# 鲁棒极点配置控制系统的一种设计方法

吴 嗣 亮
(燕 山 大 学)

**摘　　要**

本文提出了系统特征系数灵敏度的概念，导出了特征系数灵敏度与特征值灵敏度间的关系．在此基础上，提出了一种以加权特征系数灵敏度为性能指标,结构化小参数摄动下的鲁棒极点配置控制系统的设计方法．特征系数灵敏度计算简单，目标函数的极小化采用标准的具有二次收敛性质的参数最优化方法．

**关键词**——多变量系统，摄动，鲁棒性，极点配置，反馈．

## 一、引　言

鲁棒控制系统理论由于在数学上比较完善的现代控制理论与工程应用之间架起了一座桥梁,所以近十多年来,已受到控制界愈来愈多的重视[1]．由于极点配置是线性时不变控制系统设计中最常用的技术之一，鲁棒极点配置问题的研究也相应有着重要的意义．对于结构化小参数摄动下的鲁棒极点配置问题,文献[2—6]利用 Morgan 给出的极点对系统参数变化的灵敏度公式[7]，提出了直接极小化特征值对各不确定性参数的灵敏度的设计方法．由于特征值灵敏度计算复杂以及它的极小化只能采用零次收敛的参数最优化技术,当系统阶数较高时,这类设计方法并不十分有效．

本文首先提出了特征系数灵敏度的概念．根据特征值与特征多项式系数间的关系，导出了特征值灵敏度与特征系数灵敏度之间的等价关系，并用特征系数灵敏度构成性能指标进行鲁棒极点配置状态反馈控制器的设计．文中给出了实现该设计方法的算法．就作者所知，与本文的基本思想相近的只有 Berger 在1984年针对单变量离散系统提出的一种设计方法[8]．

## 二、特征系数灵敏度

设线性时不变多变量系统可用下列状态方程描述：

$$\dot{x}(t)=A(\alpha)x(t)+B(\alpha)u(t). \tag{1}$$

式中 $x(t)\in R^n$ 为状态向量；$u(t)\in R^m$ 为输入向量；$\alpha\in\Omega\subset R^r$ 为不确定性参数向量，

本文于1987年11月10日收到．

其标称值为 $\boldsymbol{\alpha}_0$. $A(\boldsymbol{\alpha})\in R^{n\times n}$, $B(\boldsymbol{\alpha})\in R^{n\times m}$ 为依赖于 $\boldsymbol{\alpha}$ 的系统矩阵和控制矩阵；它们的元素为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的可微函数.

系统的特征多项式为

$$P(s)=|sI-A(\boldsymbol{\alpha})|=s^n+P_{n-1}(\boldsymbol{\alpha})s^{n-1}+\cdots+P_0(\boldsymbol{\alpha}). \tag{2}$$

定义

$$\varepsilon_j^i(\boldsymbol{\alpha})=\frac{\partial P_i(\boldsymbol{\alpha})}{\partial\alpha_j},\ (i=0,1,\cdots,n-1;\ j=1,2,\cdots,r) \tag{3}$$

为特征系数灵敏度，它是参数 $\alpha_j$ 的变化对特征多项式系数 $P_i(\boldsymbol{\alpha})$ 的影响的描述.

设 $A(\boldsymbol{\alpha})$ 的特征值为 $s_1(\boldsymbol{\alpha})$, $s_2(\boldsymbol{\alpha})$, $\cdots,s_n(\boldsymbol{\alpha})$, 即

$$P(s)=\prod_{i=1}^{n}(s-s_i(\boldsymbol{\alpha})). \tag{4}$$

根据一元多项式根与系数的关系，有

$$P_{n-j}(\boldsymbol{\alpha})=(-1)^j\sum_{m_1=1}^{n-j+1}\sum_{m_2=m_1+1}^{n-j+2}\cdots\sum_{m_j=m_{j-1}+1}^{n}\prod_{k=1}^{j}s_{m_k}(\boldsymbol{\alpha}), \tag{5}$$
$$(j=1,2,\cdots,n).$$

显然，$P_i(\boldsymbol{\alpha})(i=0,1,\cdots,n-1)$ 是 $\boldsymbol{\alpha}$ 的可导函数. 根据文献 [9]，当

$$s_j(\boldsymbol{\alpha})(j=1,2,\cdots,n)$$

为 $A(\boldsymbol{\alpha})$ 的单重特征值时，$s_j(\boldsymbol{\alpha})$ 也是 $\boldsymbol{\alpha}$ 的可导函数. 因此，(5) 式两边对 $\alpha_i$ 求偏导可得

$$\varepsilon_i^{n-j}(\boldsymbol{\alpha})=(-1)^j\sum_{m_1=1}^{n-j+1}\sum_{m_2=m_1+1}^{n-j+2}\cdots\sum_{m_j=m_{j-1}+1}^{n}\sum_{k=1}^{j}(s_{m_1}(\boldsymbol{\alpha})\cdot s_{m_2}(\boldsymbol{\alpha})\cdot\cdots\cdot s_{m_{k-1}}(\boldsymbol{\alpha})\cdot s_i^{m_k}(\boldsymbol{\alpha})\cdot s_{m_{k+1}}(\boldsymbol{\alpha})\cdot\cdots\cdot s_{m_j}(\boldsymbol{\alpha})),$$
$$(j=1,2,\cdots,n). \tag{6}$$

其中

$$s_i^k(\boldsymbol{\alpha})=\partial s_k(\boldsymbol{\alpha})/\partial\alpha_i \tag{7}$$

为特征值灵敏度，表示参数 $\alpha_i$ 变化对特征值 $s_k$ 的影响.

由 (6) 式可见，当矩阵 $A(\boldsymbol{\alpha})$ 的特征值 $s_k(\boldsymbol{\alpha})$ $(k=1,2,\cdots,n)$ 的代数重数为 1 时，特征系数灵敏度 $\varepsilon_i^l(\boldsymbol{\alpha})$ $(l=0,1,\cdots,n-1)$ 与特征值灵敏度 $s_i^k(\boldsymbol{\alpha})$ $(k=1,2,\cdots,n)$ 之间存在着线性关系. 当 $\varepsilon_i^l(\boldsymbol{\alpha})(l=0,1,\cdots,n-1)$ 非常小时，特征值灵敏度 $s_i^k(\boldsymbol{\alpha})(k=1,2,\cdots,n)$ 也将很小.

实际上，上述结论也可定性得出：如果 $\alpha_i$ 的变化引起的特征多项式的系数

$$P_l(\boldsymbol{\alpha})(l=0,1,\cdots,n-1)$$

的变化很小，则当特征值 $s_k(\boldsymbol{\alpha})(k=1,2,\cdots,n)$ 的代数重数为 1 时，由于它们是

$$P_l(\boldsymbol{\alpha})(l=0,1,\cdots,n-1)$$

的可微函数[9]，由 $\alpha_i$ 的变化引起的特征值 $s_k(\boldsymbol{\alpha})(k=1,2,\cdots,n)$ 的变化也不会很大.

## 三、鲁棒极点配置问题

对于由 (1) 式描述的线性时不变多变量系统，要求设计一个定常状态反馈控制器，构

成控制

$$u = Fx + w, \tag{8}$$

使闭环系统

$$\dot{x}(t) = (A(\alpha) + B(\alpha)F)x(t) + B(\alpha)w \tag{9}$$

在参数标称状态下即 $\alpha = \alpha_0$ 时的极点精确地置于复平面上期望的位置，且当参数 $\alpha$ 偏离其标称值 $\alpha_0$ 时，闭环系统的极点尽可能小地偏离期望的位置。这就是鲁棒极点配置问题的一种描述。(8)，(9) 式中，$F \in R^{m\times n}$ 为状态反馈增益阵；$w \in R^m$ 为外输入向量。

当不确定性参数 $\alpha$ 只在围绕标称值 $\alpha_0$ 的小范围内变化时，上述鲁棒极点配置问题可以通过在标称对象参数下配置期望闭环极点的同时，极小化闭环极点对不确定性参数 $\alpha$ 的灵敏度来解决[2-6]。根据上一节的讨论，极小化标称对象参数下的闭环特征系数对 $\alpha$ 的灵敏度也将达到同样的目的。

假设 $\{A(\alpha_0), B(\alpha_0)\}$ 为能控对。根据能控性与极点可配置性的等价关系，必存在状态反馈增益阵 $F$，通过状态反馈 (8) 使 $\alpha = \alpha_0$ 时的闭环系统具有期望的极点。另一方面，若 $\{A(\alpha_0), B(\alpha_0)\}$ 为能控对，rank $B(\alpha_0) > 1$，则使标称对象参数下的闭环系统

$$\dot{x}(t) = (A(\alpha_0) + B(\alpha_0)F)x(t) + B(\alpha)w(t) \tag{10}$$

具有一组期望闭环极点的 $F$ 有无穷多个，它们构成 $R^{m\times n}$ 上的一个集合 $\boldsymbol{F}$。对于不同的 $F \in \boldsymbol{F}$，将得到具有不同的特征系数灵敏度的系统。为使闭环系统具有好的极点鲁棒性，应选取 $F \in \boldsymbol{F}$，使由标称对象参数下闭环系统的特征系数灵敏度构成的某一性能指标达到最小。

设闭环系统的期望极点为单极点 $s_1^0, s_2^0, \cdots, s_n^0$。取性能指标

$$J(F) = \sum_{i=1}^{r} \boldsymbol{\varepsilon}_i^T(\alpha_0, F) \cdot R_i \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_i(\alpha_0, F). \tag{11}$$

式中 $\boldsymbol{\varepsilon}_i^T(\alpha_0, F) = (\varepsilon_i^0(\alpha_0, F), \varepsilon_i^1(\alpha_0, F), \cdots, \varepsilon_i^{n-1}(\alpha_0, F))$；$\varepsilon_i^j(\alpha_0, F)$ 为标称对象参数下闭环系统(11)的特征系数灵敏度；上角标 $T$ 表示向量或矩阵的转置；$R_i$ 为加权阵，它决定各特征系数灵敏度的相对重要性。如何选取 $R_i$ 是一个值得探讨的问题。在此，介绍一种 $R_i$ 的选取方法：

$$R_i = \rho_i E^H \cdot E. \tag{12}$$

其中上角标 $H$ 表示矩阵的共轭转置；$\rho_i$ 为与 $\alpha_i$ 的可能变化范围的宽度成正比的某一正数；$E = [e_{jk}]_{n\times n}$，

$$e_{jk} = \partial s_j^0 / \partial P_{k-1} = \partial s_j / \partial P_{k-1}\big|_{s_j = s_j^0} \tag{13}$$

表示第 $j$ 个期望的极点对特征多项式的第 $(k-1)$ 个系数变化的灵敏度。根据文献[8]，

$$e_{jk} = \frac{-(s_j^0)^{k-1}}{\prod\limits_{\substack{l=1 \\ l\neq j}}^{n} (s_j^0 - s_l^0)}. \tag{14}$$

对于 $R_i$ 的这种取法，不难证明

$$J(F) = \sum_{i=1}^{r} \boldsymbol{\varepsilon}_i^T(\alpha_0, F) \cdot \mathrm{Re}\{R_i\} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_i(\alpha_0, F). \tag{15}$$

其中 Re{·} 表示取复矩阵的实部.

根据期望的闭环极点 $s_i^0(i=1,2,\cdots,n)$，可以求出闭环系统的期望特征系数 $P_{n-1}^0$，$P_{n-2}^0,\cdots$，$P_0^0$. 再设

$$|sI-(A(\alpha_0)+B(\alpha_0)F)|=s^n+P_{n-1}(\alpha_0,F)s^{n-1}+\cdots+P_0(\alpha_0,F), \quad (16)$$

则鲁棒极点配置问题转化为下列约束最优化问题:

$$\left.\begin{array}{l}\text{minimize } J(F)\\ F\in R^{m\times n}\\ \text{subject to } P_i(\alpha_0,F)-P_i^0=0(i=0,1,\cdots,n-1).\end{array}\right\} \quad (17)$$

# 四、算　　法

**1. 闭环特征系数灵敏度的计算**

根据求矩阵的特征多项式系数的 Leverrier-Sonrian-Faddeeva-Frame 公式[10],,可以导出计算特征系数灵敏度的递推公式:

记

$$A_c=A(\alpha_0)+B(\alpha_0)F, \quad (18)$$
$$B_n=I,$$

则

$$P_j(\alpha_0,F)=-1/(n-j)\mathrm{tr}(B_{j+1}A_c),\ B_j=B_{j+1}\cdot A_c+P_j(\alpha_0,F)\cdot I,$$

$$\varepsilon_i^j(\alpha_0,F)=-\frac{1}{n-j}\mathrm{tr}\left(\frac{\partial B_{j+1}}{\partial\alpha_i}\cdot A_c+B_{j+1}\cdot\frac{\partial A_c}{\partial\alpha_i}\right),$$

$$\frac{\partial B_j}{\partial\alpha_i}=\frac{\partial B_{j+1}}{\partial\alpha_i}\cdot A_c+B_{j+1}\cdot\frac{\partial A_c}{\partial\alpha_i}+\varepsilon_i^j(\alpha_0,F)\cdot I,$$

$$(j=n-1,n-2,\cdots,0).$$

其中

$$\frac{\partial A_c}{\partial\alpha_i}=\frac{\partial A(\alpha_0)}{\partial\alpha_i}+\frac{\partial B(\alpha_0)}{\partial\alpha_i}\cdot F. \quad (19)$$

**2. 鲁棒极点配置的算法**

(17) 式描述的鲁棒极点配置问题可采用外部罚函数法求解:

1) 初始化. 选初始 $F_0$，初始罚因子 $M_i(1)(i=0,1,\cdots,n-1)$，终止限 $\varepsilon$. 令 $k=1$.

2) 以 $F_{k-1}$ 为初始点,求解无约束极小化问题:

$$\text{minimize}\left\{J(F)+\sum_{i=0}^{n-1}M_i(k)[P_i(\alpha_0,F)-P_i^0]^2\right\}.$$

求得极小点,记为 $F_k$.

3) 若 $\sum_{i=0}^{n-1}M_i(k)[P_i(\alpha_0,F_k)-P_i^0]^2<\varepsilon$，则 $F_k$ 即为所求最优解. 否则,修改罚因子,$k=k+1$，转向 2).

算法中，2) 的实现可采用 DFP 方法．为此需要计算 $\partial J(F)/\partial F_{jl}$ 及 $\partial P_i(\boldsymbol{\alpha}_0, F)/\partial F_{jl}(j=1,2,\cdots,m;\ l=1,2,\cdots,n;\ i=n-1,\ n-2,\cdots,0)$． 根据 (15) 式

$$\frac{\partial J(F)}{\partial F_{jl}}=\sum_{i=1}^{r}2\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_i^T(\boldsymbol{\alpha}_0,F)\cdot\mathrm{Re}\{R_i\}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\varepsilon}_i(\boldsymbol{\alpha}_0,F)}{\partial F_{jl}}. \tag{20}$$

其中

$$\frac{\partial\boldsymbol{\varepsilon}_i(\boldsymbol{\alpha}_0,F)}{\partial F_{jl}}=\left(\frac{\partial\varepsilon_i^0(\boldsymbol{\alpha}_0,F)}{\partial F_{jl}},\ \frac{\partial\varepsilon_i^1(\boldsymbol{\alpha}_0,F)}{\partial F_{jl}},\cdots,\frac{\partial\varepsilon_i^{n-1}(\boldsymbol{\alpha}_0,F)}{\partial F_{jl}}\right)^T. \tag{21}$$

其元素可采用下列递推公式得出：

记

$$D=\frac{\partial^2A_c}{\partial\alpha_i\partial F_{jl}}=\frac{\partial B(\boldsymbol{\alpha}_0)}{\partial\alpha_i}\cdot\frac{\partial F}{\partial F_{jl}}$$

$$=\begin{array}{c}\begin{bmatrix}0\cdots0 & \partial b_{1j}(\boldsymbol{\alpha}_0)/\partial\alpha_i & 0\cdots0\\ 0\cdots0 & \partial b_{2j}(\boldsymbol{\alpha}_0)/\partial\alpha_i & 0\cdots0\\ \vdots\cdots\vdots & \vdots & \vdots\cdots\vdots\\ 0\cdots0 & \partial b_{nj}(\boldsymbol{\alpha}_0)/\partial\alpha_i & 0\cdots0\end{bmatrix}\\ \uparrow\\ \text{第 } l \text{ 列}\end{array}, \tag{22}$$

$$B_n=I,$$

$$G_{n-k}=\frac{\partial^2B_{n-k+1}}{\partial\alpha_i\partial F_{jl}}A_c+\frac{\partial B_{n-k+1}}{\partial\alpha_i}\cdot\frac{\partial A_c}{\partial F_{jl}}+\frac{\partial B_{n-k+1}}{\partial F_{jl}}\cdot\frac{\partial A_c}{\partial\alpha_i}+B_{n-k+1}\cdot D,$$

$$\frac{\partial\varepsilon_i^{n-k}(\boldsymbol{\alpha}_0,F)}{\partial F_{jl}}=-\frac{1}{k}\mathrm{tr}(G_{n-k}),$$

$$\frac{\partial^2B_{n-k}}{\partial\alpha_i\partial F_{jl}}=G_{n-k}+\frac{\partial\varepsilon_i^{n-k}(\boldsymbol{\alpha}_0,F)}{\partial F_{jl}}\cdot I,\ (k=1,2,\cdots,n).$$

不难推出 $\partial P_i(\boldsymbol{\alpha}_0, F)/\partial F_{jl}$ 的递推公式如下：

$$B_n=I,$$

$$P_i(\boldsymbol{\alpha}_0,F)=-\frac{1}{n-i}\mathrm{tr}(B_{i+1}\cdot A_c),\quad B_i=B_{i+1}\cdot A_c+P_i(\boldsymbol{\alpha}_0,F)\cdot I,$$

$$\frac{\partial P_i(\boldsymbol{\alpha}_0,F)}{\partial F_{jl}}=-\frac{1}{n-i}\mathrm{tr}\left(\frac{\partial B_{i+1}}{\partial F_{jl}}\cdot A_c+B_{i+1}\cdot\frac{\partial A_c}{\partial F_{jl}}\right),$$

$$\frac{\partial B_i}{\partial F_{jl}}=\frac{\partial B_{i+1}}{\partial F_{jl}}\cdot A_c+B_{i+1}\cdot\frac{\partial A_c}{\partial F_{jl}}+\frac{\partial P_i(\boldsymbol{\alpha}_0,F)}{\partial F_{jl}}\cdot I,$$

$$(i=n-1,n-2,\cdots,0).$$

## 五、结　论

根据上述算法编制的 CACSD 程序已在 VAX/VMS-780 机上通过，运用该 CACSD 程序进行蒸馏塔控制器[2]和垂直起降飞机控制器[4]的重新设计，其结果1)表明了本文提出

1) 吴嗣亮，鲁棒极点配置问题的研究，东北重型机械学院硕士学位论文 (1989)，72—78.

的设计方法的有效性.

由于目标函数的极小化可采用具有二次收敛性质的最优化方法，本文提出的鲁棒极点配置控制系统的这种设计方法即使对于高阶系统采用满秩状态反馈也可进行有效的设计. 与文献 [2—5] 提出的方法相比，这是该方法的一个显著优点. 该方法可直接推广到输出反馈控制器的设计. 在这种方法中，如何利用选择期望闭环极点的自由度进一步降低极点灵敏度，是有待进一步研究的问题.

## 参 考 文 献


[1] Dorato, P., A Historical Review of Robust Control, *IEEE Control Systems Magazine*, (1987), April, 44—47.

[2] Gourishankar, V., & Ramar, K., Pole Assignmen With Minimum Eigenvalue Sensitivity to Plant Parameter Variations, *Int. J. Control*, **23**(1976), 493—504.

[3] Ramar, K., & Gourishankar, V., Utilization of the Design Freedom of Pole Assignment Feedback Controllers of Unrestricted Rank, *Int. J. Control*, **24**(1976), 423—430.

[4] Gourishankar, V., Zackowski, G. V., Minimum Sensitivity Controllers With Application to VTOL Aircraft, *IEEE Trans. on AES*, **AES—16**(1980), 217—226.

[5] Gomathi, K., Prabhu, S. S., & Pai, M. A., A Suboptimal Controller for Minimum Sensitivity of Closed Loop Eigenvalues to Parameter Variations, *IEEE Trans. on AC*, **AC-25**(1980), 587—588.

[6] Haraldsdottir, A., Kabamba, P. T., Ulsoy, A. G., Sensitivity Reduction by State Derivative Feedback, *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, **110**(1988), 84—93.

[7] Morgan, Jr., B. S., Sensitivity Analysis and Synthesis of Multivariable Systems, *IEEE Trans. on AC*, **AC-11**(1966), 506—512.

[8] Berger, C. S., Robust Controller Design by Minimisation of the variation of the Coefficients of Closed-loop Characteristic Equation, Proc. IEE, Pt. D, 131 (1984), 103—107.

[9] Wilkinson, J. K., 代数特征值问题(中译本)，科学出版社(1987)，66—69.

[10] 凯拉斯，T.，线性系统(中译本)，科学出版社(1985)，451—452.


# A NEW APPROACH TO THE ROBUST POLE ASSIGNMENT FOR MULTIVARIABLE SYSTEMS


Wu Siliang

*(Yanshan University)*


## Abstract


A new concept, characteristic coefficient sensitivity, is introduced. The relationship between it and eigenvalue sensitivity is also given. Based on these, a new method for designing robust pole assignment control systems is established with characteristic coefficient sensitivity as its cost functional. Owing to its advantage of avoiding both the calculation of eigenvalue sensitivity and the assignment of eigenstructure, this procedure is quite simple and can be programmed on a digital computer.



**Key words** ——Multivariable control system; robustness; pole assignment; feedback.