

采用正交多项式曲面拟合法的边缘检测

姜杭毅 蔡元龙

(西安交通大学)

摘 要

本文介绍了一种应用局部曲面拟合技术检测图象边缘的方法。其拟合函数是由两个一维三阶正交多项式的张量积构成，图象中的边缘点定义为梯度方向上二阶导数的过零点。文中证明了：采用正交函数进行曲面拟合后的图象及其各阶偏导数均可用卷积完成，而它又可分解为两次一维卷积，从而使计算量大大下降。实验表明，同传统的边缘检测技术相比，该方法具有良好的噪音抑制特性，边缘点的位置确定也很令人满意。

关键词——图象处理，边缘检测，曲面拟合，计算机视觉。

一、引 言

计算机视觉领域中，提取物体可识别特征的重要手段之一是边缘检测。通常图象中物体与背景之间有亮度的差别，其边界具有的特征是相邻象素灰度值有明显变化，于是可由灰度的导数值来提取边缘，称为梯度阈值法。但是该方法与阈值大小有关，过小则边缘线太粗，过大则出现断点，仍需进行细化、连接等进一步的处理。

道理上，边缘点应处在一阶导数的峰值点。在这些点上，二阶导数为零，于是可根据二阶导数过零进行边缘检测^[1]。二维情况下，二阶导数应在梯度最大方向上求解；另一种方法是用拉普拉斯算子去近似，它的计算量比较小。

噪音会给边缘检测带来很大困难。抑制噪音的方法之一是预先对图象进行平滑处理，最常用的一个平滑函数是高斯函数。方法之二是进行局部曲面拟合，对图象中的每一个局部区域，用一个拟合函数进行最佳逼近，以达到消除噪音影响的目的^[2,3]。

本文中介绍的方法是根据曲面拟合法的思想进行边缘检测的，边缘点定义为二阶导数在梯度方向上的过零点。由于拟合函数是由正交多项式构成的，使得计算大大简化。

二、基本思想

1. 局部最小均方误差拟合及其卷积算法

首先看一维情况下的数据拟合问题。

定义 1. 设有一组观测数据 $\{x_i, f(x_i)\}$, $i = 0, 1, \dots$, 和定义在对称区间 D 上的连

续基函数系 Φ , 在以 x_k 为中心的区域 D 上, 如果存在一组 $\{a_m\}$, $m = 0, 1, \dots, M - 1$, 可使

$$\varepsilon = \sum_i [g(x_i) - f(x_{k+i})]^2 \quad (2.1)$$

有极小值, 其中:

$$g(x) = \sum_m a_m \varphi_m(x), \quad \varphi_m(x) \in \Phi, \quad (2.2)$$

则称 $g(x)$ 是在以 x_k 为中心的区域 D 上对 $\{x_i, f(x_i)\}$ 的局部最小均方误差拟合函数, 或局部最小二乘拟合函数.

使 (2.1) 式中 ε 有最小值的 a_m 满足线性方程组 $\partial\varepsilon/\partial a_m = 0$, $m = 0, 1, \dots, M - 1$, 即:

$$\sum_n a_n \langle \varphi_n, \varphi_m \rangle = \langle f_k, \varphi_m \rangle, \quad m = 0, 1, \dots, M - 1, \quad (2.3)$$

其中 $\langle \varphi_n, \varphi_m \rangle = \sum_i \varphi_n(x_i) \varphi_m(x_i)$ 和 $\langle f_k, \varphi_m \rangle = \sum_i f(x_{k+i}) \varphi_m(x_i)$ 是向量的内积.

选定基函数系 Φ , 就可由上式求得拟合函数 $g(x)$ 的系数 a_m . 但是上述方程的求解工作量很大, 而且在实际应用中, 该方程组常常是病态的, 给系数求解带来不少困难. 但如果 Φ 是一个离散正交函数系, 即

$$\langle \varphi_n, \varphi_m \rangle \begin{cases} = 0, & (n \neq m), \\ \neq 0, & (n = m), \end{cases} \quad (2.4)$$

那么 a_m 的求解就特别方便. 由 (2.3) 式立即可得

$$a_m = \langle f_k, \varphi_m \rangle / \langle \varphi_m, \varphi_m \rangle. \quad (2.5)$$

于是局部拟合函数为

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_m a_m \varphi_m(x) = \sum_m \left[\frac{\sum_i f(x_{k+i}) \varphi_m(x_i)}{\sum_i \varphi_m^2(x_i)} \right] \varphi_m(x) \\ &= \sum_i f(x_{k+i}) \left[\frac{\sum_m \varphi_m(x_i) \varphi_m(x)}{\sum_i \varphi_m^2(x_i)} \right]. \end{aligned} \quad (2.6)$$

当 $x = 0$ 时, $g(0)$ 就是局部拟合区域 D 的中心 x_k 处的最小二乘拟合值, 把它作为原观测数据 $f(x_k)$ 的近似值显然是合理的, 记作 $u(x_k)$:

$$u(x_k) = g(0) = \sum_i f(x_{k+i}) \left[\frac{\sum_m \varphi_m(x_i) \varphi_m(0)}{\sum_i \varphi_m^2(x_i)} \right].$$

$$\text{令} \quad h_0(x_k) = \sum_m \varphi_m(x_{-k}) \varphi_m(0) / \sum_i \varphi_m^2(x_i), \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \text{则} \quad u(x_k) &= \sum_i f(x_{k+i}) h_0(x_{-i}) = \sum_i f(x_{k-i}) h_0(x_i) \\ &= f(x_k) * h_0(x_k). \end{aligned} \quad (2.8)$$

上式表明, 在任一点 x_k , 对原始数据进行局部最小二乘拟合的结果可以表示成为卷积的形式, 从而使计算效率大大提高, 卷积核 $h_0(x_k)$ 由基函数 φ_m 的线性组合而构成. 类似

的,由(2.6)式可以推得:最小二乘拟合值的 s 阶导数也可由卷积完成,相应的卷积核为

$$h_s(x_k) = \sum_m \varphi_m(x_{-k}) \varphi_m^{(s)}(0) / \sum_i \varphi_m^2(x_i). \quad (2.9)$$

关于基函数系 Φ ,最常用的就是多项式 x^m ,因为它具有数学运算上的一些优良特性,其四则运算、微分、积分等仍为多项式,在应用中带来不少便利,而且它可以一致逼近任意连续函数^[4].

选定基函数系 $\{x^m\}$,然后可由方程组^[5]:

$$\begin{cases} \varphi_0(x) = 1, \\ \varphi_1(x) = x + c_{10}\varphi_0(x), \\ \dots\dots\dots \\ \varphi_m(x) = x^m + c_{m,m-1}\varphi_{m-1}(x) + \dots + c_{m0}\varphi_0(x), \end{cases} \quad (2.10)$$

根据正交化条件,可用递推方法逐个求解出各系数 c_{ij} ,使 $\{\varphi_m(x)\}$ 成为正交多项式函数系.当取 $x_i = i$,且 x_i 属于对称的离散指标集 R 时(即 $x \in R$ 时,有一 $-x_i \in R$), $\{\varphi_m(x)\}$ 的头几项为^[3]

$$\begin{cases} \varphi_0(x) = 1, \\ \varphi_1(x) = x, \\ \varphi_2(x) = x^2 - \mu_2/\mu_0, \\ \varphi_3(x) = x^3 - (\mu_4/\mu_2)x, \\ \varphi_4(x) = x^4 + [(\mu_2\mu_4 - \mu_0\mu_6)x^2 + (\mu_2\mu_6 - \mu_4^2)]/(\mu_0\mu_4 - \mu_2^2), \end{cases} \quad (2.11)$$

其中, $\mu_k = \sum_{x_i \in R} x_i^k$.

例1.当 $x \in [-2, 2]$ 时, $R = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$,取(2.11)中的前4项,有:

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= 1, & \varphi_1(x) &= x, \\ \varphi_2(x) &= x^2 - 2, & \varphi_3(x) &= x^3 - (17/5)x. \end{aligned}$$

于是求解局部最小二乘拟合值的卷积核为

$$\begin{aligned} h_0(x_k) &= \sum_m \varphi_m(x_{-k}) \varphi_m(0) / \sum_i \varphi_m^2(x_i) \\ &= \varphi_0(x_{-k}) \varphi_0(0) / \sum_i \varphi_0^2(x_i) + \varphi_2(x_{-k}) \varphi_2(0) / \sum_i \varphi_2^2(x_i) \\ &= \{(1, 1, 1, 1, 1)/5\} + \{(2, -1, -2, -1, 2)(-2/14)\} \\ &= \{(-3, 12, 17, 12, -3)/35\}. \end{aligned}$$

相应的,对应于最小二乘拟合值导数的卷积核为

$$\begin{aligned} h_1(x_k) &= \sum_m \varphi_m(x_{-k}) \varphi_m'(0) / \sum_i \varphi_m^2(x_i) = \{(-1, 8, 0, -8, 1)/12\}, \\ h_2(x_k) &= \sum_m \varphi_m(x_{-k}) \varphi_m''(0) / \sum_i \varphi_m^2(x_i) = \{(2, -1, -2, -1, 2)/7\}. \end{aligned}$$

二维情况下有完全类似的结果.

定义2.设有离散数据 $\{(x_i, y_j), f(x_i, y_j)\}$, $i, j = 0, 1, \dots$, 和定义在对称区间

$D \times D$ 上的二维连续基函数系 $\Phi \times \Phi$, 在以 (x_k, y_l) 为中心的区域 $D \times D$ 上, 如果存在一组系数 $\{a_{mn}\}$, $m = 0, 1, \dots, M-1$, $n = 0, 1, \dots, N-1$, 使得下式有最小值:

$$\varepsilon = \sum_i \sum_j [g(x_i, y_i) - f(x_{k+i}, y_{l+i})]^2, \quad (2.12)$$

其中,
$$g(x, y) = \sum_m \sum_n a_{mn} \varphi_{mn}(x, y), \quad \varphi_{mn} \in \Phi \times \Phi, \quad (2.13)$$

则称 $g(x, y)$ 是在以 (x_k, y_l) 为中心的区域 $D \times D$ 上对 $\{(x_i, y_i), f(x_i, y_i)\}$ 的局部最小均方误差拟合函数, 或局部最小二乘拟合曲面.

二维基函数系 $\Phi \times \Phi$ 可由一维正交函数的张量积构成:

$$\varphi_{mn}(x, y) = \varphi_m(x) \varphi_n(y), \quad \varphi_m, \varphi_n \in \Phi, \quad \varphi_{mn} \in \Phi \times \Phi. \quad (2.14)$$

容易证明, 这样构成的 $\{\varphi_{mn}(x, y)\}$ 满足正交条件:

$$\langle \varphi_{kl}, \varphi_{mn} \rangle = \sum_i \sum_j \varphi_{kl}(x_i, y_j) \varphi_{mn}(x_i, y_j) \begin{cases} = 0, & (k \neq m \text{ 或 } l \neq n), \\ \neq 0, & (k = m \text{ 且 } l = n), \end{cases} \quad (2.15)$$

这时拟合系数 a_{mn} 为

$$a_{mn} = \langle f_{kl}, \varphi_{mn} \rangle / \langle \varphi_{mn}, \varphi_{mn} \rangle. \quad (2.16)$$

把它代入拟合函数 $g(x, y)$ 中, 交换求和顺序, 令 $x = y = 0$, 就得到在 (x_k, y_l) 点处的局部最小二乘拟合值 $u(x_k, y_l)$:

$$u(x_k, y_l) = f(x_k, y_l) * h_{00}(x_k, y_l). \quad (2.17)$$

其中,

$$h_{00}(x_k, y_l) = \left[\sum_m \varphi_m(x_{-k}) \varphi_m(0) / \sum_i \varphi_m^2(x_i) \right] \cdot \left[\sum_n \varphi_n(x_{-l}) \varphi_n(0) / \sum_j \varphi_n^2(x_j) \right] = h_0(x) h_0(y). \quad (2.18)$$

可见二维卷积核可由一维卷积核的张量积构成. 类似的, 最小二乘拟合的 $s + t$ 阶偏导数也可由卷积实现, 卷积核为

$$h_{st}(x_k, y_l) = h_s(x_k) h_t(y_l). \quad (2.19)$$

2. 图象边缘点检测

对数字图象中的任一点, 都可以用局部曲面拟合得到它的拟合值及其各阶偏导数, 然后根据数学分析的方法提取它的特征. 对边缘点, 可以设想用一个平面沿该点梯度方向与图象平面垂直相交, 得到一条平面曲线, 该曲线的二阶导数过零点就是边缘点.

设 α 为与 x 轴逆时针方向的夹角, 该方向上 $f(x, y)$ 的一阶导数为

$$f'_\alpha(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \alpha. \quad (2.20)$$

用 f'_α 代入上式, 就得到 α 方向上的二阶导数:

$$f''_\alpha(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cos^2 \alpha + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \sin \alpha \cos \alpha + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \sin^2 \alpha. \quad (2.21)$$

当 α 为梯度方向时:

$$\cos \alpha = \frac{\partial f}{\partial x} / \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}, \quad \sin \alpha = \frac{\partial f}{\partial y} / \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}.$$

于是,在梯度方向的二阶导数为

$$f''_{\alpha}(x, y) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \right] / \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \right] \quad (2.22)$$

对任意一点 (x, y) , 如果 $f''_{\alpha}(x, y) = 0$, 并且在 α 方向上与 (x, y) 相邻的前后两个点的 f'_{α} 异号, 那么该点就判定为边缘点. 对于数字图象, 可把 α 近似为水平、垂直和对角线四个方向, 取 (x, y) 的两个八邻域点, 进行 f'_{α} 的过零判定.

三、二维卷积的分解算法

局部曲面拟合可用二维卷积实现, 它可以分解为两次一维卷积, 使计算量进一步下降^[6](以下设变量 x, y 均已离散化).

设输入图象 $f(x, y)$ 为 $N \times N$ 大小, 二维卷积核 $h(x, y)$ 为 $M \times M$ 大小, 于是二维卷积

$$g(x, y) = \sum_i \sum_j f(i, j) h(x - i, y - j) \quad (3.1)$$

的乘法次数约为 $M^2 N^2$. 而由 (2.18) 式: $h(x, y) = h(x)h(y)$, 上式可写成:

$$g(x, y) = \sum_i c(i, y) h(x - i), \quad (3.2)$$

其中

$$c(i, y) = \sum_j f(i, j) h(y - j).$$

上式表明, 利用 $h(x, y)$ 的可分解性, 可以首先在 y 方向上用 $h(y)$ 对 $f(x, y)$ 进行一维卷积, 得到一个中间结果 $c(x, y)$, 然后用 $h(x)$ 对其进行 x 方向上的一维卷积, 就可完成二维卷积. 这时总的乘法次数约为 $2MN^2$, 对每个象素而言, 乘法次数由 M^2 降为 $2M$. 如果利用 $h(x)$ 的对称性, 还可进一步使乘法次数减少一半左右.

由 (3.2) 式进行卷积, 需占用 $N \times N$ 大小的空间存放中间结果. 实际上, 合理安排计算顺序, 可使缓冲区减少为 $N \times 1$ 大小, 而计算量不变. 由 (3.2) 式, 当 $y = y_0$ 时, 有:

$$g(x, y_0) = \sum_i c(i, y_0) h(x - i), \quad c(i, y_0) = \sum_j f(i, j) h(y_0 - j).$$

上式表明, 可以采用分解方法每次分别求得卷积结果的每一列值 $g(x, y_0)$, 而无需将 $N \times N$ 阵作为整体处理. 这时的缓冲区 $c(i, y_0)$ 仅为 $N \times 1$ 大小, 使内存需要量大大减少. 求解二阶方向导数时, 为求解各次偏导数, 要进行 5 个二维卷积, 它们都可以分解为一维卷积, 计算过程中, 内存缓冲区总计为 $N \times 5$ 大小.

四、实 验

由二阶导数变化进行边缘检测,所以多项式拟合函数应具有二阶连续偏导数,可以选择三阶正交多项式组成基函数系,进而得到各个相应的卷积核。

图 1 中两幅实验图象均为 120×120 大小,圆环可用于检查算法对不同方向的边缘

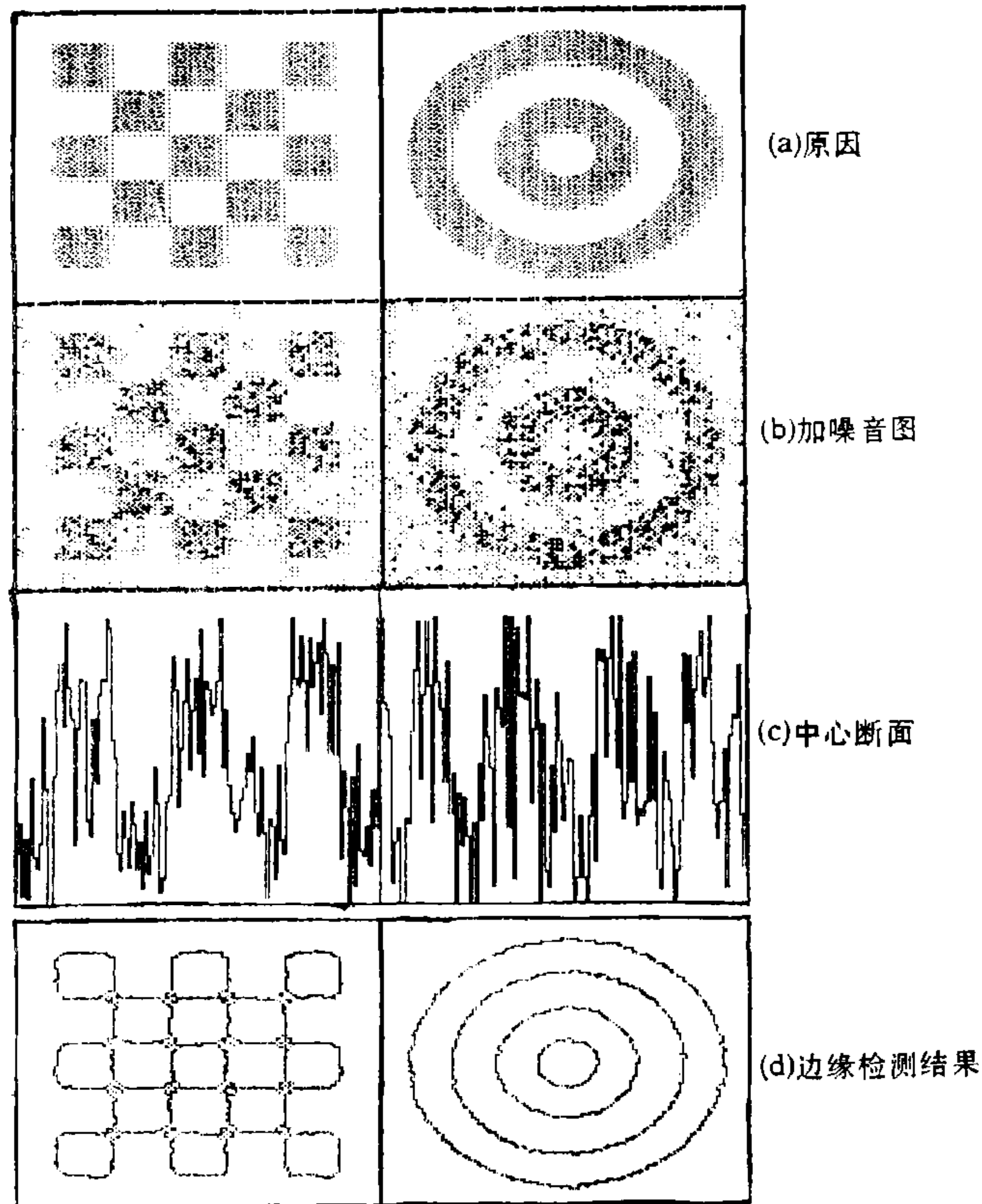


图 1 实验一

检测效果,二值图灰度分别为 78 和 178,棋盘格和圆环上分别叠加了 $\sigma = 50$ 和 $\sigma = 70$ 的零均值正态分布噪声。对棋盘格和圆环分别采用了 9×9 和 11×11 窗口进行了边缘检测,边缘线连续且只有一个象素宽度,具有良好的噪音抑制性能。处理时间为 $2'31''$ 和 $2'56''$ 。

图 2 是应用 7×7 窗口对于立体视觉研究中的积木块进行边缘检测的结果,原图为 256×256 大小,处理时间为 $9'23''$ 。因为边缘线连续且定位较准,非常有利于立体匹配。

采用传统的梯度阈值法进行边缘检测的结果示于图 3。在应用梯度算子之前,分别对原图用 3×3 或 7×7 窗口进行平滑,以抑制噪声。平滑窗口大,则边缘线太粗,不利于边缘定位;平滑窗口小,噪音影响又很大,而且边缘检测效果与梯度阈值有关。

各实验均在 IBM-PC/XT 微机上进行,打印机输出图象灰度为 4 级。

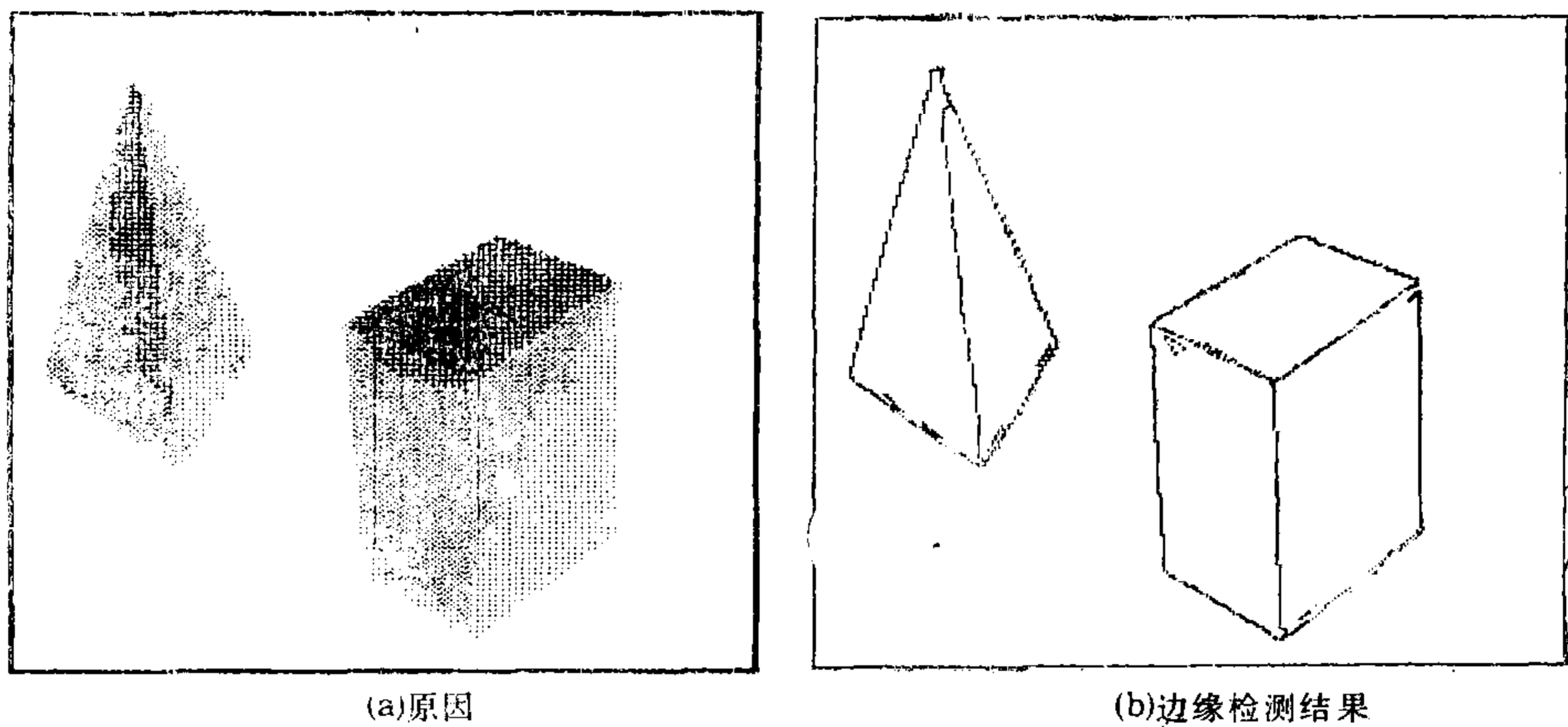


图 2 实验二

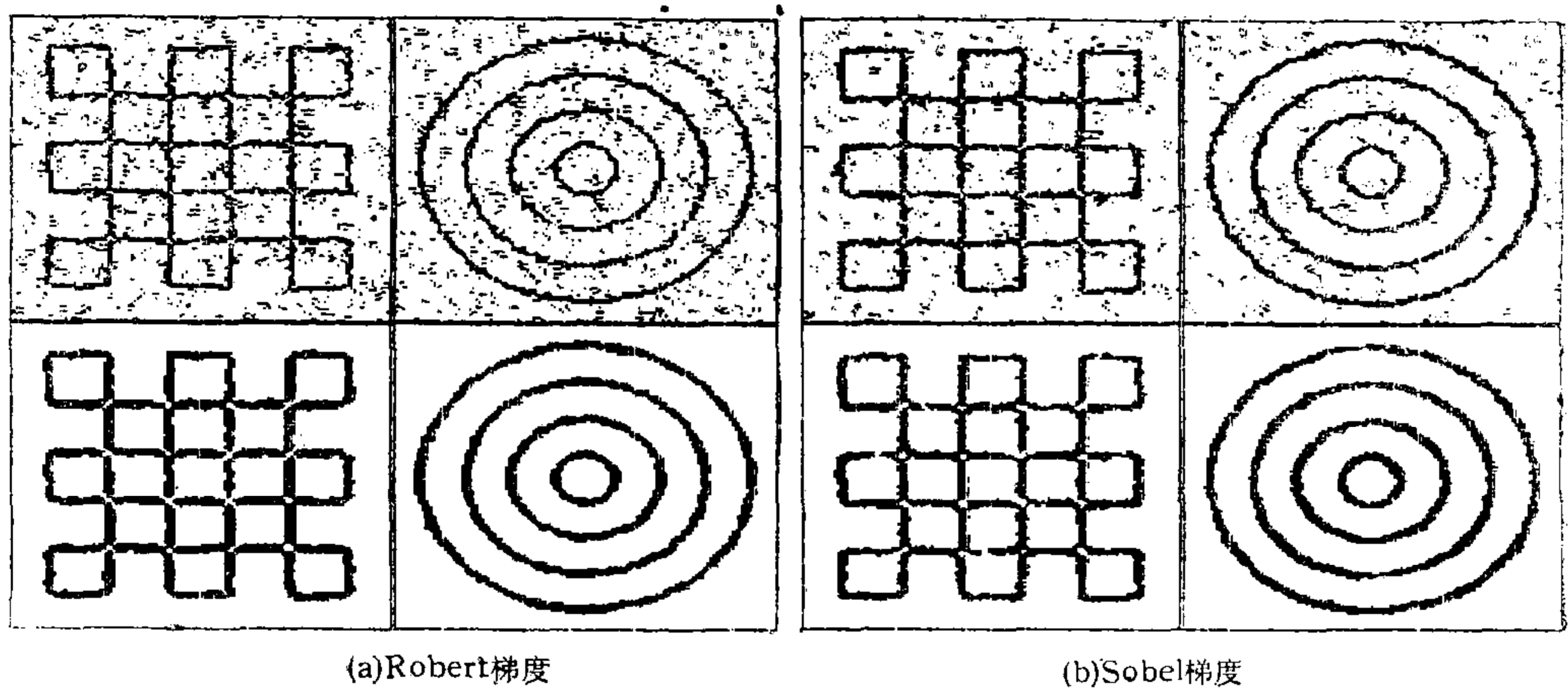


图 3 实验三

五、结 语

人们已经从不同角度出发,提出了许多边缘检测方法.在早期,算子窗口较小,很少有超过 7×7 的,边缘检测效果欠佳.80年代初, Marr 和 Hildreth 提出的 $\nabla^2 G$ 算子具有优良特性,但是窗口非常大,常可达 30×30 以上,运算量十分可观^[4].本文中介绍的方法可在窗口较小的情况下,有效地提取图象边缘,且可很好地抑制噪声.由于将多项式正交化,进而将局部曲面拟合转化为两次一维卷积,使计算效率大大提高,比 Haralick 的方法有很大改进^[3].合理安排了计算顺序,内存需要量也不大,便于在微机上实现.

曲面拟合的概念是一个很好的图象模型,由于多项式对连续函数有一致逼近特性,所以本文中的边缘提取方法有比较广泛的适用范围.理论和实践已经证明,高阶多项式作为逼近函数的特性不如低阶多项式^[4],所以选用三阶多项式构成基函数系是合理的.当

然,有些图象本身的特性决定了选用其它基函数,可能会有更好的逼近性能。

参 考 文 献

- [1] Marr, D and Hildreth, E. C., Theory of Edge Detection, Proc. R. Soc. London, **B 207** (1980), 187—217.
- [2] Haralick, R. M., Edge and Region Analysis for Digital Image Data, CGIP, 12(1980), 60—73.
- [3] Haralick, R. M., Step Edges from Zero Crossing of Second Directional Derivatives, *IEEE Trans. PAMI-6* (1984), 58—68.
- [4] 孙家昶,样条函数与计算几何,科学出版社,1982,22—33.
- [5] 武汉大学,山东大学计算数学研究室,计算方法,人民教育出版社,1979,138—142.
- [6] Wiejak, J. S., Convolution with Separable Masks for Early Image Processing, CVGIP, 32 (1985), 279—290.

EDGE DETECTION FROM SURFACE FITTING BY ORTHOGONAL POLYNOMIAL

JIANG HANGYI CAI YUANLONG

(Xi'an Jiaotong University)

ABSTRACT

A method for image edge detection using facet model is presented. The surface fitting functional consists of the tensor product of one-dimensional orthogonal polynomial with order up to three. The edge point is defined as zero crossing of the second derivative taken in the direction of the largest gradient at the point. It is proved that: based on the orthogonal polynomial, the fitted image and its n th partial derivative can be obtained by two-dimensional convolution which can be realized as two successive one-dimensional convolutions, thus the amount of operations is largely reduced. Experiments show that, compared with traditional operators, this method reveals good properties of noise attenuation and edges location.

Key words ——Image processing; edge detection; surface fitting; computer vision.