

具有非有理谱平稳随机过程仿真的谱方法

赵希人 刘胜

(哈尔滨船舶工程学院)

摘 要

本文依据平稳随机过程谱分解理论,推导出具有非有理谱平稳随机过程的仿真过程的数学模型,并给出仿真误差公式,最后介绍它在海浪模拟中的应用。

关键词——谱分解,随机过程,仿真。

一、引 言

在随机控制研究中,随机过程的仿真是十分必要的。对于具有有理谱平稳随机过程的仿真,利用成形滤波器的方法很容易解决。然而对于具有非有理谱平稳随机过程的仿真,就并非容易, Mikio, Hino 曾提出利用有理谱来逼近非有理谱的方法^[1],并把这种方法用于海浪随机过程的仿真,其结果是至少需要 20 阶的成形滤波器才能近似实现,这对于工程应用来说是比较繁的。本文从谱分解的观点讨论了具有非有理谱平稳随机过程的仿真问题。

二、推导仿真过程模型的理论依据

引理 1^[1]. 设 $X(t)$ 为实值随机过程,且

$$X(t) = \xi(t) \cos \omega_0 t + \eta(t) \sin \omega_0 t. \quad (1)$$

则 $X(t)$ 为平稳随机过程的充要条件是 $\xi(t)$ 与 $\eta(t)$ 均为平稳随机过程,且

$$E\xi(t) = E\eta(t) = 0,$$

$$B_\xi(\tau) = B_\eta(\tau), \quad B_{\xi\eta}(\tau) = -B_{\eta\xi}(\tau)$$

此时 $X(t)$ 的自相关函数 $B_x(\tau)$ 为

$$B_x(\tau) = B_\xi(\tau) \cos \omega_0 \tau + B_{\eta\xi}(\tau) \sin \omega_0 \tau. \quad (2)$$

引理 2. 设 $X(t)$ 为实值平稳随机过程, $S_x(\omega)$ 为其功率谱密度函数并假定存在,则 $X(t)$ 可表为

$$X(t) = \sum_{i=1}^{\infty} Y_i(t)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i(t) \cos \hat{\omega}_i t + \eta_i(t) \sin \hat{\omega}_i t. \quad (3)$$

其中 $Y_i(t), i = 1, 2, \dots$, 均为平稳随机过程且彼此互不相关, 自相关函数为:

$$B_{Y_i}(\tau) = B_{\xi_i}(\tau) \cos \hat{\omega}_i \tau + B_{\eta_i \xi_i}(\tau) \sin \hat{\omega}_i \tau, \quad i = 1, 2, \dots. \quad (4)$$

而 $\xi_i(t)$ 与 $\eta_i(t), i = 1, 2, \dots$, 均为平稳随机过程, 且

$$B_{\xi_i}(\tau) = B_{\eta_i}(\tau) = 2 \int_{\omega_i}^{\omega_{i+1}} S_X(\omega) \cos(\omega - \hat{\omega}_i) \tau d\omega. \quad (5)$$

$$B_{\eta_i \xi_i}(\tau) = -2 \int_{\omega_i}^{\omega_{i+1}} S_X(\omega) \sin(\omega - \hat{\omega}_i) \tau d\omega, \quad i = 1, 2, \dots. \quad (6)$$

$$\hat{\omega}_i = \frac{1}{2} (\omega_{i+1} + \omega_i), \quad i = 1, 2, \dots, \quad \omega_1 \triangleq 0$$

证. 考察 $X(t)$ 通过一系列彼此衔接但不重迭的理想带通滤波器

$$G_i(j\omega), \quad i = 1, 2, \dots,$$

$$G_i(j\omega) = \begin{cases} 1, & \omega_i \leq |\omega| < \omega_{i+1} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

的情况. 由谱分解定理^[3]可推出其输出 $Y_i(t)$ 为

$$\begin{aligned} Y_i(t) &= \int_{\omega_i}^{\omega_{i+1}} 2 \operatorname{Re} d\zeta(j\omega) \cos \omega t + 2 \operatorname{Im} d\zeta(j\omega) \sin \omega t \\ &\triangleq \xi_i(t) \cos \hat{\omega}_i t + \eta_i(t) \sin \hat{\omega}_i t, \quad i = 1, 2, \dots. \end{aligned} \quad (7)$$

其中 $\hat{\omega}_i = \frac{1}{2} (\omega_{i+1} + \omega_i), i = 1, 2, \dots$

$$\xi_i(t) = 2 \int_{\omega_i}^{\omega_{i+1}} \operatorname{Re} d\zeta(j\omega) \cos(\omega - \hat{\omega}_i) t + \operatorname{Im} d\zeta(j\omega) \sin(\omega - \hat{\omega}_i) t. \quad (8)$$

$$\eta_i(t) = 2 \int_{\omega_i}^{\omega_{i+1}} -\operatorname{Re} d\zeta(j\omega) \sin(\omega - \hat{\omega}_i) t + \operatorname{Im} d\zeta(j\omega) \cos(\omega - \hat{\omega}_i) t. \quad (9)$$

而且有

$$E\{d\zeta(j\omega)\} = E\{\operatorname{Re} d\zeta(j\omega)\} + jE\{\operatorname{Im} d\zeta(j\omega)\} = 0. \quad (10)$$

$$E \operatorname{Re} d\zeta(j\omega) \operatorname{Re} d\zeta(j\lambda) = E \operatorname{Im} d\zeta(j\omega) \operatorname{Im} d\zeta(j\lambda) = \frac{1}{2} S_X(\omega) d\omega \delta(\lambda - \omega)$$

$$E \operatorname{Re} d\zeta(j\omega) \operatorname{Im} d\zeta(j\lambda) = E \operatorname{Re} d\zeta(j\lambda) \operatorname{Im} d\zeta(j\omega) = 0. \quad (11)$$

于是经计算可推出(5)式, (6)式且有 $E\xi_i(t) = E\eta_i(t) = 0$, 这说明

$$\xi_i(t), \eta_i(t), \quad i = 1, 2, \dots,$$

均为平稳随机过程. 进一步计算还有

$$B_{\eta_i \xi_i}(\tau) = -B_{\xi_i \eta_i}(\tau), \quad i = 1, 2, \dots. \quad (12)$$

由引理 1 并考虑以上结果可知 $Y_i(t), i = 1, 2, \dots$ 为平稳过程且(4)式成立. 又因该列理想带通滤波器互相衔接但不重迭, 故 $X(t)$ 必为(3)式所示.

三、仿真过程数学模型的导出

在工程应用中, 经常采用单侧谱 $F_x(\omega)$,

$$F_x(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega < 0 \\ 2S_x(\omega), & \omega \geq 0. \end{cases}$$

于是有如下定理:

定理 1. 设 $X(t)$ 为实平稳过程, $F_x(\omega)$ 为其功率谱密度函数, 则仿真过程 $\hat{X}(t)$ 可取为

$$\hat{X}(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \cos \hat{\omega}_i t + \eta_i \sin \hat{\omega}_i t. \quad (13)$$

其中 $\{\xi_i, \eta_i, i = 1, 2, \dots\}$ 为零均值互不相关随机变量序列且有

$$\begin{aligned} E\xi_i \eta_j &= 0, \quad i, j = 1, 2, \dots \\ E\{\xi_i^2\} &= E\{\eta_i^2\} = \int_{\omega_i}^{\omega_{i+1}} F_x(\omega) d\omega. \end{aligned} \quad (14)$$

并规定 $\omega_1 \triangleq 0$, $\hat{\omega}_i = (\omega_{i+1} + \omega_i)/2$, 对于仿真过程误差 $e(t) \triangleq X(t) - \hat{X}(t)$, 有

$$Ee(t) = 0$$

且

$$Ee^2(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\omega_i}^{\omega_{i+1}} 2F_x(\omega) [1 - \cos(\omega - \hat{\omega}_i)t] d\omega. \quad (15)$$

证. 由引理 2, 取 $\xi_i = \xi_i(0)$, $\eta_i = \eta_i(0)$, 于是 (14) 式显然成立. 再由 (3) 式及 (13) 式将 $Ee^2(t)$ 展开, 进一步利用 (5)、(6) 式可推出 (15) 式.

在工程应用中, 经常遇到平稳正态过程的仿真问题^[4], 在这种情况下有如下定理.

定理 2. 设 $X(t)$ 为实平稳正态过程, $F_x(\omega)$ 为其功率谱密度函数, 则仿真过程 $\hat{X}(t)$ 可取为

$$\hat{X}(t) = \sum_{i=1}^{\infty} X_i \cos(\hat{\omega}_i t - \varepsilon_i). \quad (16)$$

其中 $X_i, i = 1, 2, \dots$, 为瑞利分布随机变量, 且

$$EX_i^2 = 2 \int_{\omega_i}^{\omega_{i+1}} F_x(\omega) d\omega. \quad (17)$$

而 $\varepsilon_i, i = 1, 2, \dots$ 为 $[-\pi, \pi]$ 上均匀分布的随机变量且于 $X_i, i = 1, 2, \dots$ 相互独立, 对于仿真过程误差 $e(t)$, 仍有 (15) 式及 $Ee(t) = 0$.

证. 由 (13) 式并令 $X_i = \sqrt{\xi_i^2 + \eta_i^2}$, $\varepsilon_i = \text{tg}^{-1} \frac{\eta_i}{\xi_i}$, $i = 1, 2, \dots$, 则由概率论可推得上述结论.

以上两个仿真过程模型均包含两个随机变量. 现在我们提出一个较简单的仿真模型, 由 (17) 式将 $\sqrt{EX_i^2}$ 代替 (16) 式中的 X_i , 于是可得

$$\hat{X}(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{2} \sqrt{\int_{\omega_i}^{\omega_{i+1}} F_x(\omega) d\omega} \cos(\hat{\omega}_i t - \varepsilon_i). \quad (18)$$

ε_i 在 $[-\pi, \pi]$ 上均匀分布. 不难看出, 模型 (18) 是一个窄频带能量等效仿真模型, 这在工程应用中是十分方便的仿真模型.

四、应 用

我们利用仿真模型(18)式来模拟五级海况下的海浪随机过程并进行检验,由PM谱可知

$$F_x(\omega) = \frac{A}{\omega^5} e^{-\frac{B}{\omega^4}} (\text{呎}^2 \cdot \text{秒}) \quad (19)$$

其中 $A = 8.1 \times 10^{-3} \times g^2$, $B = 3.2 \times 10^{-2}(g/H_s)^2$, $g = 9.8 \times 3.28$ (呎/秒²) 五级海况下取有义波高 $H_s = 12$ 呎,若取 M 个(本文取 $M = 50$)等能量子波进行迭加,利用(19)式可得

$$\int_{\omega_i}^{\omega_{i+1}} F_x(\omega) d\omega = \frac{A}{4B(M+1)}, \omega_i = [B/lu((M+1)/(i-1))]^{1/4}, i = 2, 3, \dots, M+1.$$

为了检验海浪仿真过程 $\hat{X}(t)$ 与真实海浪过程 $X(t)$ 有多大畸变,我们进行了均值检验,方差检验和功率谱检验并有如下结果:

$$EX(t) = 0, \sigma_X^2 = 9.11.$$

$$E\hat{X}(t) = 0.002, \sigma_{\hat{X}}^2 = 8.93.$$

本文对 $\hat{X}(t)$ 计算周期图并经适当平滑可求出功率谱 $F_{\hat{X}}(\omega)$, 将其结果表示在图1中,其中实线是PM谱 $F_X(\omega)$, 圆点代表仿真过程 $\hat{X}(t)$ 的谱 $F_{\hat{X}}(\omega)$. 由图可以看出,仿真过程功率谱 $F_{\hat{X}}(\omega)$ 比较接近PM谱 $F_X(\omega)$. 图2表示了 $\hat{X}(t)$ 的一个样本过程.

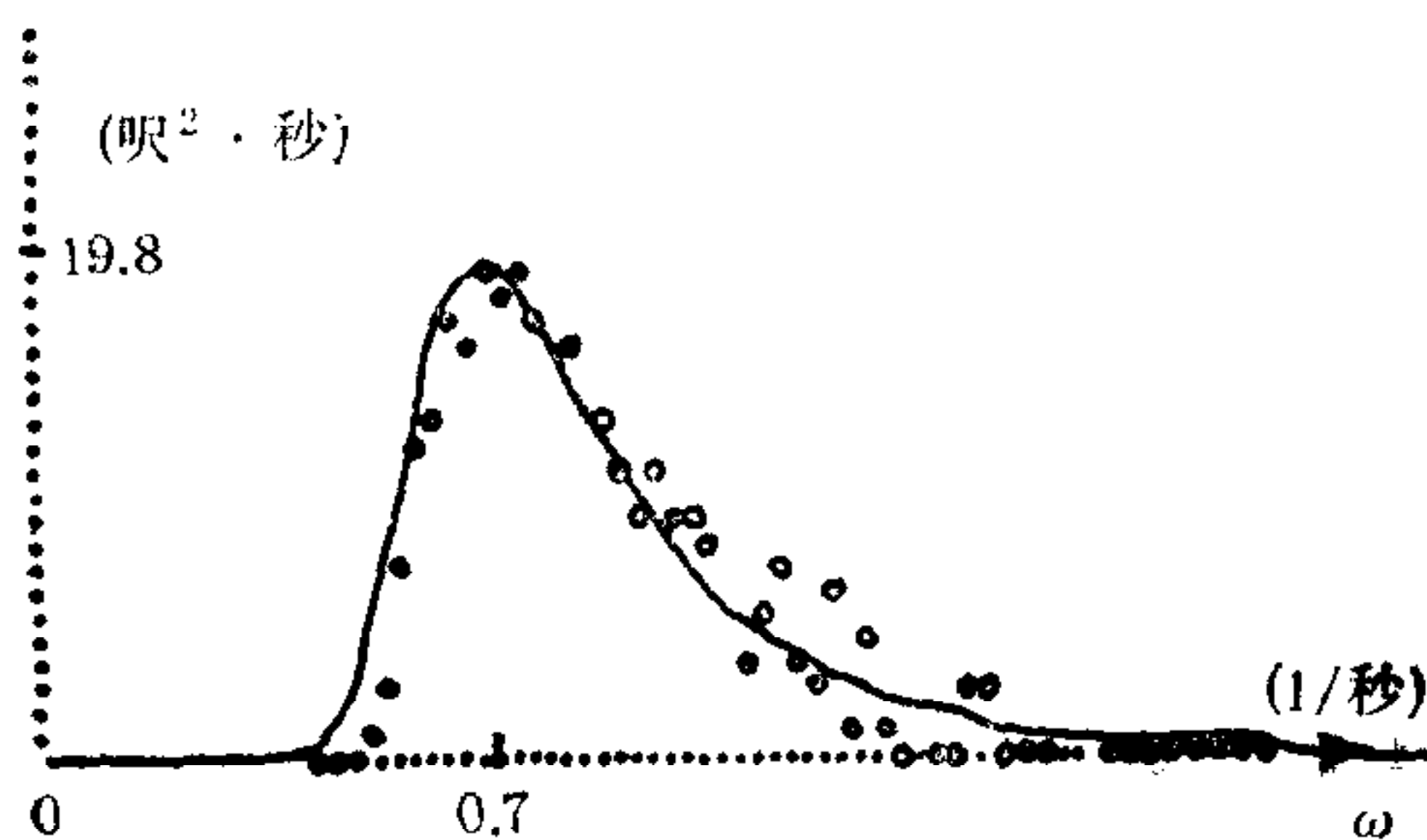


图1 五级海况下的PM谱与 $\hat{X}(t)$ 的谱 $F_{\hat{X}}(\omega)$

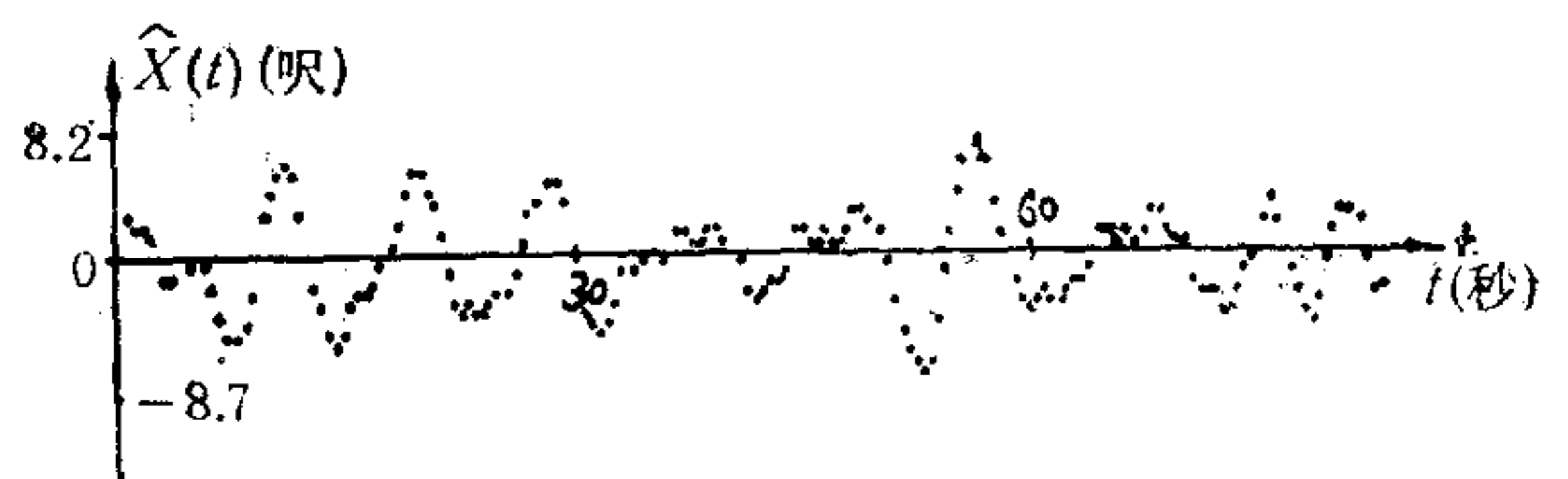


图2 五级海况下的 $\hat{X}(t)$ 的一个样本函数

应当指出,文中提出的仿真过程模型(13)式,(16)式及(18)式,对于具有有理谱平稳过程的仿真仍然适用.

参 考 文 献

- [1] Papoulis, A. Probability, Random Variables and Stochastic Processes, McGraw-Hill, 1965, chapter 10.
- [2] AD745755, Tec. Rep, No. 113, 1972.
- [3] 复旦大学编,《概率论》,第三册,人民教育出版社,(1981),187—206.
- [4] 文圣常、余宙文编著,海浪理论与计算原理. 科学出版社,(1984),45—60.

THE SPECTRUM METHOD FOR THE SIMULATION OF STATIONARY STOCHASTIC PROCESS WITH NON-RATIONAL ENERGY SPECTRUM

ZHAO XIREN LIU SHENG

(Harbin Shipbuilding Engineering Institute)

ABSTRACT

According to the theory of stationary stochastic process spectrum resolution, the mathematical model of the simulation process of the stationary stochastic process with non-rational energy spectrum is presented in this paper. And the formula of simulation error is also given. Finally, its application to the simulation of ocean wave is introduced.

Key words — Spectral decomposition; stochastic process; simulation.