第16卷 第3期　　自 动 化 学 报　　Vol. 16, No. 3
1990年5月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　May, 1990

广义系统能控性的几个注记

杨成梧　谭华林
(华东工学院)

摘　要

本文首先给出了广义系统能控性与正常系统能控性的关系，并由此讨论了广义系统最优经济结构综合问题及能控性程度的度量形式．最后给出了工程算例．

关键词——广义系统，能控性，最优经济结构综合．

一、能　控　性

广义系统主要有如下几种能控性[1],[2]：C-能控，强能控，R-能控和脉冲能控．其中R-能控反映广义系统标准分解[2]中慢子系统（正常系统）的能控性．C-能控在定义上与正常系统相似，反映了广义系统的状态点任意转移的能力，而强能控就是R-能控加上脉冲能控．文[3]已证明，C-能控与强能控的差别仅仅在于系统中是否含有能被“压缩”掉的非动态变量，而且直观上，C-能控性的物理涵义也最为清晰，因此把具有工程价值的概念建立在C-能控性上是合理的．

考察线性时不变广义系统

$$E\dot{x} = Ax + Bu, \tag{1}$$

其中E为奇异方阵．设系统(1)正则，即 $\det(sE + A) \neq 0$．选μ使 $\det(\mu E + A) \neq 0$，对系统(1)作 Pandolfi 变换：

$$z(t) = x(t)\exp(\mu t), \tag{2}$$

则得二系统：

$$\bar{E}\dot{z} = z + \bar{B}v, \tag{3}$$

$$\dot{z} = \bar{E}z + \bar{B}v. \tag{4}$$

其中 $\bar{E} = (\mu E + A)^{-1}E$，$\bar{B} = (\mu E + A)^{-1}B$，$v = u\exp(\mu t)$．称系统(3)和系统(4)互为传递函数对偶．

定理 1. Pandolfi 变换保持系统C-能控性不变．

定理 2. 广义系统(3) C-能控的充要条件是正常系统(4)完全能控．

上述定理的证明参见文献[3]．由此二定理立即可得：

推论 1. 广义系统(1)中C-能控的充要条件是正常系统(4)完全能控．

推论1能方便地通过熟知的正常系统能控性判据来判定广义系统是否C-能控．

本文于1987年12月29日收到．

二、最优经济结构综合问题

为阐述能控性及能观性的实用价值，文[4]提出了正常系统最优经济结构综合问题，即在给定的技术性能指标下，设计和建造一个控制系统，使其经济代价的目标函数取最小值．这个问题提出后，很快引起了广泛的研究，并产生了在造纸工业中取得较好经济效果的应用实例．

由于广义系统模型具有广泛的工程背景，最优经济结构综合问题在广义系统中尤为重要，因此采用研究正常系统的有关手段来考察广义系统

$$\begin{cases} E\dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx, \end{cases} \tag{7}$$

把与状态 x 有关的系数阵 E、A 称为控制对象，与输入 u（控制）有关的矩阵 B 称为控制机构，而与输出 y 有关的矩阵 C 称为观测机构．以 C-能控性为技术约束，以控制机构的投资为经济指标，则广义系统的最优经济结构综合问题可归纳为：给定矩阵 E、A，求矩阵 B 使系统(1) C-能控，且使 B 具有最少的列数及最少的非零元．

根据推论 1，利用文[5]的有关结论可得：

定理 3. 1）广义系统最优经济结构综合问题必有解；

2）解矩阵 B 的列数是矩阵 $\bar{E}$ 的循环指数；

3）解矩阵 B 的每一行最多只能有一个非零元．

三、能控性程度

与稳定性的讨论一样，有时不仅需要知道一个系统是否能控，还需要知道它在多大程度上能控，即在系统运行过程中对系统状态按一定意图进行控制的可能性和难易程度的大小．从下节可以看出，能控性程度的概念对广义系统极有意义，关键在于提出能控性程度的合适的度量表达式．由推论 1，可把正常系统（4）的一些熟知的能控性程度的度量式，作为广义系统(1)的 C-能控性程度的度量式，因此，记

$$Q = (\bar{B}, \bar{E}\bar{B}, \cdots, \bar{E}^{n-1}\bar{B}), \tag{8}$$

$$\varphi = \det(QQ^T), \tag{9}$$

$$\varphi_s = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \lambda_i^{-s}\right)^{1/s}}. \tag{10}$$

其中 $\lambda_i(\lambda = 1, 2, \cdots, n)$ 为矩阵 QQ^T 的 n 个正特征值．这样，系统(1)的能控性程度由表达式(9)或(10)给出．

四、实　例

文[6]讨论了一个在电力系统中出现的广义系统模型，其方程为

$$M\ddot{x}+C\dot{x}+Kx=f, \tag{11}$$

或

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & I \\ -K & -C \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ f \end{bmatrix}. \tag{11'}$$

其中 M、C、K 是 n 阶方阵且 M 奇异，f 是矢量函数，状态 x 表示发电机转子速度的扰动和发电机相对于同步参考机的角偏差，而 $y=\dot{x}$. 这里，广义系统(12)的 C-能控性及最优经济结构综合问题和能控性程度都具有很清晰的物理涵义. C-能控即是可通过控制使有关的扰动和偏差及其变化率趋于最小，能控性程度度量表达了实现这一目标的难易程度，而最优经济结构综合问题则反映怎样用最少的投资达到这个目标.

为具体说明有关计算步骤，不妨取

$$M=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\quad K=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=-M+0\cdot K,$$

并设 $f=B_1u$, B_1 为 $2\times r$ 阶矩阵. 这里，

$$E=\begin{bmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&0 \end{bmatrix},\quad A=\begin{bmatrix} 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \\ 0&0&1&0 \\ 0&1&0&0 \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} 0 \\ B_1 \end{bmatrix}_{4\times r}.$$

由于 $\det(sE+A)=-s(s+1)$，故只须取 $\mu\neq 0$ 且 $\mu=-1$ 即可. 计算可得:

$$(\mu E+A)^{-1}=\begin{bmatrix} 1/\mu & 0 & -1/\mu(\mu+1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/(\mu+1) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\mu \end{bmatrix},$$

故有

$$\left.\begin{aligned} &(\mu E+A)^{-1}E=\bar{E}=\begin{bmatrix} 1/\mu & 0 & -1/\mu(\mu+1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/(\mu+1) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ &(\mu E+A)^{-1}B=\bar{B}=\begin{bmatrix} -b_1/\mu(\mu+1) \\ b_2 \\ b_1/(\mu+1) \\ -\mu b_2 \end{bmatrix},\quad B_1=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}_{2\times r}. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

矩阵 M 的循环指数 k 为

$$k=\max\{\dim[\operatorname{Ker}(M-\lambda I)]:\lambda\in\sigma(M)\}, \tag{13}$$

由此可得 $\bar{E}$ 的循环指数为 $k=1$，从而 B_1 的最小列数为 1，即(12)式中 $r=1$. 作为正常系统

$$\dot{z}=\bar{E}z+\bar{B}v \tag{14}$$

的最优经济结构综合问题的解，$\bar{B}$ 中第二和第三个元素不为零，从而知 $b_1\neq 0$, $b_2\neq 0$.

在上述讨论的基础上，还可以得到具有最大能控性程度的系统的问题. 对系统(11)，这相当于求关于 b_1、b_2 的代数式

$$\varphi = \det[(\bar{B}, \bar{E}\bar{B}, \bar{B}^2\bar{B}, \bar{E}^3\bar{B})(\bar{B}, \bar{E}\bar{B}, \bar{E}^2\bar{B}, \bar{E}^3\bar{B})^T] \tag{15}$$

在约束条件 $b_1b_2 \neq 0$ 及由实际问题中对 b_1、b_2 提出的进一步约束(如$\|B_1\| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2} \leqslant 1$ 等)下的极大值的问题.

参 考 文 献

[1] 许可康，奇异系统的能控性，系统科学与数学，**7**(1987)，1，第 23 页.

[2] 王朝珠，戴立意，广义动态系统，控制理论与应用，**3**(1986)，1，第 2 页.

[3] 杨成梧，谭华林，广义系统中的非动态变量，控制理论与应用，**6**(1989)，4，第 96 页.

[4] 涂序彦，可控性、可观性的实用价值与最优经济结构综合问题，全国控制理论与应用学术交流会论文集，科学出版社 (1981).

[5] 陈兆宽，刘 维，分型能控的最小输入向量数与分型最经济结构综合解，山东大学学报(自然科学版)，1982，2，第 49 页.

[6] Campbell, S. L., Rose, N.J., A Second Order Singular Linear System Arising in Electric Power Systems Analysis, *Int. J. Syst. Sci.*, **13**(1982), 1, 101.

SOME NOTES ON THE CONTROLLABILITY OF GENERALIZED SYSTEMS

YANG CHENGWU TAN HUALIN

(*East China Institute of Technology*)

ABSTRACT

The relation between controllability of generalized systems and that of regular systems is studied theoretically in this paper. As the applications of this relation, the most economical structure synthesis (MESS) of generalized systems is presented with its solution, and some measures of the degree of controllability of generalized systems are introduced. An illutrative example is also given.

Key words ——Generalized systems; controllability; the most economical structure synthesis (MESS).