

城市供水系统调度的分解— 协调优化方法

仲伟俊 徐南荣 陈森发
(东南大学)

摘 要

本文建立了含蓄水池城市供水系统优化调度问题的数学模型。根据分解-协调原理,提出了解决该优化调度问题的一种算法,并对算法进行了仿真计算,获得了满意的结果。

关键词——供水系统,优化调度,大系统,分解-协调。

一、引 言

随着城市供水系统的规模不断扩大,仅利用系统中各水源的供水泵站来保障系统的服务质量,不仅经济效益较低,而且有时不能满足社会的需求。设置蓄水池不仅可以改善供水系统的经济效益和社会效益,而且对减少系统的漏水量、缓和城市用水高峰期的供需矛盾都有一定的帮助。解决大规模含蓄水池城市供水系统的优化调度问题已引起人们的关注。

随着一天内城市居民生活及生产情况的变化,其需水量也有较大的变化。夜间的需水量远低于白天的需水量,而早晨和晚上又各形成一个高峰用水期。供水系统中设置蓄水池,可以起到在高低峰用水期调节系统负荷的作用。当系统处于低峰用水期时,蓄水池作为负载;而当系统进入高峰用水期时,蓄水池泵站将蓄水池中的水输送到用户,此时蓄水池成为水源。含蓄水池城市供水系统的优化调度问题就是在系统今后一天内各时间区间的需水量都已知的条件下,确定今后一天内各时间区间各供水泵站的供水流量和供水压力,蓄水池何时作为负载、何时作为水源以及它作为水源时的供水流量和供水压力,在保证系统服务质量的前提下,使供水费用最低。由于城市供水系统的大规模性,一天内不同时间区间上调度方案的相关性,以及供水管网的描述变量之间关系的非线性,该优化问题是一个大规模、非线性的问题。

本文针对我国城市供水系统的具体情况,建立了含蓄水池城市供水系统优化调度问题的数学模型。利用大系统理论中的目标协调法,考虑协调变量有不等式约束,提出了解决该优化问题的一种算法。对该算法利用计算机进行了仿真计算,获得了满意的结果。

二、城市供水系统的描述

城市供水系统在一天内各时间区间的运行情况可以用管网中的节点及与之相邻管段的状态变量(包括节点压力、节点流量等)加以描述^[1]。对图 1 所示系统中某节点 i , 在第

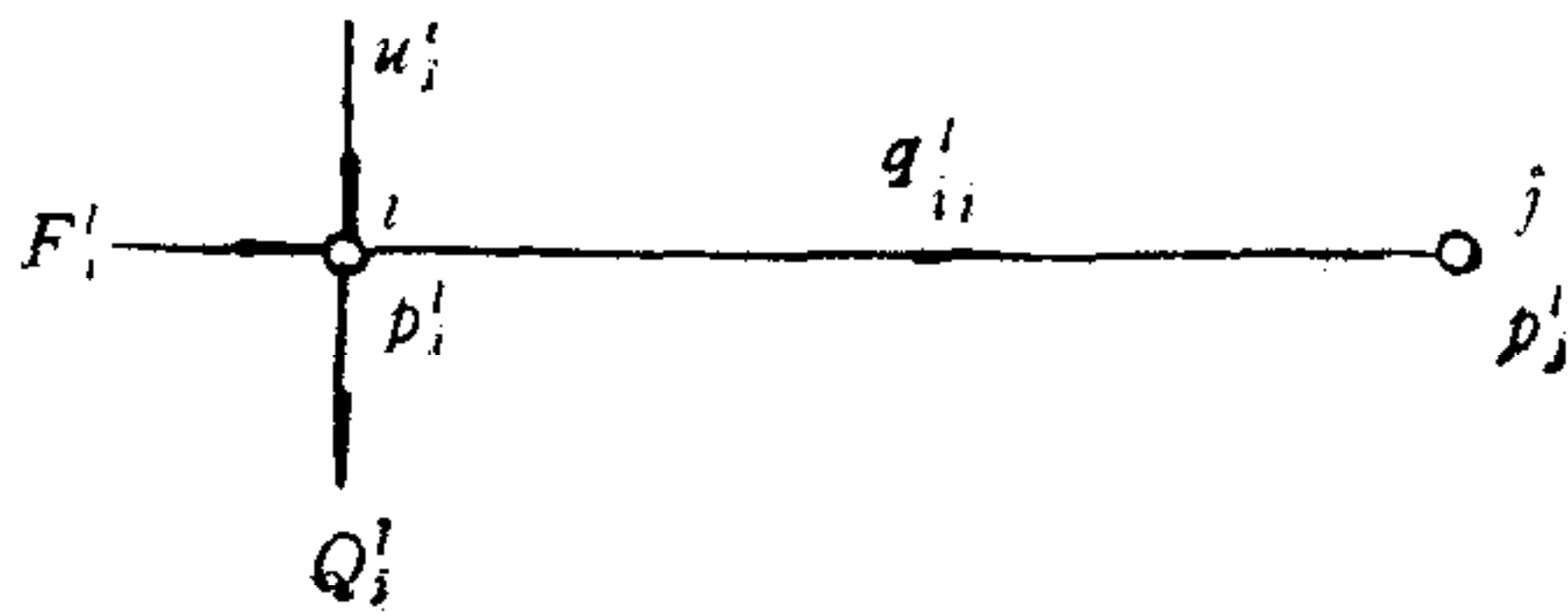


图 1 节点 i 的物质流图

l 个时间区间流进或流出该节点的流量至多有如下四类: 与该节点相邻管段的流量 q_{ij}^l ; 当该节点为水源时的供水量 u_i^l ; 节点的需水量(负荷) Q_i^l ; 当该节点为蓄水池所在节点时蓄水池需要或供应的水量 F_i^l 。第 i 个节点的物质流平衡方程为

$$u_i^l - Q_i^l + F_i^l - \sum_{j \in I_i} q_{ij}^l = 0. \quad (1)$$

若令 $Q_i^l = u_i^l - Q_i^l + F_i^l$, 并代入(1)式得:

$$Q_i^l - \sum_{j \in I_i} q_{ij}^l = 0. \quad (2)$$

这里, Q_i^l 为第 i 个节点在 l 区间的节点流量, I_i 为与节点 i 相邻节点标号的集合, F_i^l 定义为:

$$F_i^l \begin{cases} \geq 0, & \text{当第 } i \text{ 个蓄水池在 } l \text{ 区间为水源;} \\ < 0, & \text{当第 } i \text{ 个蓄水池在 } l \text{ 区间为负载.} \end{cases}$$

方程(2)就是人们常采用的节点方程的基本形式。对有 n 个节点的供水系统, 有 $(n-1)$ 个独立的方程, 由该方程组可以完全描述系统的运行情况。

在图 1 中, 管段流量 q_{ij}^l 与它两端节点压力 p_i^l 、 p_j^l 之间的关系为

$$q_{ij}^l = S_{ij} \operatorname{sgn}(p_i^l - p_j^l) |p_i^l - p_j^l|^{1/\alpha}, \quad (3)$$

式中 S_{ij} 为管段 ij 的摩阻系数, sgn 为符号函数, 定义为:

$$\operatorname{sgn}(A) = \begin{cases} 1, & \text{当 } A \geq 0, \\ -1, & \text{当 } A < 0, \end{cases}$$

α 为常数。将(3)式代入(2)式得节点平衡方程为

$$Q_i^l - \sum_{j \in I_i} S_{ij} \operatorname{sgn}(p_i^l - p_j^l) |p_i^l - p_j^l|^{1/\alpha} = 0. \quad (4)$$

若令(4)式的左边等于 $g_i^l(Q^l, u^l, F^l, p^l)$, 则它成为

$$g_i^l(Q^l, u^l, F^l, p^l) = 0, \quad i = 1, \dots, n-1. \quad (5)$$

对于方程组(5), 在所有节点流量都已知时, 根据服务质量要求确定参考点压力后, 可利用较成熟的有限元素法等方法^[1]计算出系统的所有状态参数, 这就是管网系统的水力分析技术。

三、优化调度问题的数学模型

在确定含蓄水池城市供水系统的调度方案时, 应充分利用蓄水池具有的调节高低峰

用水期系统负荷的作用,即要考虑不同时刻系统调度方案之间的相关性.根据城市需水量的变化规律,将一天作为一个周期.在一个周期内,又将其分为 m 个等间隔时间区间.调度问题就是确定一天内不同时间区间上系统的调度方案.

对于含蓄水池城市供水系统的优化调度问题,以一天的供水成本作为目标函数.它包括三部分:进入供水泵站的水成本;供水泵站内的电能消耗费用;当蓄水池作为水源时,其泵站内的电能消耗费用.用数学表达式可表示为:

$$f = \sum_{l=1}^m \left\{ \sum_{i \in X} [v_i u_i^l + \gamma_i u_i^l (p_i^l - p h_i)] + \sum_{j \in Y} \delta_j^l \gamma_j F_j^l (p_i^l - p h_i) \right\} \\ = \sum_{l=1}^m f^l(u^l, F^l, p^l). \quad (6)$$

式中, X 为水源所在节点标号的集合, Y 为蓄水池所在节点标号的集合, v_i 为第 i 个水源的水成本价格, $p h_i$ 为节点 i 的地面标高, γ_i 为单位转换系数,常数, δ_j^l 定义为

$$\delta_j^l \triangleq \begin{cases} 1, & \text{当 } F_j^l \geq 0, \\ 0, & \text{当 } F_j^l < 0. \end{cases} \quad (7)$$

该优化调度问题包含一系列等式及不等式约束条件.首先,在任一时间区间内,与系统的最优调度方案相应的状态参数必须满足管网系统的平衡条件,即方程(5).对蓄水池而言,在一个周期中,进出它的水量的代数和应为零,即:

$$\sum_{l=1}^m F_i^l = 0, \quad i \in Y. \quad (8)$$

其次,为保证系统的服务质量和使系统安全运行,要求所有节点的压力值都在根据系统服务质量要求确定的下限 p_i^{\min} 及根据系统安全运行条件确定的上限 p_i^{\max} 之间,即要求:

$$p_i^l \geq p_i^{\min}, \quad i = 1, \dots, n; \quad l = 1, \dots, m; \quad (9)$$

$$p_i^l \leq p_i^{\max}, \quad i = 1, \dots, n; \quad l = 1, \dots, m. \quad (10)$$

由于受水厂的水处理能力等条件的限制,各供水泵站(水源)的供水量应满足:

$$u_i^l \leq u_i^{\max}, \quad i \in X, \quad l = 1, \dots, m. \quad (11)$$

又因各供水泵站的供水流量不能小于零,则

$$u_i^l \geq u_i^{\min}, \quad i \in X, \quad l = 1, \dots, m. \quad (12)$$

此外,由于蓄水池蓄水能力的限制,当它被作为用户时,其累积蓄水量始终不能超过其蓄水能力.设 t 为时间区间的长度, V_i^{\max} 为第 i 个蓄水池的最大蓄水量, V_i^0 为 $l=1$ 时间区间开始时第 i 个蓄水池的蓄水量.由于当蓄水池作为负载时, F_i^l 的符号为负,上述要求的数学表达式为

$-t \sum_{j=1}^l F_j^i \leq V_i^{\max} - V_i^0$, 整理后得:

$$\sum_{j=1}^l F_j^i \geq (V_i^0 - V_i^{\max})/t \triangleq F_i^0 - F_i^{\max}, \quad l = 1, \dots, m-1; \quad i \in Y. \quad (13)$$

同样当蓄水池作为水源时,其供水量不能超过它目前的蓄水量,即应有:

$$t \sum_{j=1}^l F_j^i \leq V_i^0,$$

整理得:

$$\sum_{j=1}^l F_j^i \leq F_i^0, \quad l = 1, \dots, m-1; \quad i \in Y. \quad (14)$$

表达式(5)–(14)构成了含蓄水池城市供水系统优化调度问题的数学模型。该优化调度问题可以叙述为: 在系统的负荷 $Q_i^l (i = 1, \dots, n; l = 1, \dots, m)$ 、 V_i^0 、 $V_i^{\max} (i \in Y)$ 及系统的各种上下限约束均已知的条件下, 确定满足式(5)及(8)–(14)的 u_i^l 、 $p_i^l (i \in X; l = 1, \dots, m)$ 及 $F_j^l (j \in Y; l = 1, \dots, m)$ 的值, 使(6)式的值为最小。为了便于说明本优化算法, 将数学模型归纳为:

$$\min \sum_{l=1}^m f^l(u^l, F^l, p^l), \quad (15a)$$

$$g^l(p^l, u^l, F^l, Q^l) = 0, \quad l = 1, \dots, m, \quad (15b)$$

$$\sum_{l=1}^m F^l = 0, \quad (15c)$$

$$p^l - p^{\min} \geq 0, \quad l = 1, \dots, m, \quad (15d)$$

$$p^{\max} - p^l \geq 0, \quad l = 1, \dots, m, \quad (15e)$$

$$u^l - u^{\min} \geq 0, \quad l = 1, \dots, m, \quad (15f)$$

$$u^{\max} - u^l \geq 0, \quad l = 1, \dots, m, \quad (15g)$$

$$\sum_{i=1}^l F_i^j \geq F_i^0 - F_i^{\max}, \quad l = 1, \dots, m-1, \quad (15h)$$

$$\sum_{j=1}^l F_j^i \leq F_i^0, \quad l = 1, \dots, m-1. \quad (15i)$$

式中, g^l 、 p^l 、 F^l 、 p^{\min} 、 p^{\max} 、 u^l 、 u^{\min} 、 u^{\max} 、 F^0 及 F^{\max} 分别为由 g_i^l 、 p_i^l 、 F_i^l 、 p_i^{\min} 、 p_i^{\max} 、 u_i^l 、 u_i^{\min} 、 u_i^{\max} 、 F_i^0 及 F_i^{\max} 组成的向量。

四、优化调度问题的分解-协调算法

问题(15)是一个大规模、非线性的优化问题, 适合于应用大系统理论中的分解-协调算法加以求解。由式(15a)–(15i)可以看出, 该优化调度问题可以分解为 m 个子问题, 其关联约束为(15c), 关联变量为 $F^l (l = 1, \dots, m)$ 。由于式(15h)及(15i)可以转化为各子问题中关联变量的上下限约束, 可以先不考虑它们对其解的影响。利用目标协调法, 将优化调度问题的求解分为两级。设 $\lambda_i (i \in Y)$ 为与式(15c)有关的拉格朗日乘子, 由于式(15b)及(15d)–(15g)是独立可分离的, 可作为附加的约束条件, 则可定义拉格朗日函数为

$$L = \sum_{l=1}^m f^l(u^l, F^l, p^l) - \sum_{i \in Y} \lambda_i \sum_{l=1}^m F_i^l. \quad (16)$$

它可以分解为 m 个子拉格朗日函数之和:

$$L = \sum_{l=1}^m L_l,$$

$$L_l = f^l(u^l, F^l, p^l) - \sum_{i \in Y} \lambda_i F_i^l, \quad (17)$$

其中 L_l 只与第 l 个子系统的控制向量 u^l 、关联向量 F^l 有关, 而 $\lambda_i (i \in Y)$ 可以由协调器给定。

对于该问题的目标协调算法, 依据拉格朗日对偶原理, 协调级的任务是 $\max_{\lambda} L(\lambda)$, 即实现

$$\nabla_{\lambda_i} L \triangleq \frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = - \sum_{l=1}^m F_i^l = 0, \quad i \in Y, \quad (18)$$

从而满足关联约束 (15c)。 λ_i 的修改可以采用最速下降法, 其计算公式如下:

$$\lambda_i^{k+1} = \lambda_i^k + c \nabla_{\lambda_i} L, \quad i \in Y. \quad (19)$$

式中, k 为迭代步数, c 为迭代步长。

第 l 个优化调度子问题所需解决的问题为:

$$\min_{u^l, F^l} \left\{ f^l(u^l, F^l, p^l) - \sum_{i \in Y} \lambda_i F_i^l \right\}, \quad (20a)$$

$$g^l(p^l, u^l, F^l, Q^l) = 0, \quad (20b)$$

$$p^l - p^{\min} \geq 0, \quad (20c)$$

$$p^{\max} - p^l \geq 0, \quad (20d)$$

$$u^l - u^{\min} \geq 0, \quad (20e)$$

$$u^{\max} - u^l \geq 0. \quad (20f)$$

显然, u^l 、 F^l 都是 $\lambda_i (i \in Y)$ 的函数。

考虑不等式约束 (15h) 及 (15i) 对优化调度问题解的影响, 由于求解子问题可以按 $l = 1$ 至 m 的顺序进行, 式 (15h) 及 (15i) 可以转化为子问题内关联变量的上下限约束。对第一个优化调度子问题应有:

$$F^0 \geq F^1 \geq F^0 - F^{\max}.$$

对第 l 个优化调度子问题, 同样由式 (15h) 及 (15i) 可得它的关联变量应满足:

$$F^l \geq F^0 - F^{\max} - \sum_{j=1}^{l-1} F^j, \quad (20g)$$

$$F^l \leq F^0 - \sum_{j=1}^{l-1} F^j. \quad (20h)$$

而对第 m 个优化调度子问题, 由于式 (15c) 最终必须被满足, 无需考虑关联变量 F^m 的上下限约束。

根据上面的讨论, 该问题的目标协调算法的二级递阶结构可用图 2 表示。

根据图 2 所示算法的结构图, 求解城市供水系统的优化调度问题可按下列步骤:

a) 在协调级设定 λ 的初值 λ^0 , 置计数器 $k = 1$;

b) 将 λ^k 送到各优化调度子问题中, 并按 $l = 1$ 至 m 的顺序先确定各子问题中关联变量的上下限约束, 然后再求解该子问题, 并将各优化调度子问题的计算结果送回协调器;

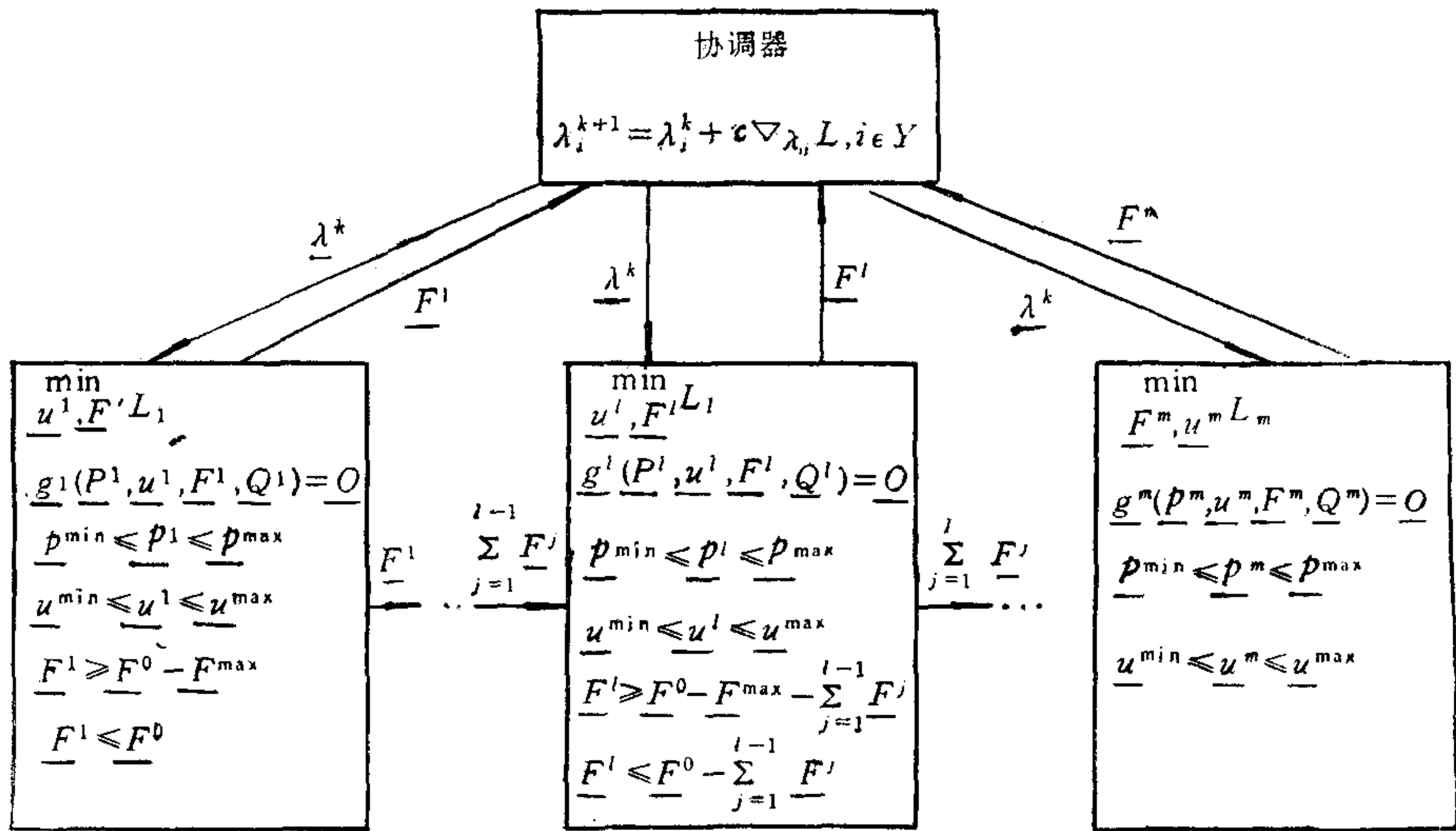


图2 求解优化调度问题的目标协调算法结构图

c) 利用式 (18) 计算 $\nabla_{\lambda_i} L (i \in Y)$, 并判别其最优解是否获得, 即确定 $|\nabla_{\lambda_i} L| \leq \varepsilon$ 对所有 $i \in Y$ 是否成立. 如成立, 输出计算结果, 否则继续计算.

d) 按式 (19) 计算出新的协调变量 λ^{k+1} , 并置 $k = k + 1$, 转到 b) 继续计算.

五、优化调度子问题的求解

对于优化调度子问题 (20), 由于其目标函数和约束条件都是非线性的, 且变量和约束条件较多, 求解它是一个较困难的问题. 这里根据我国城市供水系统的特点, 利用库恩-塔克的最优性必要条件, 提出了一种迭代计算方法. 设 $\mu_j, s_j, w_j, \alpha_j, \beta_j, v_j$ 及 γ_j 分别为与式 (20b) — (20h) 有关的拉格朗日乘子, 则第 l 个优化调度问题的拉格朗日函数可以定义为:

$$\begin{aligned}
 L' = & L_l - \sum_{j=1}^{n-1} \mu_j g_j^l(p^l, u^l, Q^l, F^l) - \sum_{j=1}^n s_j (p_j^l - p_j^{\min}) \\
 & - \sum_{j=1}^n w_j (p_j^{\max} - p_j^l) - \sum_{j \in X} \alpha_j (u_j^l - u_j^{\min}) - \sum_{j \in X} \beta_j (u_j^{\max} - u_j^l) \\
 & - \sum_{j \in Y} v_j \left(F_j^l - F_j^0 + F_j^{\max} + \sum_{i=1}^{l-1} F_j^i \right) \\
 & - \sum_{j \in Y} \gamma_j \left(F_j^0 - \sum_{i=1}^{l-1} F_j^i - F_j^l \right). \tag{21}
 \end{aligned}$$

对于一般的城市供水系统存在下述特点:

a) 一般情况下, 在供水管网系统中都有 $p_j^{\max} \gg p_j^l (j = 1, \dots, n)$, 即 (20d) 始终为非作用约束.

b) 在优化调度子问题最优解的轨迹上, 必存在且仅存在一个节点 k , 使得

$$p_k^l - p_k^{\min} = 0,$$

而对别的节点有 $p_j^l > p_j^{\min}$, ($j = 1, \dots, n; j \neq k$), 称节点 k 为控制点。

利用供水系统的上述特点, 且先不考虑式 (20e)–(20h) 对其解的影响, 不失一般性。再假定节点 n 为控制点, 根据库恩-塔克的最优性必要条件, 问题 (20) 的最优解应满足下列条件^[2]:

$$\frac{\partial L'}{\partial p_j^l} = \frac{\partial L_l}{\partial p_j^l} - \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i \frac{\partial g_i^l}{\partial p_j^l} = 0, \quad j = 1, \dots, n-1, \quad (22)$$

$$\nabla_{u_j^l} L' = \frac{\partial L'}{\partial u_j^l} = \frac{\partial L_l}{\partial u_j^l} - \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i \frac{\partial g_i^l}{\partial u_j^l} = 0, \quad j \in X, \quad (23)$$

$$\nabla_{F_j^l} L' = \frac{\partial L'}{\partial F_j^l} = \frac{\partial L_l}{\partial F_j^l} - \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i \frac{\partial g_i^l}{\partial F_j^l} = 0, \quad j \in Y, \quad (24)$$

$$\frac{\partial L'}{\partial \mu_j} = g_j^l(p^l, u^l, F^l, Q^l) = 0, \quad j = 1, \dots, n-1. \quad (25)$$

优化调度子问题 (20) 的求解转化为寻找一组满足方程组 (22)–(25) 的 p^l 、 u^l 及 F^l 的值。若考虑不等式约束 (20e)–(20h) 对其解的影响, 采用迭代计算方法, 优化调度子问题的求解按下列步骤:

a) 设置一组可行的 u^l 、 F^l 及参考点压力的值;

b) 利用管网系统的水力分析技术解方程组 (25), 并将计算结果代入式 (22) 计算 μ 的值;

c) 利用式 (23)、(24) 计算 $\nabla_{u_j^l} L'$ 及 $\nabla_{F_j^l} L'$ 的值, 并对控制量 u^l 和协调变量 F^l 按下式修改:

$$(u_j^l)^{k+1} = (u_j^l)^k - c_1 \nabla_{u_j^l} L', \quad (26)$$

$$(F_j^l)^{k+1} = (F_j^l)^k - c_2 \nabla_{F_j^l} L'. \quad (27)$$

式中 k 为迭代次数计数器, c_1 、 c_2 为迭代步长;

d) 考虑上下限约束对 u^l 、 F^l 的影响, 式 (26) 及 (27) 应按下列规则:

$$(u_j^l)^{k+1} = \begin{cases} u_j^{\max}, & \text{若 } (u_j^l)^{k+1} \geq u_j^{\max}, \\ u_j^{\min}, & \text{若 } (u_j^l)^{k+1} \leq u_j^{\min}, \\ (u_j^l)^{k+1}, & \text{其它.} \end{cases} \quad (28)$$

相应地, 其最优解的判别条件为:

$$\begin{cases} \text{若 } u_j^{\min} < u_j^l < u_j^{\max}, & \text{则 } \nabla_{u_j^l} L' = 0, \\ \text{若 } u_j^l = u_j^{\max}, & \text{则 } \nabla_{u_j^l} L' \leq 0, \\ \text{若 } u_j^l = u_j^{\min} & \text{则 } \nabla_{u_j^l} L' \geq 0. \end{cases} \quad (29)$$

对 F_j^l , 先根据它的符号判别该蓄水池在该时间区间是作为水源还是作为负载, 由此确定它应满足的上限或下限。然后用类似于式 (28)、(29) 的计算公式修改 F_j^l 和判别其最优性。若 u^l 、 F^l 均已达最优, 计算过程结束。否则, 继续计算。

e) 找出控制点的位置, 调整控制点的压力。设第 k 个节点为控制点, 则 $p_k^l = p_k^{\min}$, 并将它作为下一轮迭代计算的参考点, 转到 b) 继续计算。

六、计算实例

对本文所讨论的算法，利用计算机对多个实例进行了仿真计算，获得了较满意的结果。对图 3 所示的某供水系统^[1]，将一个周期分为四个时间区间，节点地面标高均为零，各时间区间用户的需水量见表 1，为 $v_i^0 = 0$ 时三种情况下的计算结果。比较供水系统中

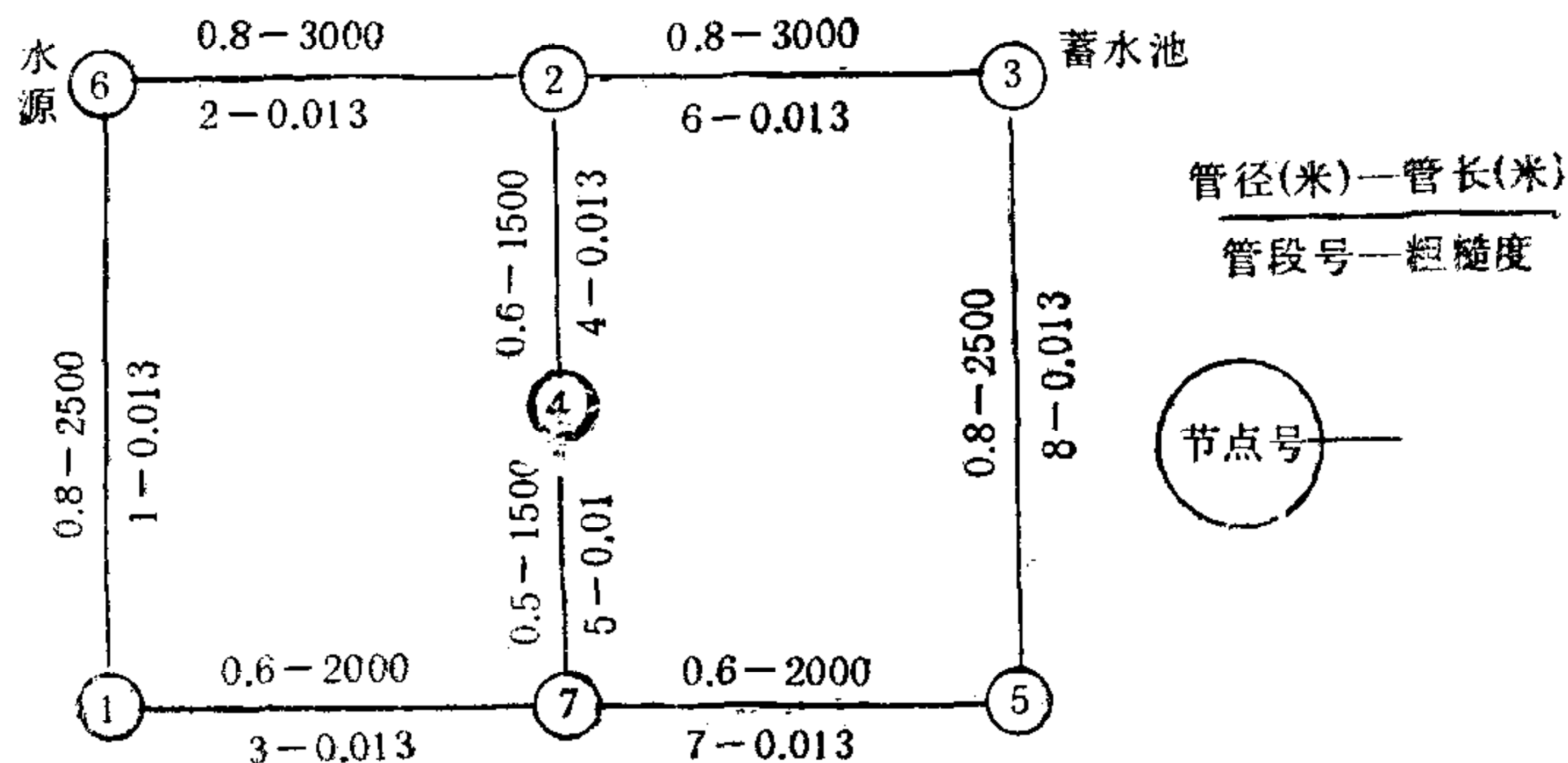


图 3 某供水系统结构图

表 1 节点流量及计算结果

节点负荷 (米 ³ /秒)	节点号	节点号					无蓄水池		有蓄水池 $F^{max} = 0.75$		有蓄水池 $F^{max} = +\infty$	
		1	2	4	5	7	目标函数	供水量 (米 ³ /秒)	目标函数	供水量 (米 ³ /秒)	目标函数	供水量 (米 ³ /秒)
		区间号										
1		0.65	0.25	0.10	0.65	0.55	108.72	2.20	230.16	2.907	212.02	2.826
2		0.70	0.30	0.15	0.70	0.60	138.10	2.45	144.40	2.493	163.92	2.618
3		0.85	0.45	0.30	0.85	0.75	261.83	3.20	222.52	2.980	218.38	2.954
4		0.95	0.55	0.40	0.95	0.85	378.73	3.70	268.86	3.175	264.61	3.147

有蓄水池和无蓄水池的计算结果可以看出，在系统中设置蓄水池，不仅可以提高系统的社会效益和经济效益（经济效益可提高 3% 以上，对中等城市每年减少运行费用十万元以上）。它还可以使网管系统中的压力分布更加均匀，从而减少系统的漏水量。同时还可以看出供水泵站的电能消耗在各时间区间的分布也更加均匀。另外表列结果还表明，蓄水池的蓄水能力与系统的运行状况密切相关。通过实现供水系统的优化调度，可以充分利用蓄水池的能力，提高对系统管理的合理性和科学性，从而提高系统的社会效益和经济效益。

结 束 语

本文建立了含蓄水池城市供水系统优化调度问题的数学模型，提出了解决该优化调度问题及优化调度子问题的方法。后者已在某市实际供水计算机调度系统中投入运行，获

得了较好的效果。但对该算法的一些理论分析工作有待于进一步进行。

本文的研究工作得到了汪时萍老师的大力支持和帮助,在此深表谢意。

参 考 文 献

- [1] 同济大学,给水工程,中国建筑工业出版社,1980年。
- [2] 仲伟俊、陈森发、徐南荣,城市供水系统调度的递阶优化方法,南京工学院学报,1987,4,65—73。
- [3] 李人厚、邵福庆,大系统的递阶与分散控制,西安交通大学出版社,1986年。

THE DECOMPOSITION-COORDINATION OPTIMIZATION ALGORITHM FOR THE DISTRIBUTION OF URBAN WATER SUPPLY SYSTEM

ZHONG WEIJUN XU NANRONG CHEN SENFA
(*Southeast University*)

ABSTRACT

This paper develops the mathematical model of the optimal dispatch problem of urban water supply system with vessels. Based on the principle of decomposition-coordination, an algorithm for solving the optimal dispatch problem is proposed. The digital simulation for the algorithm is carried out and satisfactory results are obtained.

Key words ——Water supply system; optimal dispatch; large scale system; decomposition-coordination.