第16卷 第1期　　自 动 化 学 报　　Vol. 16, No. 1
1990年1月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　Jan., 1990

关于最小分散镇定结构的研究

陈浩勋　李人厚
(西安交通大学)

摘　要

本文考察线性时不变多变量系统的分散镇定问题，揭示了局部控制站间的通信与消除固定模间的内在联系，并由此把求最小(最经济)分散可镇定结构问题转化成一个显式的特殊0-1规划问题，导出了一种求最小分散可镇定结构的有效算法.

关键词——分散控制，大系统，线性系统.

一、预备知识

本文所考察的系统是具有N个控制站的线性时不变系统:

$$S:\ \dot{\boldsymbol{x}}(t)=A\boldsymbol{x}(t)+\sum_{i=1}^{N}B_i\boldsymbol{u}_i(t),\tag{1.1}$$

$$\boldsymbol{y}(t)=(\boldsymbol{y}_1^T(t),\cdots\boldsymbol{y}_N^T(t))^T=(C_1^T,C_2^T,\cdots C_N^T)^T x(t).\tag{1.2}$$

其中 $\boldsymbol{u}_i(t)\in R^{m_i}$ 和 $\boldsymbol{y}_i(t)\in R^{l_i}$ 是第 i 个控制站的局部输入和输出向量.

系统 S 的控制结构用一个0-1矩阵 E 表示:

$E=(e_{ij})_{N\times N}$，e_{ij} 取0或1.

$e_{ij}=1$ 表示第 j 个控制站的输出信息 $\boldsymbol{y}_j(t)$ 发向第 i 个控制站，$e_{ij}=0$ 则不发.记

$$B=(B_1,B_2,\cdots,B_N),\ C=(C^T,C_2^T,\cdots,C_N^T)^T.$$

定理 1.1 (Wang, Davison).系统 S 存在局部动态输出反馈律使闭环系统渐近稳定的充要条件是: $\Lambda(C,A,B,\bar{K})\subset\mathscr{C}^-$，其中 $\Lambda(C,A,B,\bar{K})=\bigcap_{K\in\bar{K}}\sigma[A+BKC]$ 为固定模集，$\mathscr{C}^-$ 表示复开左半平面.

定理 1.2 (Anderson, Clements).设 $\pi=\{1,2,\cdots,N\}$，定义π的一个分划$\beta=\{i_1,i_2,\cdots,i_k\}$ 和 $\pi-\beta=\{i_{k+1},\cdots,i_N\}$，它把$\pi$分成两个不相交的子集$\beta$和 $\pi-\beta$.记

$B^\beta=[B_{i_1},B_{i_2},\cdots,B_{i_k}]$，$C^{\pi-\beta}=[C_{i_{k+1}}^T,\cdots,C_{i_N}^T]^T$，则 $\mathrm{Rank}(\lambda I-A-BKC)<n-\alpha$，$\alpha\geqslant0$，$\forall K\in\bar{K}$ 的充要条件为: 存在某个分划π使

$$\mathrm{Rank}\begin{bmatrix}\lambda I-A & B^\beta\\ C^{\pi-\beta} & 0\end{bmatrix}<n-\alpha.$$

本文于1987年6月6日收到.

上两个定理中 $\bar{K}$ 的含义相同，请参见文献[1].

第二节用到矩阵组关于 $\lambda I - A$ 线性无关的概念：

称矩阵组 $B_1, B_2, \cdots, B_s (B_i \in R^{n\times m_i})$ 关于 $\lambda I - A(\lambda \in \mathscr{C}^{-1}, \mathscr{C}$ 为复数域)是列线性无关的．若对任何 $B_i (i = 1, 2, \cdots, s)$ 不存在系数矩阵 $\xi_i^0 \in \mathscr{C}^{n\times m_i}$, $\xi_i^j \in \mathscr{C}^{m_j\times m_i} (j \neq i)$, $i, j = 1, 2, \cdots, s$, 使 $B_i = (\lambda I - A)\xi_i^0 + \sum_{j\neq i}^{s} B_j \xi_i^j$, 即任何 B_i 都不能表示成 $\lambda I - A$, $B_j (j \neq i)$ 的"列线性组合"．最大可能个数的这种列线性无关矩阵组称为列矩阵基．对偶地，对 $\lambda I - A$ 及矩阵组 $C_1, C_2, \cdots C_s$, $(C_i \in R^{l_i\times n})$, 则有关于 $\lambda I - A$ 行线性无关及行矩阵基的概念．

当 $B_1, B_2, \cdots, B_s (C_1, C_2, \cdots, C_s)$ 都为列(行)向量时，上述称为列(行)(向量)线性无关和列(行)(向量)基．

若 $B = (B_1, B_2, \cdots, B_N)$, $C = (C_1^T, C_2^T, \cdots, C_N^T)^T$, $B(C)$ 关于 $\lambda I - A$ 的列(行)矩阵基是指 $B_1, B_2, \cdots, B_N (C_1, C_2, \cdots, C_N)$ 中最大可能个数的列(行)线性无关矩阵组．

二、站间通讯与消除固定模间的关系

为了消除固定模，要解决：(1)消除一个固定模最多需要几个站间控制通道的(单向)通讯？(2) 哪些控制站间的通讯对消除某个特定固定模有作用？如何建立起这些讯道？

定理 2.1. 对一具有 N 个控制站的联合可控可观系统 S, 若把多重固定模看成多个单重固定模(w 重看成 w 个)，则系统的任一固定模必可用增加一条(单向)站间讯道的通讯来消除．特别地，对 w 重固定模 λ_w, 它还可以通过增加 r_w 条(单向)站间讯道的通讯消除，其中 $r_w = n - \max_{K\in\bar{K}} \operatorname{rank}(\lambda_w I - A - BKC) \leqslant w$.

这里一条单向讯道的通讯对应于控制结构阵 E 中某个元素 e_{ij} 取 1，记

$I(\lambda) = \{(i_1, \cdots, i_p) \mid B_{i_1}, \cdots, B_{i_p}$ 是 B 关于 $\lambda I - A$ 的列矩阵基$\}$;

$J(\lambda) = \{(j_1, \cdots, j_q) \mid C_{j_1}, \cdots, C_{j_q}$ 是 C 关于 $\lambda I - A$ 的行矩阵基$\}$;

$$M(\lambda) = \left\{\begin{pmatrix} i_1, \cdots, i_p \\ j_1, \cdots, j_q \end{pmatrix} \middle| (i_1, \cdots, i_p) \in I(\lambda), (j_1, \cdots, j_q) \in J(\lambda)\right\}.$$

因为 (C, A, B) 联合可控可观，故 $M(\lambda)$ 对一切 $\lambda \in \sigma(A)$ 都非空，且有：

(1) 对 $\lambda \in \sigma(A)$, $p \leqslant r_\lambda$, $q \leqslant r_\lambda$, $r_\lambda = n - \operatorname{rank}(\lambda I - A)$;

(2) 当 $\lambda \in \sigma(A)$ 为 A 的单重特征值时，$p = q = 1$.

设 $\sigma = \begin{pmatrix} i_1, \cdots, i_p \\ j_1, \cdots, j_q \end{pmatrix} \in M(\lambda)$, 由 σ 和控制结构 E 可导出一个二分图 $G_\sigma(E)$, 其中 $\{i_1, \cdots, i_p\}$, $\{j_1, \cdots, j_q\}$ 对应于这个二分图的顶点(一组 p 个，一组 q 个)．站间讯道的通讯情况决定了这个二分图的边，即当且仅当 $e_{i_s j_t} = 1$ 时，顶点 i_s 和 j_t 间有一条(无向)边相连．一个二分图的每一顶点都有边相连，则称它是边覆盖的．

定理 2.2. 系统在控制结构 E 下的固定模 λ 可通过增加一些(单向)讯道的通讯，使增加通讯后形成的新控制结构 E', 对某个 $\sigma \in M(\lambda)$, 其对应的二分图 $G_\sigma(E')$ 为边覆

盖，则这个固定模因这些通讯而消去.

定理 2.2 给出了一种构造消除固定模 λ 的讯道组的简便方法:

(1) 求一组 $B(C)$ 关于 $\lambda I - A$ 的列(行)矩阵基，设为 $B_{i_1}, \cdots, B_{i_p}(C_{i_1}, \cdots, C_{i_q})$，它们可通过求秩运算获得.

(2) 对 $\sigma = \begin{pmatrix} i_1, \cdots, i_p \\ j_1, \cdots, j_q \end{pmatrix}$ 形成的二分图 $G_\sigma(E)$ (E 为原控制结构)添边，直至使这个二分图边覆盖，则这些新添的边所对应的讯道即为能消除这个固定模的讯道.

三、一种求最小分散可镇定结构的算法

用 ρ_{ij} 表示第 j 个观察站向第 i 个控制站发讯的通讯代价，希望寻求使总通讯费用 $\rho_E = \sum_{e_{ij}=1}\sum \rho_{ij}$ 最小而又能镇定整个系统的控制结构.

设系统在完全分散控制结构下，有 l 个不稳定的或其负实部不符合控制要求的固定模，记为 $\Lambda^f = \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_l\}$，现引入一个特殊的 0-1 规划问题如下:

$P01$:

$$\min \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \rho_{ij}e_{ij}$$

$$s\cdot t\begin{cases} \sum\limits_{i\in I(\lambda_k)}\sum\limits_{j\in J(\lambda_k)} e_{ij} \geqslant 1, \text{对 } \lambda_k \in \Lambda^f \text{ 单重}, \\ \left.\begin{matrix} \bigvee\limits_{(i_1,\cdots,i_p)\in I(\lambda_k)} \left(\sum\limits_{j=1}^{N} e_{i_rj} \geqslant 1,\ r = 1, \cdots, p\right) \\ \bigvee\limits_{(j_1,\cdots,j_q)\in J(\lambda_k)} \left(\sum\limits_{i=1}^{N} e_{ij_s} \geqslant 1,\ s = 1, \cdots, q\right) \end{matrix}\right\} \text{对 } \lambda_k \in \Lambda^f \text{ 多重}, \\ e_{ii} = 1,\ i = 1, 2, \cdots, N, \\ e_{ij} \text{ 取 0 或 1，对 } i \neq j, \end{cases}$$

其中 $\bigvee\limits_{(i_1,\cdots,i_p)\in I(\lambda_k)}(\quad)$ 表示对某个 $(i_1, \cdots, i_p) \in I(\lambda_k)$，括号内的不等式约束满足.

可以证明，此 $P01$ 的最优解和最经济分散可镇定结构一致. 这样，求最经济分散镇定结构问题转化为求一个显式的特殊 0-1 规划问题.

具体求 $I(\lambda_k)$、$J(\lambda_k)$ 构成 $P01$ 时，用 $A + BK^*C$ 代替 A 结果可能更好，其中 K^* 使 $\lambda_k I - A - BKC$ 达到其最大可能秩，$K \in \bar{K}$.

四、数值例子

考察具有三个控制站的系统 (C, A, B)[6]，它有一个多重固定模 $\lambda = 0$. 设 $\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 3 \\ 8 & 3 & 1 \end{pmatrix}$，通过求秩运算得:

$$I(\lambda) = \{(1, 2, 3)\},\ J(\lambda) = \{(2, 3)\},\ M(\lambda) = \left\{\begin{pmatrix} 1, 2, 3 \\ 2, 3 \end{pmatrix}\right\}.$$

化简求得最经济分散镇定结构问题 $P01$ 为：

$$P01:\quad \min 2e_{12}+2e_{21}+3e_{23}+3e_{32}+8e_{13}+8e_{31},$$

$$s\cdot t\quad e_{12}+e_{13}\geqslant 1,$$

$$e_{ij}=1 \text{ 或 } 0,\quad e_{ii}=1,$$

求 $P01$ 得：

$$E^*=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

参　考　文　献

[1] Wang, S. H. and Davison, E. J., On the Stabilization of Decentralised Control Systems, *IEEE Trans. on AC*, **18**(1973), 5, 473—478.

[2] Corfmat, J. P. and Morse, A. S., Decentralised Control of Linear Multivariable Systems, *Automatica*, **12**(1976), 4, 479—495.

[3] Anderson, B. O. D. and Clements, D. J., Algebric Characterization of Fixed Modes in Decentralised Control, *Automatica*, **17**(1981), 5, 703—712.

[4] Locateli, A. et al., Pole Placement: Role and Choice of the Underlying Information Pattern, *Richerche di Automatica*, **18**(1976), 1, 107—126.

[5] Xu Xiaoming, et al., The Synthesis of Decentralised Control with the Most Economical Information Structures, Fourth IFAC/IFORS Large Scale Systems Theory and Applications, Vol. **1**, 293—298. 1986.

[6] Singh, M. G., Decentralised Control, North Holland(1981), 199—201.

ON THE STUDY OF THE MINIMUM DECENTRALIZED STABILIZATION STRUCTURES

Chen Haoxun　　Li Renhou

(Xi'an Jiaotong University)

Abstract

In the paper, the problem of stabilizing a linear time invariant multivariable system by using decentralised control laws is considered. The relation between the cancellation of fixed modes and the information exchange among local control stations is explored. Based on the relation, the problem of determining the minimum (the most economical) decentralised stabilization structure is transformed into the problem of an explicit 0-1 programming, and an efficient algorithm for determining the minimum decentralised stabilization structure is derived.

Key words ——Decentralized control; large scale systems; linear systems.