第16卷 第3期 自 动 化 学 报 Vol. 16, No. 3
1990 年 5 月 ACTA AUTOMATICA SINICA May, 1990

基于可观概念的系统故障可测性研究

李 艳 童诗白
(清 华 大 学)

摘 要

在动态系统故障诊断中，如何选择测试位置是一个非常重要的问题，它是系统可测性设计的重要内容．本文从系统可观的概念出发，对此问题作了研究． 研究结果表明：最差的可测性是在对应于观测阵的最小特征值的特征向量方向上．在这一方向上增加测试，可在最大程度上改善系统的可测性能．最佳可测性对应于观测阵的所有特征值均相等．文中还就如何利用上述结论解决模拟电路故障诊断的测试点优选问题作了讨论，并给出了例证．

关键词——故障诊断，可测性，动态系统．

一、引 言

在生产和技术高度发展的今天，人们对各类精密、复杂系统的高效运行提出了新的要求；不但希望能对其实施良好的控制，而且希望能进行实时监控，以便及时排除故障，这就提出了动态系统的故障检测与诊断问题．然而随着控制系统复杂程度的不断增加，使得测试与诊断的困难也愈为突出[1]． 如何在系统设计时同时考虑控制作用及可测试性已成为当今自动控制领域中许多学者和研究人员关注的问题． 本文从系统可观性概念出发，通过研究观测阵各列向量间的相关关系，探讨如何通过测试位置优选来改善系统的可测性．

文中首先给出了系统可测性定义及条件，然后探讨使系统具有最佳可测性的条件，给出了最佳可测性判据及测试点优选准则．最后对模拟电路故障诊断的测试点优选作了讨论，并给出了例证．

二、系统描述及可测性

可测性是系统的一种属性，它表征系统在一定有效激励下，由系统输出以及特定的测试点可唯一确定故障状态的难易程度[2]．

设线性动态系统的状态描述为

$$\dot{x} = Ax + f, \tag{1}$$

本文于 1988 年 1 月 7 日收到．

其中 $\boldsymbol{x}$ 为 n 维状态向量，A 是 $n\times n$ 系数阵，$\boldsymbol{f}$ 是驱动函数.

观测方程采用线性模型

$$\boldsymbol{z}=H\boldsymbol{x}, \tag{2}$$

$\boldsymbol{z}$ 是 m 维观测向量，H 是 $m\times n$ 测量阵.

定义 1. 称一个系统在 t_0 时刻是故障状态可测的，当且仅当系统在 t_0 时刻的状态 $\boldsymbol{x}_0$ 可通过系统状态方程及观测向量 $\boldsymbol{z}$ 唯一确定.

由系统故障可测性定义可推知，故障可测性条件等价于系统可观性条件.

不失一般性，考虑稳态系统，则 $A=0$，$Q=H^T$. 通过在向量空间讨论观测阵 Q 的列向量间的相关关系，可以看到观测阵各列向量间的相关程度影响系统可测性的好坏. 当观测阵 Q 的所有列向量充满 n 维空间时，系统具有最佳的可测性能.

三、测试向量优选及最佳可测性判据

已指出，在垂直于 Q 的所有列向量的方向上所包含的有用信息量最大[3]. 欲想最大限度地提高系统的可测性，所增加的测试应尽可能垂直于观测阵 Q 的所有列向量.

把观测阵 Q 的 m 个列归一化为

$$Q_n=(\boldsymbol{w}_1\ \ \boldsymbol{w}_2\cdots\boldsymbol{w}_m) \tag{3}$$

定义 2. 欲增加的最优测试向量 $\boldsymbol{u}$，定义为使它与 Q_n 的所有列的内积的平方和取最小值的那个向量.

定理 1. 对任一个系统，最佳测试向量 $\boldsymbol{u}$ 是对应于矩阵 $Q_nQ_n^T$ 的最小特征值的特征向量.

证明. 由定义 2 可知，$\boldsymbol{u}$ 与 Q_n 的各列向量的内积的平方和取最小值. 定义目标函数:

$$\begin{aligned}\min L&=(\boldsymbol{w}_1^T\boldsymbol{u}_1)^T(\boldsymbol{w}_1^T\boldsymbol{u}_1)+(\boldsymbol{w}_2^T\boldsymbol{u}_2)^T(\boldsymbol{w}_2^T\boldsymbol{u}_2)+\cdots+(\boldsymbol{w}_m^T\boldsymbol{u}_m)^T(\boldsymbol{w}_m\boldsymbol{u}_m)\\&=\boldsymbol{u}^T(\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{w}_1^T+\boldsymbol{w}_2\boldsymbol{w}_2^T+\cdots+\boldsymbol{w}_m\boldsymbol{w}_m^T)\boldsymbol{u}.\end{aligned} \tag{4}$$

由(3)式可使(4)式简化为

$$\min L=\boldsymbol{u}^TQ_nQ_n^T\boldsymbol{u}, \tag{5}$$

利用拉格朗日函数对 L 求最优解，并通过元素运算，可得

$$(Q_nQ_n^T-\lambda U)\boldsymbol{u}=0, \tag{6}$$

U 是单位阵. 当且仅当 $\mathrm{Det}\,(Q_nQ_n^T-\lambda U)=0$ 时，$\boldsymbol{u}$ 有非零解，它对应的 n 个根是矩阵 $Q_nQ_n^T$ 的 n 个特征值.

对任一特征值 λ_i，(6) 式至少有一个非零解 $\boldsymbol{u}$，这样的解实际上就是对应于 $Q_nQ_n^T$ 的特征值 λ_i 的特征向量.

设 $\boldsymbol{v}_i$ 是方程(6)对应于特征值 λ_i 的特征向量，代入(5)式有:

$$\min L=\boldsymbol{v}_i^TQ_nQ_n^T\boldsymbol{v}_i. \tag{7}$$

把(6)式代入(7)式，得

$$\min L=\boldsymbol{v}_i^T\lambda_iU\boldsymbol{v}_i=\lambda_i\boldsymbol{v}_i^T\boldsymbol{v}_i=\lambda_i. \tag{8}$$

要使 L 取最小值，则 λ_i 应是最小特征值 $\lambda_{\min}$.　　证毕.

如找不到向量 $\boldsymbol{u}$，则说明 Q 的列向量充满了整个 n 维空间，系统具有最佳的可测性。

定义 3. 最佳可测性定义为系统的观测阵 Q_n 的各列向量相互垂直。

定理 2. 系统具有最佳可测性的充要条件为：可观性 $Q_nQ_n^T$ 的所有特征值均相等。

证明. 由定义 3 知，最佳可测性情况下，找不到一个最优测试向量 $\boldsymbol{u}$，则定理 2 证明中定义的目标函数 L 的最优解不存在，即 L 不存在最小值. 由(8)式 $L=\lambda_i$ 可知，当所有的 λ_i 均相等时，L 为一常数，其最小值不存在，证毕.

如果对两组测试比较，则接近最佳情况的那组测试包含的信息量大. 零特征值表明不可测，应在这一方向上增加测试.

四、模拟电路故障诊断的测试点选择

考虑稳态系统，其观测方程为

$$\boldsymbol{z}=H\boldsymbol{x}. \tag{9}$$

实际上，这时的观测阵 $Q=H^T$ 是一个转移阵，它反映的是电路内部状态转移到输出测量上的信息状况. 如何使系统具有良好的可测性能，实际上就是如何选择测试位置，构造具有良好性能的观测阵，从而可在外部测试 $\boldsymbol{z}$ 上反映出内部状态 $\boldsymbol{x}$ 的信息量最大.

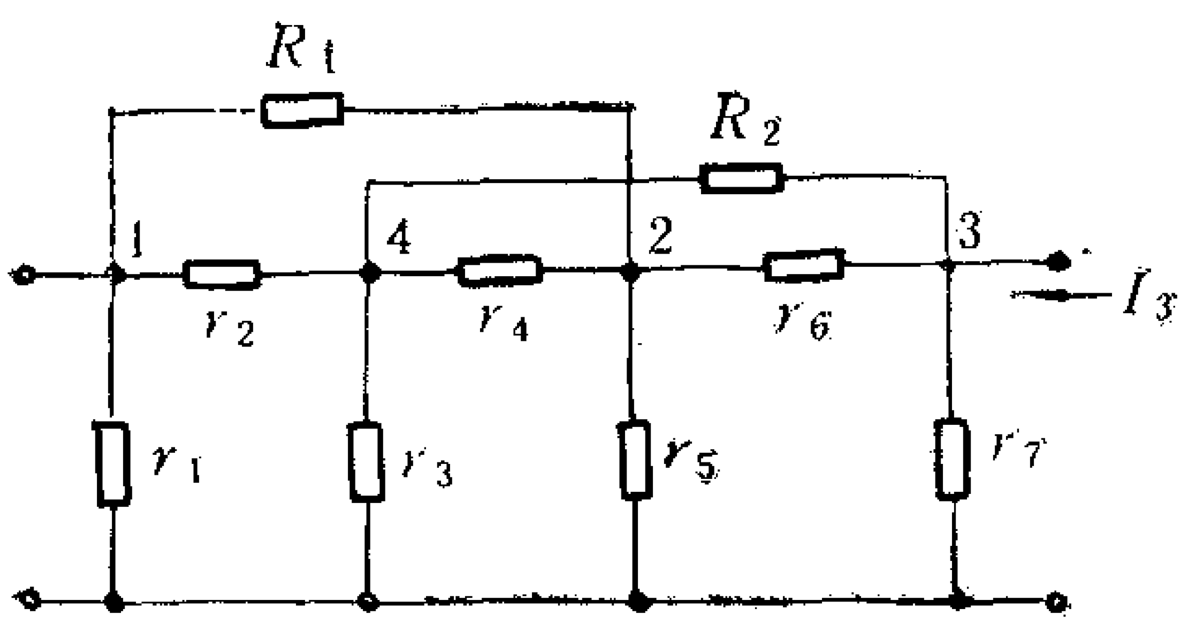

图 1 双 T 电路

在进行电路可测性设计时，可首先选择一组测试，对其观测阵进行分析和计算，与理想情况进行比较，并通过在最小特征值对应的特征向量上增加测试，最大可能地改善系统的可测性. 此过程反复进行，直至得到满意的结果.

例. 考虑图 1 所示电路，$r_i=1\Omega$ $(i=1,7)$，$R_1=1\Omega$，$R_2=2\Omega$，待估状态为 $\boldsymbol{x}=[V_2V_4]^T$.

(1) 以 V_1、V_3 为观测量 $\boldsymbol{z}$，观测方程如下：

$$\begin{bmatrix}V_1\\V_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}H_{11}&H_{12}\\H_{21}&H_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_2\\V_4\end{bmatrix},$$

代入电路参数得：

$$Q_nQ_n^T=\begin{bmatrix}1.2697&0.8991\\0.8991&0.7303\end{bmatrix},$$

对应其最小特征值 $\lambda=0.0614$ 的特征向量 $\boldsymbol{v}_\lambda=[1,-1.34]^T$. 欲最大可能地提高可测性，应尽可能在靠近 $\boldsymbol{v}_\lambda$ 的方向上增加测试.

(2) 增加测量 I_3，待估状态不变，则观测向量为 $\boldsymbol{z}=[V_1\ V_3\ I_3]^T$，观测方程为

$$\begin{bmatrix}V_1\\V_3\\I_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}H_{11}&H_{12}\\H_{21}&H_{22}\\H_{31}&H_{32}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_2\\V_4\end{bmatrix}.$$

$Q_nQ_n^T$ 的最小特征值 $\lambda=0.1276$，比第一种情况时的 $\lambda=0.0614$ 大有改善.

若 $R_1 = R_2 = 1\Omega$，如选 $[V_1\ V_3]^T$ 为测量向量，则对应于 $Q_n Q_n^T$ 的最小特征值 $\lambda = 0$，这说明在 $\lambda = 0$ 对应的特征向量方向上可测性缺乏，增加测量 I_3 后，最小特征值 $\lambda = 0.0323$，从而使系统由不可测临界状态进入了可测状态.

可见，系统的可测性不仅取决于所选测试相对于待估状态的位置，而且与系统本身的参数有关. 可测性是系统本身的属性，由系统的结构、参数及测试位置完全决定，与具体的测量值及诊断方法无关.

结　　论

通过系统可测性分析，可在设计时把测试位置的优选考虑在内，使所设计的系统具有良好的可测性，从而使以后的诊断更容易实现. 本文提出的测试点优选方法可保证所选出的测试集是最佳的，且选择步骤最少.

参　考　文　献

[1] 叶银忠，潘日芳，蒋慰孙，动态系统的故障检测与诊断(综述)，信息与控制，1985，No.6，27—34.

[2] Huang Z. F., Lin C. S. and Liu R. W., Node-Fault Diagnosis and a Design of Testability, *IEEE Trans. Circuits and Systems*, **CAS-30** (1983), 257—265.

[3] Wu C. C., Test Point Selection Methods for the Seif-Testing Based Analogue Fault Diagnosis System, *IEE Proceedings*, Pt. **G-132** (1985), 173—183.

SYSTEM FAULTS TESTABILITY BASED ON OBSERVABAL CONCEPT

LI YAN　　TONG SHIBAI

(*Tsinghua University*)

ABSTRACT

How to determine the best test-points in faults diagnosis of dynamical systems is a very important problem and it is the main content of testability design. This paper solves this problem by showing that the poorest testability is in the direction of eigenvector associated with the smallest eigenvalue of observability matrix. Added new tests in this direction are shown to improve the testability, and the best possible testability is that all eigenvalues are equal. An example is given to illustrate how to select the test-points in faults diagnosis of analog circuits.

Key words ——Fault diagnosis; testability; dynamic systems.