

# 关联系统的分散自适应控制

游大海

(华中理工大学)

## 摘要

本文研究了一类大系统的分散自适应控制, 导出了一组鲁棒性较强的自适应控制律. 当各子系统间存在参数未知的非线性的任意关联和有界外扰时, 若系统相关阶次小于或等于 2, 那么状态和参数误差以指数收敛到某有界余集. 在外扰为常数时, 输出能实现完全跟踪.

**关键词**——分散自适应控制, 关联系统, 鲁棒性.

## 一、问题的陈述<sup>[1, 2]</sup>

考虑如下由  $N$  个子系统构成的关联系统:

$$\dot{\mathbf{x}}_i = A_i \mathbf{x}_i + B_i u_i + D_i + \sum_{j=1}^N f_{ij}(t, \mathbf{x}_j), \quad (1)$$

$$y_i = h_i^T \mathbf{x}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (2)$$

其中  $\mathbf{x}_i \in R^{n_i}$  为第  $i$  个子系统的状态,  $u_i \in R^1$  为控制变量,  $y_i \in R^1$  为输出;  $D_i \in R^{n_i}$  为有界外扰,  $f_{ij}(t, \mathbf{x}_j) \in R^{n_i}$  为包括第  $i$  个子系统在内的非线性关联,  $A_i, B_i, h_i$  为参数未知的常数矩阵. 还假定:

$$\|f_{ij}(t, \mathbf{x}_j)\| \leq a_{ij} \|\mathbf{x}_j\|, \quad (3)$$

其中  $a_{ij}$  为正的未知常数. 将(1)、(2)式改写为

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} + D + F(t, \mathbf{x}), \quad (4)$$

$$\mathbf{y} = C\mathbf{x}. \quad (5)$$

这里  $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1^T, \dots, \mathbf{x}_N^T]^T$  为组合状态向量,  $\mathbf{y} = [y_1, \dots, y_N]^T$  为组合输出向量,  $\mathbf{u} = [u_1, \dots, u_N]^T$  为组合控制向量,  $D = [D_1^T, \dots, D_N^T]^T$  为组合扰动向量,  $F(t, \mathbf{x})$  为系统的非线性关联.  $A = \text{diag}(A_i)$ ,  $B = \text{diag}(B_i)$ ,  $C = \text{diag}(h_i^T)$ .

设参考模型为

$$\dot{\mathbf{x}}_{mi} = A_{mi} \mathbf{x}_{mi} + b_{mi} r_i, \quad (6)$$

$$y_{mi} = C_{mi}^T \mathbf{x}_{mi}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (7)$$

这里  $\mathbf{x}_{mi} \in R^{n_i}$ ,  $r_i$  为一致有界参考输入信号. 当  $D = 0$ ,  $F(t, \mathbf{x}) = 0$  时, 问题的解可直接引用文[3, 4]的结果. 然而当关联存在时会遇到如下的困难:

1) 由于  $F(t, \mathbf{x})$  的存在使系统成为一非线性系统, 目前尚未针对这种情况设计出

自适应控制算法；

2) 即使关联是线性的,由于目前大多数自适应控制方案鲁棒性较差(如当有界扰动、建模误差存在时),它们也不能直接用于此种情况。由关联引起的不稳定现象可见文献[2]。

## 二、 $n^* \leq 2$ 时的分散自适应控制

考虑(1)、(2)式所描述的系统的分散自适应控制。假定局部参考模型的传递函数

$$W_{mi}(s) = C_{mi}^T (sI - A_{mi})^{-1} b_{mi} = k_{mi} \frac{Z_{mi}(s)}{R_{mi}(s)} \quad (8)$$

为严正实 (SPR)。这里  $Z_{mi}, R_{mi}$  是首一 Hurwitz  $n_i - 1$  与  $n_i$  阶的多项式。又设第  $i$  个解耦子系统的传递函数为

$$W_i(s) = h_i^T (sI - A_i)^{-1} B_i = k_i \frac{N_i(s)}{D_i(s)} \quad (9)$$

$N_i$  与  $D_i$  分别为首一 Hurwitz  $n_i - 1$  与首一  $n_i$  阶多项式,  $N_i$  和  $D_i$  的系数及  $k_i$  未知,但设  $k_i$  符号为正。

在文[3]的结构基础上引入

$$\dot{\xi}_i = \mathcal{C} \xi_i + \mathcal{B}_i e_{ii} \quad (10)$$

作为消差及镇定环。系统结构如图 1 所示。

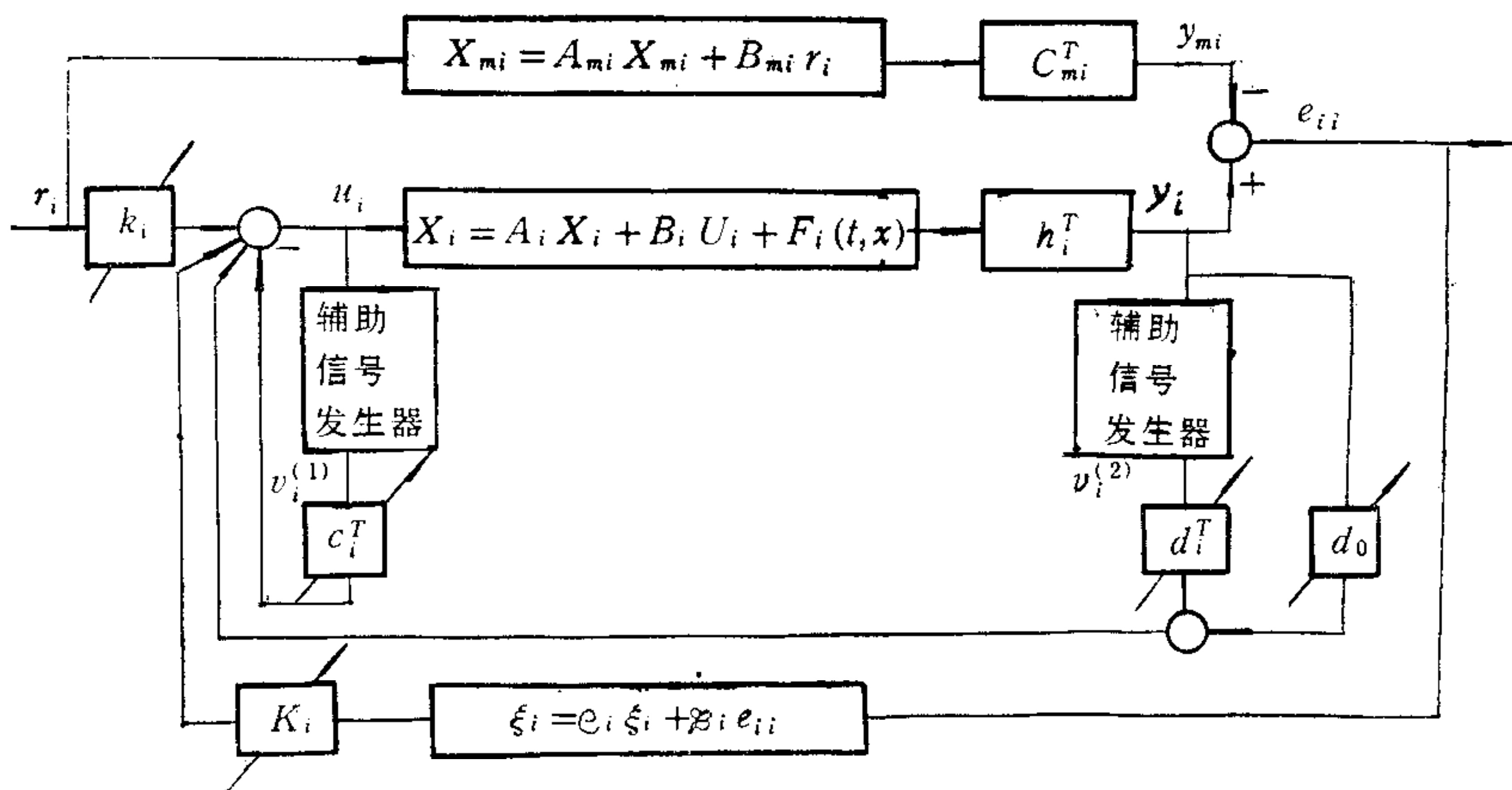


图 1 第  $i$  个子系统结构(比例 2:1)

第  $i$  个子系统的控制器结构为<sup>[3]</sup>

$$\dot{v}_i^{(1)} = \Lambda_i v_i^{(1)} + g_i u_i, \quad \omega_i^{(1)} = c_i^T v_i^{(1)}; \quad (11)$$

$$\dot{v}_i^{(2)} = \Lambda_i v_i^{(2)} + g_i y_i, \quad \omega_i^{(2)} = d_{0i} y_i + d_i^T v_i^{(2)}. \quad (12)$$

令  $x^i = [x_i^T, v_i^{(1)T}, v_i^{(2)T}, \xi_i^T]^T$ , 则由(1)、(10)、(11)、(12)式及图 1 有

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_i \\ \dot{v}_i^{(1)} \\ \dot{v}_i^{(2)} \\ \dot{\xi}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_i & 0 & 0 \\ g_i h_i^T & 0 & \Lambda_i & 0 \\ \mathcal{B}_i h_i^T & 0 & 0 & \mathcal{C}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_i \\ v_i^{(1)} \\ v_i^{(2)} \\ \xi_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_i \\ g_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_i + \begin{bmatrix} D_i + F_{ij} \\ 0 \\ 0 \\ -\mathcal{B}_i y_{mi} \end{bmatrix}, \quad (13)$$

$$u_i = k_i r_i + c_i^T v_i^{(1)} + d_{0i} y_i + d_i^T v_i^{(2)} + K_i \xi_i = \theta_i^T \omega^i. \quad (14)$$

这里  $\theta_i^T = (k_i, c_i^T, d_{0i}, d_i^T, K_i)$ ,  $\omega^{iT} = (r_i, v_i^{(1)}, y_i, v_i^{(2)}, \xi_i)$ . 令  $\theta_i(t) = \theta_i^* + \phi_i(t)$ ,  $\phi_i(t)$  为失配部分, 则(14)式可写为

$$u_i = \theta_i^* \omega^i + \phi_i^T \omega^i. \quad (15)$$

将(15)式代入(13)式则有:

$$\dot{\mathbf{x}}^i = A_c^i \mathbf{x}^i + b_{ci} [k_i^* r_i + \phi_i^T \omega^i] + E_i, \quad (16)$$

其中,

$$A_c^i = \begin{bmatrix} A_i + B_i d_{0i}^* h_i^T & B_i c_i^{*T} & B_i d_i^{*T} & B_i K_i^* \\ g_i d_{0i}^* h_i^T & \Lambda_i + g_i c_i^{*T} & g_i d_i^{*T} & g_i K_i^* \\ g_i h_i^T & 0 & \Lambda_i & 0 \\ \mathcal{B}_i h_i^T & 0 & 0 & \mathcal{C}_i \end{bmatrix}, \quad E_i = \begin{bmatrix} D_i + F_{ij} \\ 0 \\ 0 \\ -\mathcal{B}_i y_{mi} \end{bmatrix}, \quad (17)$$

$$b_{ci}^T = [B_i^T \quad g_i^T \quad 0 \quad 0]. \quad (18)$$

若参考模型取为

$$\dot{\mathbf{x}}_m^i = A_c^i \mathbf{x}_m^i + b_{ci} k_i^* r_i, \quad (19)$$

$$y_{mi} = h_i^T \mathbf{x}_m^i. \quad (20)$$

令

$$e_i = \mathbf{x}^i - \mathbf{x}_m^i, \quad (21)$$

则由(2)、(16)、(19)、(20)式有

$$\dot{e}_i = A_c^i e_i + b_{ci} \phi_i^T \omega^i + E_i, \quad (22)$$

$$e_{ii} = y_i - y_{mi} = h_{ci}^T e_i. \quad (23)$$

这里  $h_{ci}^T = [h_i^T \quad 0 \quad 0 \quad 0]$ . 将  $E_i$  改写为

$$E_i = \begin{bmatrix} D_i \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum_j F_{ij} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\mathcal{B}_i y_{mi} \end{bmatrix} = D_{ci} + F_{ci} + G_i, \quad (24)$$

则

$$\dot{e}_i = A_c^i e_i + b_{ci} \phi_i^T \omega^i + D_{ci} + F_{ci} + G_i. \quad (25)$$

由于(19)、(20)式的传递函数为 SPR, 故有

$$A_c^{iT} P_{ci} + P_{ci} A_c^i = -q_i q_i^T - \varepsilon_i L_i, \quad (26)$$

$$P_{ci} b_{ci} = h_{ci}. \quad (27)$$

这里  $L_i = L_i^T > 0$ ,  $\varepsilon_i > 0$ ,  $q_i$  为向量.

若第  $i$  个子系统的参数向量  $\theta_i(t)$  的自适应律为

$$\dot{\theta}_i = -\sigma_i \Gamma_i \theta_i - \Gamma_i e_{ii} \omega^i, \quad \sigma_i = \begin{cases} \sigma_{0i}, & \text{当 } \|\theta_i\| > \theta_{0i}, \\ 0, & \text{当 } \|\theta_i\| \leq \theta_{0i}. \end{cases} \quad (28)$$

这里  $\sigma_{0i}$ 、 $\theta_{0i}$  是正的设计参数, 因此有:



**定理.** 假定  $\lambda_i = \frac{1}{2} \varepsilon_i \min \lambda(L_i)$ ,  $g_{ij} = \|P_{ci}\| a_{ij}$ ,  $i, j = 1, \dots, N$ ,  $\gamma_i = \max \lambda(\Gamma_i^{-1})$ ,  $p_i = \max \lambda(P_{ci})$ ; 如果存在  $N$  维向量  $\alpha = [\alpha_1, \dots, \alpha_N]^T$ ,  $\alpha_i > 0$ , 使矩阵  $M$  的

$$m_{ij} = \begin{cases} \alpha_i(\lambda_i - 2g_{ii}), & i = j, \\ -(\alpha_i g_{ij} + \alpha_j g_{ji}), & i \neq j, \end{cases} \quad (29)$$

是正定的, 那么解  $e_i(t)$ 、 $\theta_i(t)$  是一致有界的, 而且存在正有限常数  $b_0$ 、 $q_0$  使  $\phi = [\phi_1^T, \dots, \phi_N^T]^T$  和  $e = [e_1^T, \dots, e_N^T]^T$  以不慢于  $\exp(-b_0/2t)$  的速度收敛致余集:

$$D_0 = \left\{ \phi, e \mid \|\phi\|^2 + \|e\|^2 \leq \frac{K_0}{b_0 q_0} \right\}, \quad (30)$$

这里, 
$$K_0 = \sum_{i=1}^N \alpha_i \left[ \frac{1}{\lambda_i} (D_{0i} + \bar{X}_{0i})^2 + \sigma_{0i} (\theta_{0i} + \|\theta_i^*\|)^2 + \sigma_{0i} \|\theta_i^*\|^2 \right], \quad (31)$$

$$\bar{X}_{0i} = \sup_t \left[ \sum_{j=1}^N g_{ij} \|x_{mj}(t)\| + E_{0i} \|x_{mi}\| \right],$$

$$D_{0i} = \sup_t \|P_{ci} D_{ci}(t)\|, \quad E_{0i} = \max \lambda(P_{ci} \mathcal{B}_i h_i^T).$$

证明. 考虑正定函数: 
$$V(t) = \sum_{i=1}^N \alpha_i [e_i^T P_{ci} e_i + \phi_i^T \Gamma_i^{-1} \phi_i],$$

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \sum_{i=1}^N \alpha_i [-e_i^T q_i q_i^T e_i - \varepsilon_i e_i^T L_i e_i + 2e_i^T P_{ci} D_{ci} + 2e_i^T P_{ci} F_{ci} \\ &\quad + 2e_i^T P_{ci} G_i - 2\sigma_i \phi_i^T \theta_i] \leq \sum_{i=1}^N \alpha_i [-2\lambda_i \|e_i\|^2 + 2\|e_i\| D_{0i} \\ &\quad + 2\|e_i\| \sum_{j=1}^N g_{ij} (\|e_j\| + \|x_{mj}\|) + 2\|e_i\| E_{0i} \|x_{mi}\| - 2\sigma_i \phi_i^T \theta_i] \\ &\leq -e^T M e + \sum_{i=1}^N [-\alpha_i \lambda_i \|e_i\|^2 + 2\alpha_i \|e_i\| D_{0i} + 2\alpha_i \|e_i\| \bar{X}_{0i} - 2\alpha_i \sigma_i \phi_i^T \theta_i] \\ &\leq -b_0 V - \sum_{i=1}^N \left[ (\lambda_m - b_0 \alpha_i p_i) \|e_i\|^2 + \alpha_i (\sigma_i - b_0 \gamma_i) \|\phi_i\|^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{\alpha_i}{\lambda_i} (D_{0i} + \bar{X}_{0i})^2 \right] - \sum_{i=1}^N (\alpha_i \sigma_i \|\phi_i\|^2 + 2\alpha_i \sigma_i \phi_i^T \theta_i^*) \\ &\leq -b_0 V - \sum_{i=1}^N \left[ (\lambda_m - b_0 \alpha_i p_i) \|e_i\|^2 + \alpha_i (\sigma_i - b_0 \gamma_i) \|\phi_i\|^2 + \bar{K}_0 \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^N \alpha_i [\sigma_{0i} (\theta_{0i} + \|\theta_i^*\|)^2 + \sigma_{0i} \|\theta_i^*\|^2] \right] = -b_0 V + K_0. \end{aligned} \quad (32)$$

若取  $b_0 = \min \left[ \min_i \left( \frac{\lambda_m}{\alpha_i p_i} \right), \min_i \left( \frac{\sigma_{0i}}{\gamma_i} \right) \right]$ , 记

$$p_0 = \min_i [\alpha_i \min \lambda(P_{ci})] \quad \gamma_0 = \min_i [\alpha_i \min \lambda(\Gamma_i^{-1})], \quad q_0 = \min(p_0, \gamma_0),$$

则(32)式可解得

$$\sum_{i=1}^N (\|e_i\|^2 + \|\phi_i\|^2) \leq \frac{V(0)}{q_0} e^{-b_0 t} + \frac{K_0}{q_0 b_0} (1 - e^{-b_0 t}) \rightarrow \frac{K_0}{q_0 b_0}$$

推论. 如果  $D_{0i}(t) = D_{0i}$ ,  $i = 1, \dots, N$  与  $t$  无关,  $\mathcal{B}$  满足

$$\max \lambda(P_{ci} \mathcal{B}_i h_i^T) = -\frac{1}{\mathcal{L}_i} \sum_{j=1}^N g_{ij} = -\frac{1}{\mathcal{L}_i} \sum_{j=1}^N \|P_{ci}\| \|a_{ij}\|,$$

则  $\|e(t)\| \rightarrow 0$ . 证明参看文献[2].

### 三、例

考查系统:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{11} \\ \dot{x}_{12} \\ \dot{x}_{21} \\ \dot{x}_{22} \\ \dot{x}_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0.5 & 1.0 & 0. & 0. \\ 0.3 & -1.0 & 0.2 & 0. & 0. \\ 0.1 & 0. & -0.8 & 0.4 & 0.2 \\ 0. & 0. & 0. & -0.6 & 0. \\ 0. & 0. & -0.1 & 0.3 & -0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.4 & 0. \\ 0.8 & 0. \\ 0. & 0. \\ 0. & 0.5 \\ 0. & 0. \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} \\ D_{12} \\ D_{21} \\ D_{22} \\ D_{23} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{bmatrix},$$

取参考模型为

$$\begin{aligned} \dot{x}_{m1} &= \begin{bmatrix} -4.53 & 0.023 \\ 0. & -2.72 \end{bmatrix} x_{m1} + \begin{bmatrix} 0.196 \\ 0.124 \end{bmatrix} r_1, & \dot{x}_{m2} &= \begin{bmatrix} -4.0 & 0.1 & 0.2 \\ 0.0 & -2.1 & 0.0 \\ -0.2 & -0.4 & -3.5 \end{bmatrix} x_{m2} \\ &+ \begin{bmatrix} 0. \\ 1. \\ 0. \end{bmatrix} r_2, & y_{m1} &= [0, 1] x_{m1}, & y_{m2} &= [0 \ 0 \ 1] x_{m2}. \end{aligned}$$

仿真结果如下:

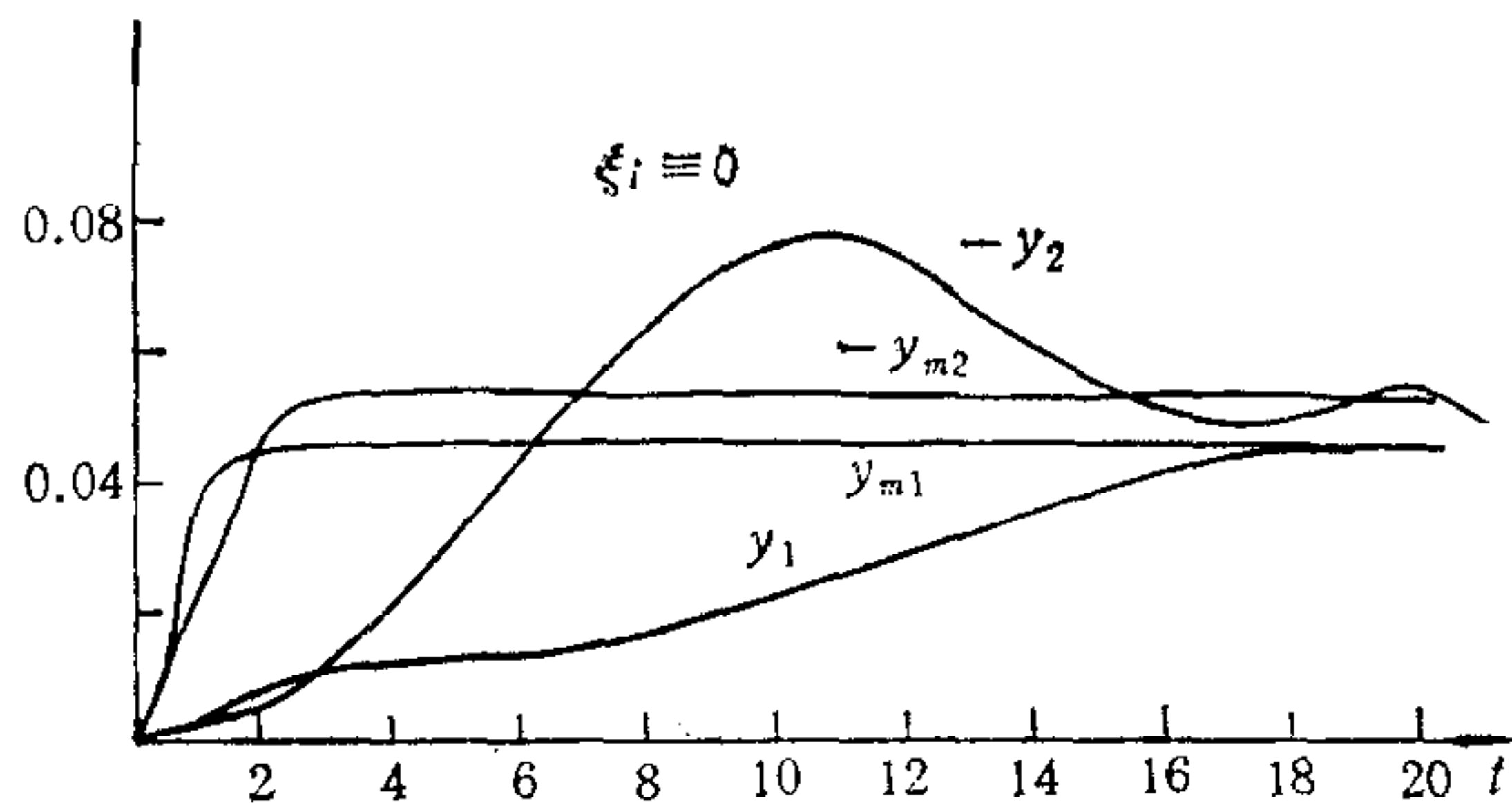


图 2 (4:1)

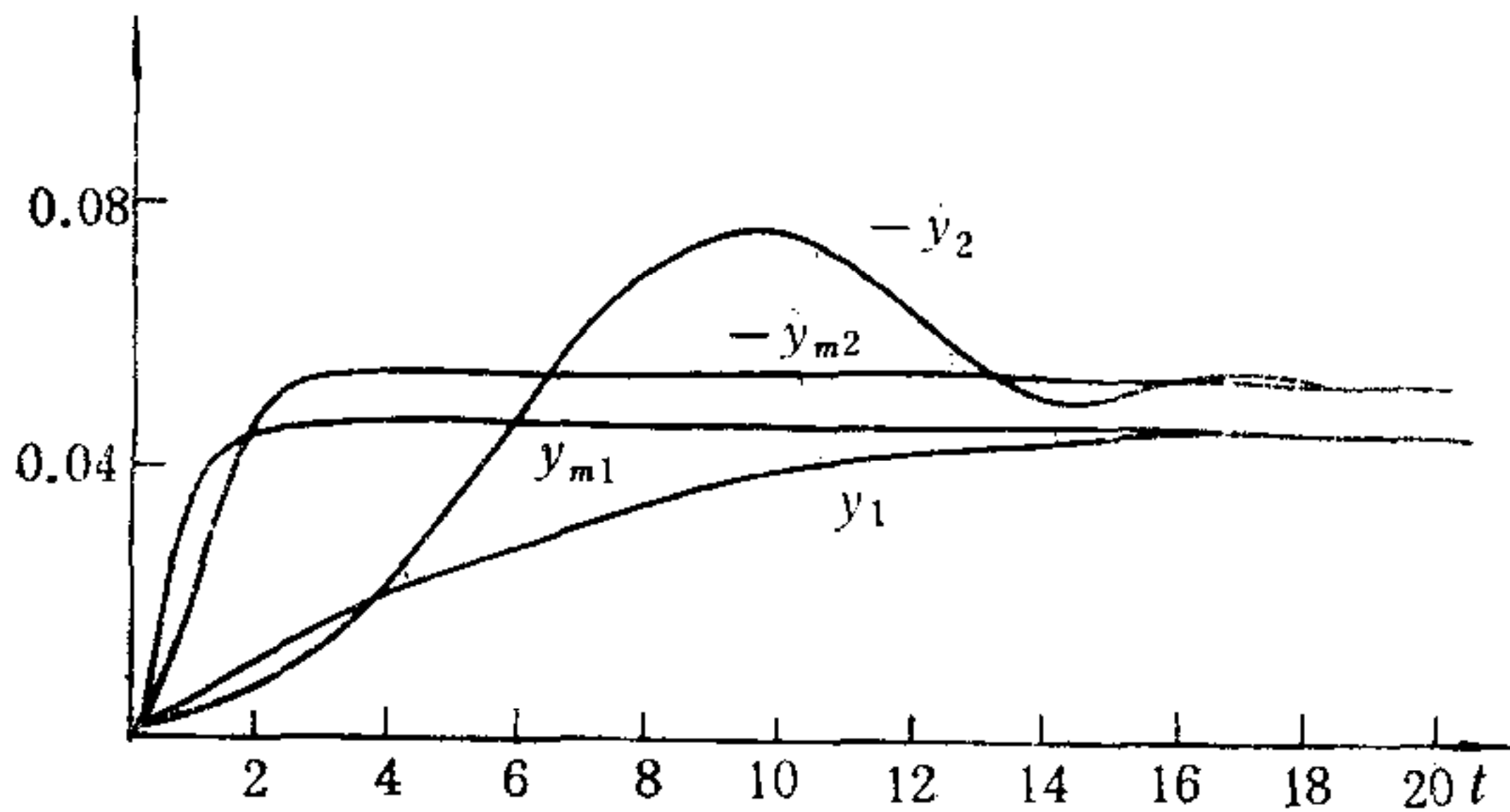


图3 有消差镇定器(4:1)

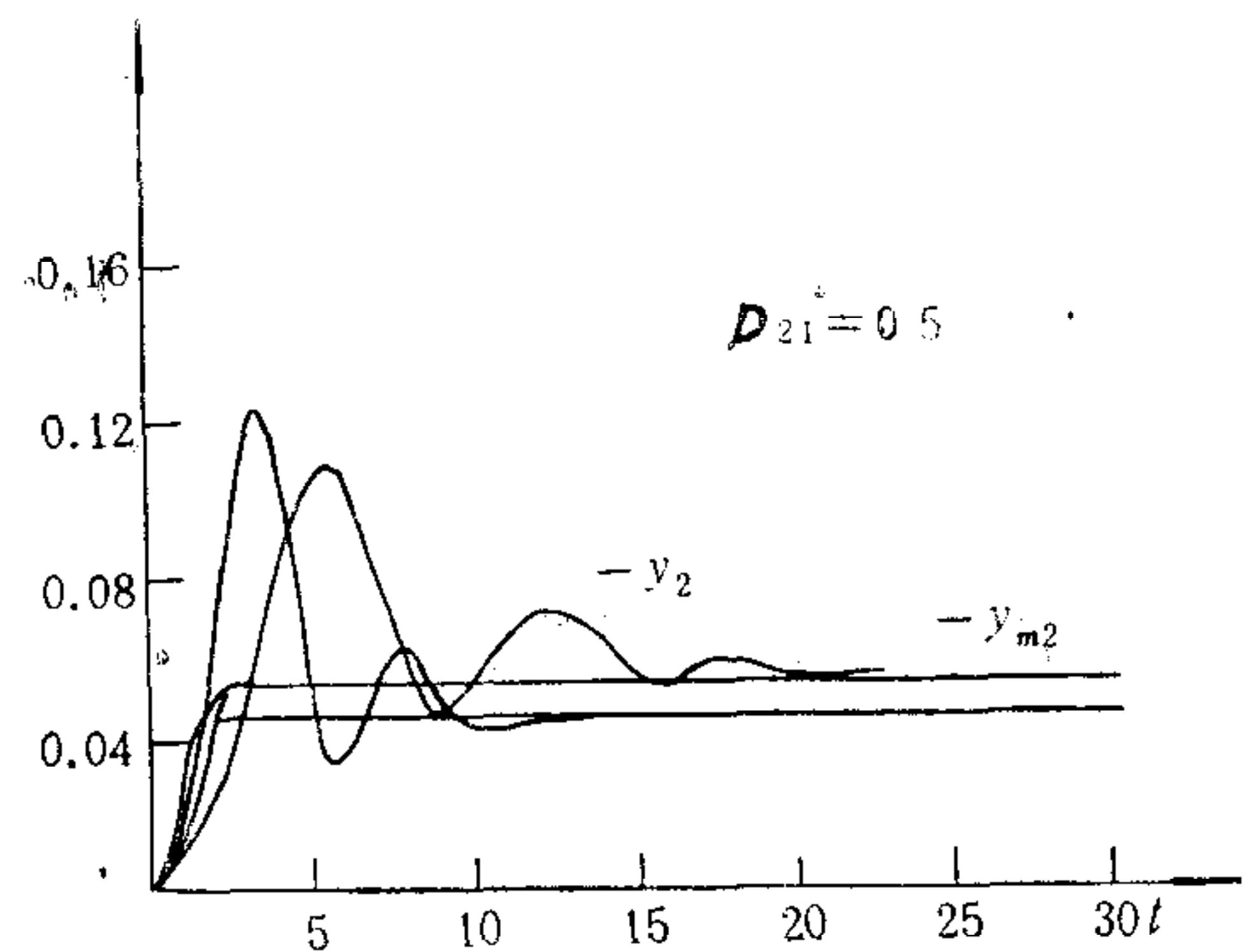


图4 有消差镇定器(4:1)

## 四、结 论

本文提出的分散自适应控制的结构与算法具有较强的鲁棒性,理论分析与仿真计算均证明了这一点。当  $n^* = 2$  时的情形分析类似<sup>[2]</sup>。

## 参 考 文 献

- [1] Iounnou, P. A. and Kokotovic, P. V., Adaptive Systems With Reduced Models, New York: Springer-Verlag, (1983), 121—144.
- [2] Iounnou, P. A., Decentralized Adaptive Control of Interconnected Systems, *IEEE Trans. Automat. Contr. App.* **AC-31** (1986), 291—298.
- [3] Landau, Y. I., Adaptive Control: The Model Reference Approach, New York: Marcel Dekker, (1979), 25—80.
- [4] Narendra, K. S., Lin, Y. H. and Valavani, L. S., Stable Adaptive Controller Design, Part II: Proof of Stability, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **AC-25** (1980), 440—448.

# DECENTRALIZED ADAPTIVE CONTROL OF INTERCONNECTED SYSTEMS

YOU DAHAI

(Huazhong University of Science and Technology)

## ABSTRACT

The decentralized adaptive control of a class of large scale systems is investigated in this paper. A group of adaptive laws with stronger robustness are given. When there exists among various subsystems an arbitrary interconnection with unknown parameters, nonlinearities and bound disturbances, the state and parameter errors will converge to the bound residual sets exponentially if the relative degree  $n^*$  of the transfer function of each decoupled subsystem is less than or equal to two.

**Key words** —Decentralized adaptive control; interconnected system; robustness.