义）的充要条件是正常系统 $\bar{S}_D$ 可逆（按文献[1]的定义）。

注记 4. 一个有趣的事实是(10)式左端关于 L 非降，因此，若 L 是使(10)式等号成立的最小下标，则 $L-1$ 就是系统 S 的固有微分。

定理 2. 系统可逆的充要条件是:

$$\operatorname{rank}(M_n)-\operatorname{rank}(M_{n-1})=p, \tag{15}$$

即可逆系统的固有微分不超过系统状态的维数。

定理 3. 系统可逆的充要条件是:

$$\operatorname{rank}(N)=(n+1)p. \tag{16}$$

推论 2. $\operatorname{rank}(N)=(n+1)p \Longleftrightarrow \operatorname{rank}(M_n)-\operatorname{rank}(M_{n-1})=p$.

定理 4. 若系统 S 有 L-微分逆，则对任意的整数 $L'\geqslant L$，S 也有 L'-微分逆。

以上结果是文献[1]结果的直接推广，而定理 4 由定义及广义系统的实现理论[3]可证。

Brokett 等[4]定义了函数可再现性：任意给一系统输出 $y(s)$，都能找到输入 $u(s)$，使 $y(s)=H(s)u(s)$。这个定义也适合于广义系统。易见，函数可再现性是可逆性的对偶概念，因此有如下结论:

记 $E_1=(\mu E^T+A^T)^{-1}E^T$，$B_1=(\mu E^T+A^T)^{-1}C^T$，$C_1=B^T$ 及

$$M_{Di}=\begin{bmatrix} C_1B_1 & C_1E_1B_1\cdots & C_1E_1^{i-1}B_1 \\ 0 & C_1B_1 & \cdots C_1E_1^{i-2}B_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots \quad C_1B_1 \end{bmatrix}, \quad i=1,2,\cdots, \tag{17}$$

$$N_D=\begin{bmatrix} C_1B_1 & C_1E_1B_1\cdots & C_1E_1^nB_1 & \cdots C_1E_1^{2n-1}B_1 \\ 0 & C_1B_1 & \cdots C_1E_1^{n-1}B_1 & \cdots C_1E_1^{2n-2}B_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots \quad C_1B_1 & \cdots C_1E_1^{n-1}B_1 \end{bmatrix}. \tag{18}$$

定理 5. 下列命题等价：

(1) 系统 S 是函数可再现的；

(2) $\mathrm{rank}(N_D) = (n+1)m$；

(3) $\mathrm{rank}(M_{Dn}) - \mathrm{rank}(M_{Dn-1}) = m$；

(4) 存在整数 L，$0 \leqslant L \leqslant n$，使得 $\mathrm{rank}(M_{DL+1}) - \mathrm{rank}(M_{DL}) = m$.

三、逆系统的构造

文献[1]通过把 L-积分逆的构造问题转化为一个矩阵方程组的求解问题而理论上解决了逆系统的构造问题。本文则通过广义系统的实现理论[3]，得到了如下 L-微分逆的构造算法。

算法：设广义系统 S 可逆。

第一步。由推论 1 知相应正常系统 $\bar{S}_D$ 可逆。设 $\bar{S}_D$ 有 L-积分逆 $\hat{\bar{S}}_D$，且不妨 $L \geqslant 2$，知 $\hat{\bar{S}}_D$ 的传递函数阵 $\hat{H}_D(s)$ 必为真有理分式阵；

第二步。若 $\hat{H}_D(s)$ 严格真，由正常系统的实现理论可把它实现为如下系统：

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}} &= A_2\boldsymbol{x} + B_2\boldsymbol{u}, \\ \boldsymbol{y} &= C_2\boldsymbol{x}. \end{aligned} \tag{19}$$

再由文献[3]的结果知选 μ 使 $\det(\mu A_2 + I) \neq 0$，则

$$\begin{aligned} A_2\dot{\boldsymbol{z}} &= (\mu A_2 + I)\boldsymbol{z} + B_2\boldsymbol{\omega}, \\ \boldsymbol{\gamma} &= C_2\boldsymbol{z}, \end{aligned} \tag{20}$$

是 S 的一个 $(L-2)$-微分逆；

第三步。若 $\hat{H}_D(s)$ 真但不严格真，由于 $\frac{1}{s}\hat{H}_D(s)$ 是 $\bar{S}_D$ 的某个 $(L+1)$-微分逆的传递函数阵，且严格真，由第二步可得 S 的一个 $(L-1)$-微分逆。

参 考 文 献

[1] Sain, M.K., Massey, J. L., Inveritibility of Linear Time-inveriant Dynamical Systems, *IEEE Trans.* **AC-14**(1969), 141—149.

[2] Lewis, F.L., Inversion of Descriptor Systems, Proceedings of The 1983 ACC, San Francisco, Vol. **3**, 1153—1158.

[3] 杨成梧、谭华林，广义系统的最小实现问题，控制理论与应用，**5**(1988)，1，72—77.

[4] Brockett, R.W., Mesarovic, M.D., The Reproducibility of Multivariable Systems, *J. Math. Anal. Appl.*, **11**(1969), 548—563.

THE INVERTIBILITY OF GENERALIZED SYSTEMS

YANG CHENGWU TAN HUALIN
(*East China Institute of Technology*)

ABSTRACT

In this paper, the concepts of "L-differential inverse" and "inherent differentiation" are introduced. Several necessary and sufficient conditions for the invetibility of a generalized system and an inversion algorithm are given. Also some related properties are discussed.

Key words——Generalized systems; invertibility; linear systems.