第 16 卷 第 4 期　　自 动 化 学 报　　Vol. 16, No. 4
1990 年 7 月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　July, 1990

一种新的辅助变量法——重复实验辅助变量法

王　铉　　曹大铸
（东南大学）

摘　　要

本文提出了一种新的辅助变量（IV）法——重复实验辅助变量（TRIV, Test-Repeat IV）法．这种方法不但适用于闭环系统辨识，而且具有精度高、速度快、算法简单及易于判阶等优点．在理论上分析了这种方法的一致性，并通过 Monte Carlo 仿真实验证实了这种方法的有效性．

关键词——系统辨识，闭合回路系统，辅助变量．

一、引　　言

近年来 IV 法越来越受到广泛的重视．但是迄今为止尚未发现一种既适用于闭环系统辨识又具有精度高、算法简单及易于判阶等特点的 IV 法．目前已有的几种 IV 法，例如延时输入、延时输出、外部输入、超前输入以及精致 IV 法等，都有各自的局限性．特别是 P. E. Wellstead (1978) 提出利用辅助积矩矩阵判定系统阶次的方法以后，如何选择合适的辅助变量的问题一直未能很好地解决．众所周知，辅助变量选取的标准是与输入输出数据强相关且与系统噪声不相关．本文提出的 TRIV 法的辅助变量符合这个标准，而且得来容易，可以预期这种方法会得到进一步推广．

二、系统模型与 TRIV 法

图 1 是一个 SISO 闭环系统．假定反馈 $F(z^{-1})$ 未知，$e_{i,k}$ 和 $\mu_{i,k}$ 都是均值为零，方差分别为 σ_1^2 和 σ_2^2 的平稳独立白噪声，外部输入 r_k 也是平稳独立过程，且 r_k，$e_{i,k}$ 及 $\mu_{i,k}$ 都是相互独立的．

图 1 中 $A^*(z^{-1})=1+a_1z^{-1}+\cdots+a_{n_a^*}z^{-n_a^*}$，$B^*(z^{-1})=b_1z^{-1}+\cdots+b_{n_b^*}z^{-n_b^*}$，$F(z^{-1})=f_0+f_1z^{-1}+\cdots+f_{n_f}z^{-n_f}$，$C(z^{-1})=1+c_1z^{-1}+\cdots+c_{n_c}z^{-n_c}$，$D(z^{-1})=1+d_1z^{-1}+\cdots+d_{n_d}z^{-n_d}$，$G(z^{-1})=1+g_1z^{-1}+\cdots+g_{n_g}z^{-n_g}$，$H(z^{-1})=1+h_1z^{-1}+\cdots+h_{n_h}z^{-n_h}$．其中 z^{-1} 是后移算子，即 $z^{-1}x_k=x_{k-1}$．这里假定 $A^*(z^{-1})$ 和 $B^*(z^{-1})$ 是

本文于 1987 年 6 月 27 日收到．

互质的.

TRIV 法用相同的外部输入 r_k 分别对系统做两次实验得两批数据. 由于两次实验中进入系统的噪声彼此是独立的，且两次实验的外部输入相同，所以两次实验的输入和输出的无噪声项是相同的，因而两次实验的输入和输出必定强相关. 若用这两批数据互为辅助变量，则可得精度很高的估计量. 在实际辨识中往往要做好几个周期的实验，当周期足够大时，每个周期的实验都可看成是独立的.

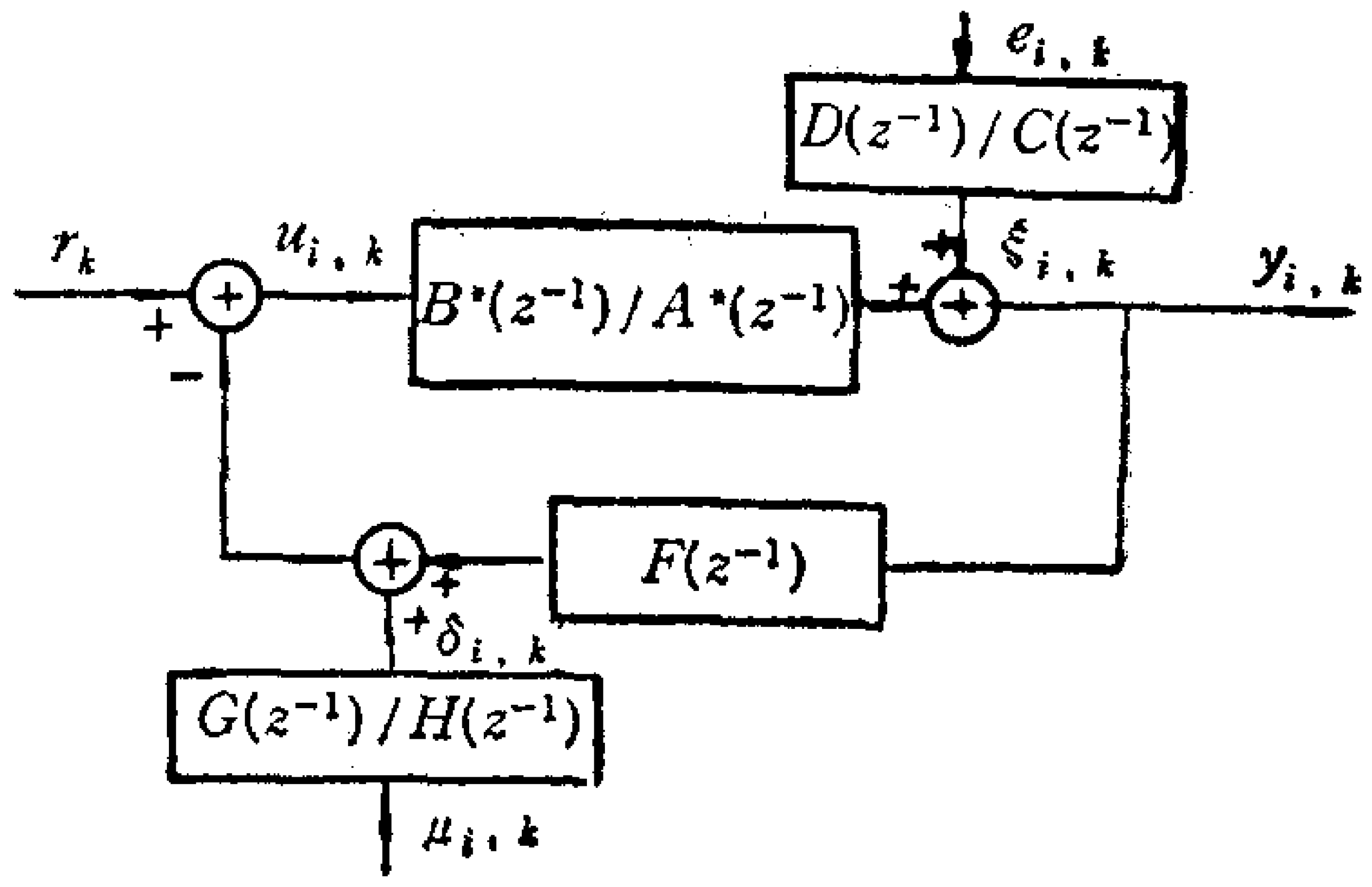

图 1　SISO 闭环系统框图

通常我们用 n_a 和 n_b 代替 n_a^* 和 n_b^*，即用 $A(z^{-1})$ 和 $B(z^{-1})$ 代替 $A^*(z^{-1})$和 $B^*(z^{-1})$. 其中 $A(z^{-1}) = 1 + a_1z^{-1} + \cdots + a_{n_a}z^{-n_a}$, $B(z^{-1}) = b_1z^{-1} + \cdots + b_{n_b}z^{-n_b}$. 为了保证估计量的唯一性，必须满足 $\min(n_a - n_a^*, n_b - n_b^*) = 0$. 由图 1 可得

$$y_{i,k} = \frac{B^*(z^{-1})}{A^*(z^{-1})}u_{i,k} + \frac{D(z^{-1})}{C(z^{-1})}e_{i,k} = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}u_{i,k} + \frac{D(z^{-1})}{C(z^{-1})}e_{i,k},\quad i = 1,2, \tag{1}$$

$$r_k - u_{i,k} = F(z^{-1})y_{i,k} + \frac{G(z^{-1})}{H(z^{-1})}\mu_{i,k}, i = 1,2. \tag{2}$$

其中 i 表示实验序号；$y_{i,k}, u_{i,k}, e_{i,k}$ 和 $\mu_{i,k}$ 分别表示第 i 次实验的输出、输入、系统噪声和反馈回路噪声. 当 $i = 2$ 时可得

$$\begin{aligned} y_{2,k} = &-[a_1y_{2,k-1} + \cdots + a_{n_a}y_{2,k-n_a}] + b_1u_{2,k-1} + \cdots + b_{n_b}u_{2,k-n_b} \\ &+ \frac{A(z^{-1})D(z^{-1})}{C(z^{-1})}e_{2,k} = \phi_k^T\theta^* + \frac{A(z^{-1})D(z^{-1})}{C(z^{-1})}e_{2,k}, \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} r_k - u_{2,k} &= f_0y_{2,k} + \cdots + f_{n_f}y_{2,k-n_f} + \frac{G(z^{-1})}{H(z^{-1})}\mu_{2,k} \\ &= \psi_k^T\zeta^* + \frac{G(z^{-1})}{H(z^{-1})}\mu_{2,k}. \end{aligned} \tag{4}$$

其中 $\theta^* = [a_1\cdots a_{n_a}b_1\cdots b_{n_b}]^T$; $\phi_k = [-y_{2,k-1}\cdots -y_{2,k-n_a}u_{2,k-1}\cdots u_{2,k-n_b}]^T$; $\zeta^* = [f_0f_1\cdots f_{n_f}]^T$; $\psi_k = [y_{2,k}\cdots y_{2,k-n_f}]^T$. 对式 (3) 和 (4) 分别取辅助变量 $z_k = [-y_{1,k-1}\cdots -y_{1,k-n_a}u_{1,k-1}\cdots u_{1,k-n_b}]^T$ 和 $x_k = [y_{1,k}\cdots y_{1,k-n_f}]^T$，因而可得 θ^* 和 ζ^* 的估计值

$$\hat{\theta} = \left[\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} z_k\phi_k^T\right]^{-1}\left[\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} z_ky_{2,k}\right], \tag{5}$$

$$\hat{\zeta} = \left[\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k\psi_k^T\right]^{-1}\left[\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k(r_k - u_{2,k})\right]. \tag{6}$$

这里必须满足 $\left[\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} z_k\phi_k^T\right]$ 和 $\left[\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k\psi_k^T\right]$ 非奇异. 下面给出(5)和(6)式的递推算法:

$$\begin{cases}\hat{\boldsymbol{\theta}}_k=\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}-P_{k-1}\boldsymbol{z}_k[\hat{\sigma}_1^2+\boldsymbol{\phi}_k^TP_{k-1}\boldsymbol{z}_k]^{-1}[\boldsymbol{\phi}_k^T\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}-y_{2,k}], & (7a)\\ P_k=P_{k-1}-P_{k-1}\boldsymbol{z}_k[\hat{\sigma}_1^2+\boldsymbol{\phi}_k^TP_{k-1}\boldsymbol{z}_k]^{-1}\boldsymbol{\phi}_k^TP_{k-1}, & (7b)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\hat{\boldsymbol{\zeta}}_k=\hat{\boldsymbol{\zeta}}_{k-1}-Q_{k-1}\boldsymbol{x}_k[\hat{\sigma}_2^2+\boldsymbol{\psi}_k^TQ_{k-1}\boldsymbol{x}_k]^{-1}[\boldsymbol{\psi}_k^T\hat{\boldsymbol{\zeta}}_{k-1}-r_k+u_{2,k}], & (8a)\\ Q_k=Q_{k-1}-Q_{k-1}\boldsymbol{x}_k[\hat{\sigma}_2^2+\boldsymbol{\psi}_k^TQ_{k-1}\boldsymbol{x}_k]^{-1}\boldsymbol{\psi}_k^TQ_{k-1}. & (8b)\end{cases}$$

(7a)—(8b)式中 $\hat{\sigma}_1^2$ 和 $\hat{\sigma}_2^2$ 分别是 σ_1^2 和 σ_2^2 的估计值，也可以令 $\hat{\sigma}_1^2=1,\hat{\sigma}_2^2=1$.

三、TRIV 法的一致性分析

这里只对 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 的一致性进行分析. 同理可分析 $\hat{\boldsymbol{\zeta}}$ 的一致性，从略. 将(3)式代入(5)式可得

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}=\boldsymbol{\theta}^*+\left[\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\boldsymbol{z}_k\boldsymbol{\phi}_k^T\right]^{-1}\left[\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\boldsymbol{z}_k\frac{A(z^{-1})D(z^{-1})}{C(z^{-1})}e_{2,k}\right]. \tag{9}$$

假定数据是平稳和各态历经的，则根据文献[4]可得

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\boldsymbol{z}_k\boldsymbol{\phi}_k^T=E\boldsymbol{z}_k\boldsymbol{\phi}_k^T,\ (\text{w.p.1}), \tag{10}$$

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\boldsymbol{z}_k\frac{A(z^{-1})D(z^{-1})}{C(z^{-1})}e_{2,k}=E\boldsymbol{z}_k\frac{A(z^{-1})D(z^{-1})}{C(z^{-1})}e_{2,k},\ (\text{w.p.1}). \tag{11}$$

要使 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 是一致估计，即 $\lim\limits_{N\to\infty}\hat{\boldsymbol{\theta}}=\boldsymbol{\theta}^*$ (w.p.1)，由(9)式可以看出必须满足 i) $R_1=E\boldsymbol{z}_k\boldsymbol{\phi}_k^T$ 非奇异； ii) $E\boldsymbol{z}_k\dfrac{A(z^{-1})D(z^{-1})}{C(z^{-1})}e_{2,k}=0$. 由于

$$y_{1,k}=\frac{B^*(z^{-1})}{S^*(z^{-1})}r_k-\frac{B^*(z^{-1})}{S^*(z^{-1})}\frac{D(z^{-1})}{C(z^{-1})}\mu_{1,k}+\frac{A^*(z^{-1})}{S^*(z^{-1})}\frac{D(z^{-1})}{C(z^{-1})}e_{1,k}, \tag{12a}$$

$$u_{1,k}=\frac{A^*(z^{-1})}{S^*(z^{-1})}r_k-\frac{A^*(z^{-1})}{S^*(z^{-1})}\frac{D(z^{-1})}{C(z^{-1})}\mu_{1,k}-\frac{F(z^{-1})A^*(z^{-1})}{S^*(z^{-1})}\frac{D(z^{-1})}{C(z^{-1})}e_{1,k}, \tag{12b}$$

其中 $S^*(z^{-1})=A^*(z^{-1})+B^*(z^{-1})F(z^{-1})=1+s_1z^{-1}+\cdots+s_{n_s^*}z^{-n_s^*}$；$n_s^*=\max(n_a^*,n_b^*+n_f)$，而且 $e_{2,k}$ 与 $r_k,e_{1,k}$ 及 $\mu_{1,k}$ 不相关，故有

$$E\boldsymbol{z}_k\frac{A(z^{-1})D(z^{-1})}{C(z^{-1})}e_{2,k}=0.$$

条件 ii) 成立. 关于条件 i) 给出如下定理.

定理1. 对图 1 所示的 SISO 闭环系统，若采用 TRIV 法进行辨识，算法如(5)式所示，假定 $e_{1,k},e_{2,k},\mu_{1,k}$ 及 $\mu_{2,k}$ 都是相互独立的白噪声，外部输入 r_k 是平稳的且与噪声无关，$S^*(z^{-1})$ 的所有零点均严格地在单位圆内，系统参数 $\boldsymbol{\theta}^*$ 唯一存在，则下面的条件任一成立就使得 $E\boldsymbol{z}_k\boldsymbol{\phi}_k^T$ 非奇异.

I) r_k 是激励阶次大于或等于 n_a+n_b 的信号；

II) r_k 是一个阶次小于或等于 $n_a+n_b-\max(n_a^*,n_b^*+n_f)$ 的 AR 过程.

证明.

$$R_1 = Ez_k\phi_k^T = E\left[-\frac{B^*(z^{-1})}{S^*(z^{-1})}r_{k-1}\cdots\cdots-\frac{B^*(z^{-1})}{S^*(z^{-1})}r_{k-n_a}\frac{A^*(z^{-1})}{S^*(z^{-1})}r_{k-1}\cdots\cdots\frac{A^*(z^{-1})}{S^*(z^{-1})}r_{k-n_b}\right]^T\cdot\left[-\frac{B^*(z^{-1})}{S^*(z^{-1})}r_{k-1}\cdots\cdots-\frac{B^*(z^{-1})}{S^*(z^{-1})}\cdot r_{k-n_a}\frac{A^*(z^{-1})}{S^*(z^{-1})}r_{k-1}\cdots\cdots\frac{A^*(z^{-1})}{S^*(z^{-1})}r_{k-n_b}\right]$$

$$= S(-B^*,A^*)E\left[\frac{r_{k-1}}{S^*(z^{-1})}\cdots\cdots\frac{r_{k-n_a-n_b}}{S^*(z^{-1})}\right]^T\cdot\left[\frac{r_{k-1}}{S^*(z^{-1})}\cdots\cdots\frac{r_{k-n_a-n_b}}{S^*(z^{-1})}\right]S^T(-B^*,A^*)$$

$$= S(-B^*,A^*)\cdot\rho\cdot S^T(-B^*,A^*). \tag{13}$$

$S(-B^*,A^*)$是一个 Sylvester 矩阵．根据引理 1 (所有引理见附录)，当 $\min(n_a-n_a^*, n_b-n_b^*)=0$，且 $A^*(z^{-1})$ 和 $B^*(z^{-1})$ 互质时，$S(-B^*,A)$ 满秩．因此为了证明 $Ez_k\phi_k^T$ 非奇异，下面仅需证明 ρ 非奇异即可．

$$\rho = E\left[\frac{r_{k-1}}{S^*(z^{-1})}\cdots\cdots\frac{r_{k-n_a-n_b}}{S^*(z^{-1})}\right]^T\left[\frac{r_{k-1}}{S^*(z^{-1})}\cdots\cdots\frac{r_{k-n_a-n_b}}{S^*(z^{-1})}\right]. \tag{14}$$

I) 由引理 2 知，当 r_k 是 n_a+n_b 阶持续激励时，$\frac{r_k}{S^*(z^{-1})}$ 也是 n_a+n_b 阶持续激励的，所以 ρ 是满秩的，即 R_1 非奇异．

II) 假设有

$$\boldsymbol{l} = [l_1\cdots l_{n_a+n_b}]^T, \qquad L(z^{-1}) = \sum_{i=1}^{n_a+n_b} l_i z^{-i}, \tag{15}$$

设 $\alpha(z^{-1})r_k = \beta(z^{-1})\omega_k$，$\omega_k$ 是白噪声，且 $\alpha(z^{-1}) = 1+\alpha_1 z^{-1}+\cdots+\alpha_{n_\alpha}z^{-n_\alpha}$，$\beta(z^{-1}) = 1+\beta_1 z^{-1}+\cdots+\beta_{n_\beta}z^{-n_\beta}$．若能证明 $\boldsymbol{l}=0$ 是使 $\rho\cdot\boldsymbol{l}=0$ 成立的唯一解，即可证明 ρ 非奇异．

$$E\left[\frac{1}{S^*(z^{-1})}\cdot\frac{\beta(z^{-1})}{\alpha(z^{-1})}\omega_{k-1}\cdots\cdots\frac{1}{S^*(z^{-1})}\cdot\frac{\beta(z^{-1})}{\alpha(z^{-1})}\omega_{k-n_a-n_b}\right]^T\cdot\left[\frac{1}{S^*(z^{-1})}\cdot\frac{\beta(z^{-1})}{\alpha(z^{-1})}\omega_{k-1}\cdots\cdots\frac{1}{S^*(z^{-1})}\cdot\frac{\beta(z^{-1})}{\alpha(z^{-1})}\omega_{k-n_a-n_b}\right]\cdot\boldsymbol{l}=0. \tag{16}$$

上式可改写成

$$E\left[\frac{\beta(z^{-1})}{S^*(z^{-1})\alpha(z^{-1})}\omega_{k-j}\right]\left[\frac{L(z^{-1})\beta(z^{-1})}{S^*(z^{-1})\alpha(z^{-1})}\omega_k\right]=0, \quad j=1,\cdots n_a+n_b. \tag{17}$$

根据 Parseval 定理有

$$\frac{1}{2\pi i}\oint z^j\frac{\beta(z)}{S^*(z)\alpha(z)}\cdot\frac{L(z^{-1})\beta(z^{-1})}{S^*(z^{-1})\alpha(z^{-1})}\cdot\frac{dz}{z}=0, \quad j=1,\cdots n_a+n_b. \tag{18}$$

上式中的积分路径是单位圆，z 表示复数域中的变量．由(18)式得

$$\frac{1}{2\pi i}\oint z^{j-1}\frac{\beta(z)}{\alpha(z)S^*(z)}\cdot\frac{L(z^{-1})z^{n_a+n_b}\beta(z^{-1})z^{n_\beta}z^{\max(k,0)}}{S^*(z^{-1})z^{n_s^*}\alpha(z^{-1})z^{n_\alpha}z^{\max(-k,0)}}dz=0,$$
$$j=1,\cdots n_a+n_b. \tag{19}$$

其中 $K = n_s^* + n_\alpha - n_a - n_b - n_\beta$. 令

$$f(z) = \frac{\beta(z)}{\alpha(z)S^*(z)} \cdot \frac{L(z^{-1})z^{n_a+n_b}\beta(z^{-1})z^{n_\beta}z^{\max(k,0)}}{S^*(z^{-1})z^{n_s^*}\alpha(z^{-1})z^{n_\alpha}z^{\max(-k,0)}}, \tag{20}$$

不难看出，$f(z)$ 在单位圆内的极点数为 $n_s^* + n_\alpha + \max(-k,0)$；而 $f(z)$ 在单位圆内的零点数，除 z^{i-1} 之外，为 $n_a + n_b - 1 + n_\beta + \max(k,0)$. 根据引理 3，若

$$n_a + n_b + n_\beta - 1 + \max(k,0) < n_s^* + n_\alpha + \max(-k,0) \leqslant n_a + n_b, \tag{21}$$

则 $f(z)$ 在单位圆内的极点数多于零点数，这样能使(19)式成立的唯一解是 $L(z^{-1}) = 0$，即 $\boldsymbol{l} = 0$.

化简(21)式可得 $n_\beta = 0, n_\alpha \leqslant n_a + n_b - n_s^* = n_a + n_b - \max(n_a^*, n_b^* + n_f)$，所以 r_k 是一个 AR 过程，其阶次小于或等于 $n_a + n_b - \max(n_a^*, n_b^* + n_f)$. 证毕.

四、TRIV 法在系统结构辨识中的应用

P. E. Wellstead[5] 提出了用辅助积矩矩阵判定系统的阶次，这种方法的精度较高. 但是如何选取合适的辅助变量却是一个棘手的问题. 本文提出的 TRIV 法较好地解决了这个问题. 系统仍如图 1 所示，且不妨令 $n_a^* = n_b^* = n$，定义辅助积矩矩阵为

$$\Lambda_{\hat{n}} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{z}_k \boldsymbol{\phi}_k^T. \tag{22}$$

其中 $\boldsymbol{\phi}_k = [-y_{2,k-1} \cdots\cdots -y_{2,k-\hat{n}}\ u_{2,k-1} \cdots\cdots u_{2,k-\hat{n}}]^T$；$\boldsymbol{z}_k = [-y_{1,k-1} \cdots\cdots -y_{1,k-\hat{n}}\ u_{1,k-1} \cdots u_{1,k-\hat{n}}]^T$. 根据文献[4]，

$$\lim_{N\to\infty} \Lambda_{\hat{n}} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{z}_k \boldsymbol{\phi}_k^T = E\boldsymbol{z}_k\boldsymbol{\phi}_k^T, \ (\text{w.p.1}). \tag{23}$$

根据文献[5]，

$$\text{Rank}\,[E\boldsymbol{z}_k\boldsymbol{\phi}_k^T] = \min(\hat{n} + n, 2\hat{n}),$$

这样就可以根据辅助积矩矩阵秩的情况求出 n. 通常我们用辅助积矩矩阵的行列式值之比来判阶. 辅助行列式之比(IDR)定义如下:

$$\text{IDR}(\hat{n}) = \det[\Lambda_{\hat{n}}]/\det[\Lambda_{\hat{n}+1}]. \tag{24}$$

当 $\hat{n} = n$ 时，IDR $(\hat{n})$ 之值将迅速上升，采用重复实验辅助变量，这种上升要比普通积矩矩阵的行列式值之比的上升显著得多.

五、噪声模型的估计

有时我们需要估计噪声模型. 假定 $\hat{\boldsymbol{\lambda}}_k = [\hat{c}_1 \cdots \hat{c}_{n_c} \hat{d}_1 \cdots \hat{d}_{n_d}]_k^T, \hat{\boldsymbol{\eta}}_k = [\hat{h}_1 \cdots \hat{h}_{n_h} \hat{g}_1 \cdots \hat{g}_{n_g}]_k^T$，下面给出噪声模型参数估计的迭代-递推算法:

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{\lambda}}_k = \hat{\boldsymbol{\lambda}}_{k-1} - T_{k-1}\hat{\boldsymbol{p}}_k[2\hat{\sigma}_1^2 + \hat{\boldsymbol{q}}_k^T T_{k-1}\hat{\boldsymbol{p}}_k]^{-1}[\hat{\boldsymbol{q}}_k^T\hat{\boldsymbol{\lambda}}_{k-1} - \xi_k], & (25a) \\ T_k = T_{k-1} - T_{k-1}\hat{\boldsymbol{p}}_k[2\hat{\sigma}_1^2 + \hat{\boldsymbol{q}}_k^T T_{k-1}\hat{\boldsymbol{p}}_k]^{-1}\hat{\boldsymbol{q}}_k^T T_{k-1}, & (25b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{\eta}}_k = \hat{\boldsymbol{\eta}}_{k-1} - \Gamma_{k-1}\hat{\boldsymbol{m}}_k[2\hat{\sigma}_2^2 + \hat{\boldsymbol{n}}_k^T\Gamma_{k-1}\hat{\boldsymbol{m}}_k]^{-1}[\hat{\boldsymbol{n}}_k^T\hat{\boldsymbol{\eta}}_{k-1} - \delta_k] & (26a) \\ \Gamma_k = \Gamma_{k-1} - \Gamma_{k-1}\hat{\boldsymbol{m}}_k[2\hat{\sigma}_2^2 + \hat{\boldsymbol{n}}_k^T\Gamma_{k-1}\hat{\boldsymbol{m}}_k]^{-1}\hat{\boldsymbol{n}}_k^T\Gamma_{k-1}. & (26b) \end{cases}$$

其中 $\hat{\boldsymbol{p}}_k=[-\hat{\xi}^*_{k-1}\cdots\cdots-\hat{\xi}^*_{k-n_c}\hat{e}^*_{k-1}\cdots\cdots\hat{e}^*_{k-1}\cdots\cdots\hat{e}^*_{k-n_d}]^T$；$\hat{\boldsymbol{q}}_k=[-\hat{\xi}_{k-1}\cdots\cdots-\hat{\xi}_{k-n_c}\cdot\hat{e}_{k-1}\cdots\cdots\hat{e}_{k-n_d}]$；$\hat{\boldsymbol{m}}_k=[-\hat{\delta}^{**}_{k-1}\cdots\cdots-\hat{\delta}^{**}_{k-n_h}\hat{\mu}^{**}_{k-1}\cdots\cdots\hat{\mu}^{**}_{k-n_g}]^T$；$\hat{\boldsymbol{n}}_k=[-\hat{\delta}_{k-1}\cdots\cdots\hat{\delta}_{k-n_h}\hat{\mu}_{k-1}\cdots\cdots\hat{\mu}_{k-n_g}]^T$．“$*$”表示经过滤波器 $1/\hat{D}_{j-1}(z^{-1})$滤波，“$*\ *$”表示经过滤波器 $1/\hat{G}_{j-1}(z^{-1})$滤波．$\hat{D}_{j-1}(z^{-1})$ 和 $\hat{G}_{j-1}(z^{-1})$ 是第 $j-1$ 次迭代后 $D(z^{-1})$ 和 $G(z^{-1})$ 的估计．$\hat{\xi}_k$，$\hat{\delta}_k$，$\hat{e}_k$ 和 $\hat{\mu}_k$ 的计算公式为 $\hat{\xi}_k=y_{1,k}-y_{2,k}-\dfrac{\hat{B}(z^{-1})}{\hat{A}(z^{-1})}(u_{1,k}-u_{2,k})$，$\hat{\delta}_k=-\hat{F}(z^{-1})\times(y_{1,k}-y_{2,k})-(u_{1,k}-u_{2,k})$，$\hat{e}_k=\hat{\xi}_k-\hat{q}_k^T\hat{\boldsymbol{\lambda}}_k$，$\hat{\mu}_k=\hat{\delta}_k-\hat{\boldsymbol{n}}_k^T\hat{\boldsymbol{\eta}}_k$．$\hat{\sigma}_1^2$ 和 $\hat{\sigma}_2^2$ 的估计公式为 $\hat{\sigma}_1^2=\dfrac{1}{2N}\sum\limits_{k=1}^{N}\hat{e}_k^2,\hat{\sigma}_2^2=\dfrac{1}{2N}\sum\limits_{k=1}^{N}\mu_k^2$．也可令 $\hat{\sigma}_1^2=\hat{\sigma}_2^2=1$．

六、Monte Carlo 仿真实验

下面通过 Monte Carlo 仿真实验验证 TRIV 法的有效性．选择一个较普通的系统为例，用 TRIV 法和外部输入法进行比较．系统如图 1 所示，选外部输入 r_k 为伪随机二位式信号，其幅值为 R，两个噪声 $e_{i,k}$ 和 $\mu_{i,k}$ 都是均值为零，方差为 σ^2 的白噪声信号． 定义信噪比为

$$S=\sum_{k=1}^{N}r_k^2\Big/\sum_{k=1}^{N}e_{i,k}^2\doteq\frac{R^2}{\sigma^2}.$$

改变信噪比和数据量并在 20 次随机实验的基础上得出整体平均估计值．为了节省篇幅，仅给出数据量 $N=1000$ 时的仿真结果($N=500$ 亦可，精度相对稍差一些)，见表 1． 表中第三、七列的“估计值 1”是用外部输入 r_k 为辅助变量的估计值．这两个估计值都是 20 次随机实验中所得出的最好的一次结果（其整体平均估计值的精度很差，故在表中没给出）．第四、八列是 TRIV 法的整体平均估计值．第五、九列是 TRIV 法估计值相对于参数真值的标准差．第六、十列是相对于整体平均估计值的标准差．

表 1　闭环系统仿真实验结果

系统参数名	系统参数真值	$s=10$				$s=20$			
		估计值 1	估计值	真值误差	均值误差	估计值 1	估计值	真值误差	均值误差
a_1	−0.7300	−0.7706	−0.6761	0.0738	0.0797	−0.6110	−0.7431	0.0179	0.0176
a_2	0.3400	0.3203	0.3393	0.0021	0.0021	0.2530	0.3512	0.0329	0.0319
b_0	1.0000	0.8876	1.0005	0.0005	0.0005	0.3864	0.9937	0.0063	0.0063
b_1	0.8000	0.8758	0.7422	0.0722	0.0779	0.5554	0.7834	0.0208	0.0212
f_0	1.0000	0.6155	1.0129	0.0129	0.0127	0.7809	1.0044	0.0044	0.0044
f_1	−0.2500	−0.2403	−0.2590	0.0360	0.0347	0.2409	−0.2554	0.0216	0.0211
c_1	−0.8000		−0.9123	0.1404	0.1231		−0.8530	0.0662	0.0621
d_1	−0.6000		−0.5161	0.1398	0.1626		−0.5419	0.0968	0.1072
c_2	−0.7000		−0.5820	0.1686	0.2027		−0.5916	0.1549	0.1832
d_2	−0.5000		−0.3782	0.2436	0.3221		−0.4211	0.1578	0.1874

注：数据量 $N=1000$．

表 2 给出了数据量和信噪比不同的情况下进行 20 次随机实验所得正确判阶次数.可以看出结果还是比较满意的. 判阶失误时误差不超过 ± 1 阶.

表 2 正确判阶次数/20 次实验

正确判阶次数 / 信噪比 s / 数据量 N	$s = 10$	$s = 20$
$N = 500$	12	14
$N = 1000$	16	16

附 录

定义 1. 考虑两个多项式 $A^*(z^{-1}) = a_0 z^{n_a^*} + \cdots\cdots + a_{n_a^*}$, $B^*(z^{-1}) = b_0 z^{n_b^*} + \cdots\cdots + b_{n_b^*}$. 当 $\min(n_a - n_a^*, n_b - n_b^*) = 0$ 时的 $(n_a + n_b) \times (n_a + n_b)$ 维 Sylvester 矩阵如下定义:

$$S(A,B) = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 \cdots\cdots a_{n_a^*} & & 0 \\ & \ddots & & \ddots \\ 0 & & a_0 & a_1 \cdots\cdots a_{n_a^*} \\ \hdashline b_0 & b_1 \cdots\cdots b_{n_b^*} & & 0 \\ & \ddots & & \ddots \\ 0 & & b_0 & b_1 \cdots\cdots b_{n_b^*} \end{bmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\end{matrix}}\right\} n_a \text{ 行} \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\end{matrix}}\right\} n_b \text{ 行} \end{matrix} \tag{A.1}$$

引理 1. 考虑如(A.1)所示的 Sylvester 矩阵 $S(A,B)$,若 $A(z)$ 和 $B(z)$ 有 K 个相同零点,则

$$\operatorname{Rank} S(A,B) = n_a + n_b - K.$$

引理 2. 设 $u(t)$ 是具有谱密度矩阵 $\varphi_u(\omega)$ 的多变量遍历信号. 假定 $\varphi_u(\omega)$ 至少在 n 个不同频率处是正定的. 若 $H(q^{-1})$ 是一个(多变量)渐近稳定的滤波器且 $\det[H(z)]$ 在单位圆上无零点,则滤波信号 $y(t) = H(q^{-1})u(t)$ 是 n 阶持续激励的.

引理 3. 考虑函数

$$f(z) = \frac{g(z)}{\prod_{i=1}^{k}(z - \mu_i)^{t_i}}, \tag{A.2}$$

其中 $g(z)$ 在单位圆内及单位圆上是解析的,复数$\{\mu_i\}$满足$|\mu_i| < 1$且是互异的, t_i 是大于或等于 1 的整数. 假定下式成立

$$\frac{1}{2\pi i}\oint f(z) z^j \cdot \frac{dz}{z} = 0, \quad j = 1, \cdots m, \tag{A.3}$$

积分路径是单位圆,且

$$\sum_{i=1}^{k} t_i \leqslant m, \tag{A.4}$$

则 $f(z)$ 在单位圆内解析.

以上所有引理见参考文献[2].

参 考 文 献

[1] Söderström, T. and Stoica, P., Comparison of Some Instrumental Variable Methods——Consistency and Accuracy Aspects, *Automatica*, 17(1981), 101—115.

[2] Söderström, T. and Stoica, P., Instrumental Variable Methods for System Identification, Springer-Verlag, Berlin, (1983).

[3] Young, P. C. and Jakeman, A. J., Refind Instrumental Variable Methods of Recursive Time——Series Analysis, Part I, Single Input and Single Output Systems, *Int. J. Control,* 29(1979), 1—30.
[4] Söderström, T., Ergodicity Results for Sample Covariances, *Problems of Control and Information Theory,* 4(1975), 131—138.
[5] Wellstead, P. E., An Instrumental Product Moment Test for Model Order Estimation, *Automatica* 14 (1978), 89—91.

A NEW INSTRUMENTAL VARIABLE METHOD ——THE TEST REPEAT INSTRUMENTAL VARIABLE METHOD

WANG HONG　CAO DAZHU
(Southeast University)

ABSTRACT

In this paper, a new instrumental variable (IV) method——the Test Repeat IV (TRIV) method is put forth. This method is applicable to the identification of closed-loop systems. And it is accurate, rapid, simple in algorithm, easy in order determination. Its consistency problem is analyzed and its validity is testified by Monte Carlo simulation experiments.

Key words——System identification; closed-loop system; instrumental variable consistency.