第16卷 第2期
1990年3月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 16, No. 2
Mar., 1990

一种多变量广义最小方差自校正控制器

许 小 平
(西南自动化研究所,四川绵阳)

陈 锦 娣
(北京理工大学自动控制系)

摘　　要

本文对一类多变量系统给出了一种广义最小方差自校正控制器，并讨论了系统加入这种控制器后的闭环特性，将二次型性能指标的加权阵与系统闭环极-零点联系起来，从而就可根据系统的期望闭环极点的位置在线选取加权阵. 仿真结果表明这种控制器性能良好，工作可靠.

关键词——自校正控制,多变量,广义最小方差,极点配置.

广义最小方差 (GMV) 自校正控制 (STC) 和极点配置 (PA) STC 各有长短，如果把二者结合起来，取其优点，无疑会得到一种更为完善的 STC 方法. 文[1]对单变量系统做了一定的工作，本文对多变量系统作进一步的探讨.

符号说明: 下文中对于 z^{-1} 的多项式矩阵均写成下列形式:

$$X(z^{-1}) = X_0 + X_1 z^{-1} + \cdots + X_{n_X} z^{-n_X}.$$

式中 n_X 表示 $X(z^{-1})$ 的阶数; $X_i(i = 0, 1, \cdots, n_X)$ 表示其矩阵系数，并且在不会引起混淆时，将 $X(z^{-1})$ 简记为 X.

一、一种多变量广义最小方差控制

设被控对象由多变量 CARMA 模型描述

$$A(z^{-1})\boldsymbol{y}(k) = z^{-m}B(z^{-1})\boldsymbol{u}(k) + C(z^{-1})\boldsymbol{e}(k) + z^{-m_d}\boldsymbol{d}(k). \tag{1}$$

式中 $\boldsymbol{y}(k)$,$\boldsymbol{u}(k)$ 和 $\boldsymbol{e}(k)$ 分别是 $L\times 1$ 输出向量、控制向量和随机干扰向量，且$\{\boldsymbol{e}(k)\}$是白噪声向量序列，其均值为零，自协方差阵为常阵 $R_e = \mathscr{E}\{\boldsymbol{e}(k)\boldsymbol{e}^T(k)\}$;$\boldsymbol{d}(k)$ 是 $L\times 1$ 确定性干扰向量; m 和 m_d 都是纯延时步数，且 $m_d \geq m$; $A(z^{-1})$,$B(z^{-1})$和 $C(z^{-1})$ 都是 z^{-1} 的 $L\times 1$ 多项式矩阵，B_0非奇异，$C(z^{-1})$ 的零点都在 [Z] 平面单位圆内，$A_0 = I$, $C_0 = I$.

取二次型性能指标

本文于1987年12月21日收到.

$$V=\mathscr{E}\{\|P(z^{-1})\boldsymbol{y}(k+m)-R(z^{-1})\boldsymbol{w}(k)\|^2+\|Q'(z^{-1})[\boldsymbol{u}(k)-\boldsymbol{u}_r(k)]\|^2\}. \tag{2}$$

这里对于列向量 $\boldsymbol{x}$,$\|\boldsymbol{x}\|^2$ 表示 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}$;式中 $\boldsymbol{w}(k)$ 是 $L\times 1$ 参考输入向量;$P(z^{-1}),R(z^{-1})$, $Q'(z^{-1})$ 是多项式加权矩阵; $L\times 1$ 向量 $\boldsymbol{u}_r(k)$ 是为消除稳态跟踪误差而引入的，它满足等式

$$A(z^{-1})\boldsymbol{w}(k)=B(z^{-1})\boldsymbol{u}_r(k)+\boldsymbol{d}(k-m_d+m). \tag{3}$$

定义 $\boldsymbol{y}_P(k)\triangleq P(z^{-1})\boldsymbol{y}(k)$，并考虑到式(1)得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}_P(k+m)=P(z^{-1})\boldsymbol{y}(k+m)&=PA^{-1}B\boldsymbol{u}(k)+PA^{-1}C\boldsymbol{e}(k+m)\\&+PA^{-1}\boldsymbol{d}(k-m_d+m).\end{aligned} \tag{4}$$

引入恒等式

$$PA^{-1}C=P\bar{C}\bar{A}^{-1}=F+z^{-m}G\bar{A}^{-1} \text{ 或 } P\bar{C}=F\bar{A}+z^{-m}G. \tag{5}$$

式中 $\bar{C}\bar{A}^{-1}$ 是 $A^{-1}C$ 的右既约矩阵分式，即 $A^{-1}C=\bar{C}\bar{A}^{-1}$. 这里 $\bar{A}$ 与 $\bar{C}$ 右互质，若 $\bar{A}_0=A_0=I$，则 $\{\bar{A},\bar{C}\}$ 是唯一确定的; F 和 G 是多项式矩阵，$n_F=m-1$，$n_G\leqslant \mathrm{Max}\{n_{\bar{A}}-1,n_P+n_{\bar{C}}-m\}$.

将式(5)代入式(4)并利用(1)式,整理后得

$$\boldsymbol{y}_P(k+m)=\boldsymbol{y}_P(k+m|k)+\boldsymbol{\varepsilon}(k+m). \tag{6}$$

这里

$$\boldsymbol{y}_P(k+m|k)=FC^{-1}B\boldsymbol{u}(k)+G\bar{C}^{-1}\boldsymbol{y}(k)+FC^{-1}\boldsymbol{d}(k-m_d+m). \tag{7}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(k+m)=F\boldsymbol{e}(k+m).$$

将式(6)代入(2)式有 $V=\bar{V}+\mathscr{E}\{\|\boldsymbol{\varepsilon}(k+m)\|^2\}$,其中

$$\bar{V}=\|\boldsymbol{y}_P(k+m|k)-R\boldsymbol{w}(k)\|^2+\|Q'[\boldsymbol{u}(k)-\boldsymbol{u}_r(k)]\|^2.$$

V 为极小的必要条件是

$$\partial V/\partial \boldsymbol{u}(k)=\partial\bar{V}/\partial\boldsymbol{u}(k)=0.$$

由此可导出

$$\boldsymbol{y}_P(k+m|k)-R(z^{-1})\boldsymbol{w}(k)+Q(z^{-1})[\boldsymbol{u}(k)-\boldsymbol{u}_r(k)]=0. \tag{8}$$

式中 $Q(z^{-1})\triangleq(P_0B_0)^{-T}(Q_0')^TQ'(z^{-1})$,$P_0$, B_0,Q_0' 分别是 $P(z^{-1})$,$B(z^{-1})$,$Q'(z^{-1})$ 的首次项. 而 $\partial^2\bar{V}/\partial\boldsymbol{u}(k)\partial\boldsymbol{u}^T(k)=2[(P_0B_0)^T(P_0B_0)+(Q_0')^TQ_0']$,所以 $\partial^2V/\partial\boldsymbol{u}(k)\partial\boldsymbol{u}^T(k)$ 是正定的,故方程(8)也是使性能指标 V 达到极小的充分条件.

考虑到式(7),最优控制方程(8)可改写为

$$\begin{aligned}&FC^{-1}B\boldsymbol{u}(k)+G\bar{C}^{-1}\boldsymbol{y}(k)+FC^{-1}\boldsymbol{d}(k-m_d+m)-R\boldsymbol{w}(k)+Q[\boldsymbol{u}(k)\\&-\boldsymbol{u}_r(k)]=0.\end{aligned} \tag{9}$$

从上面的推导过程和最后的结果可见,本文的方法比文[2]的方法要简单得多，也更直观明了. 且根据方程(9)还可导出显式自校正控制算法.

对于“跟踪问题”（$R(z^{-1})=P(z^{-1})$）和“简化模型”（$A(z^{-1})$ 和 $C(z^{-1})$ 都是对角形阵)这两种特殊情况,方程(9)可大为简化. 限于篇幅,有关结果从略.

注意,在上述有关等式中根据式(3)求解 $\boldsymbol{u}_r(k)$ 时,若 $B(z^{-1})$ 不稳定,式(3)由下式近似代替

$$\boldsymbol{u}_r(k)=B^{-1}(l)[A(z^{-1})\boldsymbol{w}(k)-\boldsymbol{d}(k-m_d+m)]. \tag{10}$$

式中 $B(l)$ 是 $B(z^{-1})$ 的系数之代数和.

二、闭环特性及加权阵的选取

1. 闭环输入-输出方程

将最优控制律(9)式应用到式(1)描述的系统,并考虑到式(5),整理后得

$$(P+QB^{-1}A)\boldsymbol{y}(k)=z^{-m}(R+QB^{-1}A)\boldsymbol{w}(k)+(F+QB^{-1}C)\boldsymbol{e}(k). \qquad (11)$$

若选取加权阵 $Q(z^{-1})$ 满足 $QB^{-1}=B^{-1}Q$ 即

$$BQ=QB, \qquad (12)$$

代入式(11)得闭环系统的输入-输出方程

$$\boldsymbol{y}(k)=(BP+QA)^{-1}(BR+QA)\boldsymbol{w}(k-m)+(BP+QA)^{-1}(BF+QC)\boldsymbol{e}(k). \quad (13)$$

对于跟踪问题 $(R(z^{-1})=P(z^{-1}))$,则有

$$\boldsymbol{y}(k)=\boldsymbol{w}(k-m)+(BP+QA)^{-1}(BF+QC)\boldsymbol{e}(k). \qquad (14)$$

由此可见,随机干扰 $\boldsymbol{e}(k)$ 与输出 $\boldsymbol{y}(k)$ 之间的传递函数矩阵的极-零点位置与 $P(z^{-1})$ 和 $Q(z^{-1})$ 的选取有关. 因而, GMV 控制也可看作是一种极-零点配置方法,除 $C(z^{-1})$ 的零点为 $\boldsymbol{e}(k)$ 与 $\boldsymbol{y}(k)$ 之间的输入解耦零点,即不可控模式外,其它极-零点的位置可通过 $P(z^{-1})$ 和 $Q(z^{-1})$ 的选取而适当配置. 反之,如果加权阵 $P(z^{-1})$ 和 $Q(z^{-1})$ 选得不合适,可能使整个闭环系统不稳定,系统不能正常工作. 同时,这种控制方法能够有效地抑制确定性干扰 $\boldsymbol{d}(k)$ 的影响. 对于跟踪问题,理论上保证了闭环系统能无偏地跟踪参考输入信号. 而文[2]的 GMV 控制方法理论上得不到这样的结果.

2. 加权阵的选取

若将系统的闭环特征多项式矩阵记为 $T(z^{-1})$,根据(13)式有

$$B(z^{-1})P(z^{-1})+Q(z^{-1})A(z^{-1})=T(z^{-1}). \qquad (15)$$

加权阵的选取一种方法是试选 $P(z^{-1})$ 和 $Q(z^{-1})$, 检验 $T(z^{-1})$ 的零点是否在[Z]平面中的一定范围内,直到满意为止. 第二种方法是给定 $T(z^{-1})$ (如可设 $T(z^{-1})$ 为单位阵),然后,从式(15)解出加权阵 $P(z^{-1})$ 和 $Q(z^{-1})$. 这种根据闭环极点的位置选取二次型性能指标中加权阵的方法,不仅可以兼顾二者的优点,而且其计算量与文[3]的极点配置方法相比也较小,特别对于大延时系统,计算量减少更为明显. 尽管如此,除一些特殊情况(如式(1)中 $A(z^{-1})$ 是对角形, $B(z^{-1})$ 是三角形)外,在约束条件(12)的限制下求解多项式矩阵方程(15)在实际中比较困难,这时可采用第一种方法.

三、自校正控制算法及仿真结果

根据前面的分析可知,对于模型(1)式中 $A(z^{-1})$, $B(z^{-1})$ 和 $C(z^{-1})$ 是任意形式的一般情况,在线求解 STC 律的计算量较大,工程上不适用. 若采用多变量系统辨识通常的方法(见文[4])将 $A(z^{-1})$ 和 $C(z^{-1})$ 拟合成对角形,则可大为减少计算量. 下面给出 STC 算法的步骤:

① 给出模型(1)式的结构参数,即模型的阶 $\{n_A,n_B,n_C\}$ 和纯延时步数 $\{m,m_d\}$,给出参考输入信号 $\boldsymbol{w}(k)$,设置闭环特征多项式矩阵 $T(z^{-1})$; ② 估计模型(1)式中的未知

参数；③求解加权阵 $P(z^{-1})$ 和 $Q(z^{-1})$；④ 根据式(3)或式(10)解出 $\boldsymbol{u}_r(k)$；⑤ 计算控制量 $\boldsymbol{u}(k)$；⑥ 转到步骤②.

对于本文提出的 GMV-STC 方法，我们进行了大量的数字仿真和混合仿真，仿真结果表明本方法是可行的．限于篇幅，这里仅给出一混合仿真结果.

我们将混合仿真模型的传递函数矩阵设置为

$$G(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{(T_1s+1)(T_2s+1)}e^{-\tau_1 s} & 0\\ \dfrac{1}{(T_1s+1)(T_4s+1)}e^{-\tau_2 s} & \dfrac{1}{(T_3s+1)(T_4s+1)}e^{-\tau_2 s}\end{bmatrix}.$$

其中 $T_1=2.75$ (秒)，$T_2=1.05$(秒)，$\tau_1=4$(秒)，$T_3=2.75$ (秒)，$T_4=1.28$ (秒)，$\tau_1=4$ (秒).

根据文[5]的采样周期选取原则和实际试验，选定采样周期为 3 秒．参考输入信号设定为常向量 $\boldsymbol{w}(k)=[3\ \ 3]^T$ 时，进行了连续 10,000 步(8 小时)混合仿真，控制器性能稳定可靠．此外，还将参考输入信号设定为方波和正弦波，仿真时在对象中人为加入了较大的随机干扰信号，对于各种情况系统终始能无偏地跟踪参考输入信号．限于篇幅，仿真曲线从略.

参　考　文　献

[1] Allidina, A. Y. and Hughes, F. M., Generalized Self-Tuning Controller with Pole Assignment. IEE Proc., **127**(1980), 13—18.

[2] Koivo, H. N., A Multivariable Self-Tuning Controller, *Automatica*, **16**(1980), 351—366.

[3] 李清泉，组合自校正控制器，自动化学报，第 12 卷，第 2 期，1986.

[4] 舒迪前，刘立，实现多变量自校正调节的一种方法，北京钢铁学院学报，第 4 期，1982.

[5] Wittenmark, B.and Astrom, K. J., Practical Issues in the Implementation of Self-Tuning Control, *Automatica*, **20**(1984), 533—545.

A MULTIVARIABLE GENERALIZED MINIMUM VARIANCE SELF-TUNING CONTROLLER

Xu Xiaoping

(*Southwest Institute of Automation Research*)

Chen Jindi

(*Beijing Science and Technology University*)

Abstract

This paper presents a generalized minimum variance self-tuning controller for a class of multivariable systems. The closed-loop properties are discussed. The weighting matrices of a quadratic performance index are related to the closed-loop pole-zeroes so that the weighting matrices can be selected on-line according to the locations of the desired closed-loop poles. Simulation results illustrate the good performace and reliability of the controller.

Key words——self-tuning control; multivariable; generalized minimum variance; pole assignment.