第 16 卷 第 4 期　　自 动 化 学 报　　Vol. 16, No. 4
1990 年 7 月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　July, 1990

使闭环系统对执行器失效具有完整性的动态补偿器设计

程 一　朱宗林　高金陵
（中国科学院自动化所）

摘　　要

本文提出了一种动态补偿器的设计方法．这种动态补偿器使闭环系统对执行器失效具有完整性．文中给出了动态补偿器存在的充分条件和设计步骤．

关键词——完整性，补偿器，分式描述．

一、引　　言

考虑被控对象

$$\begin{aligned} x &= Ax + Bu, \\ y &= Cx + Eu. \end{aligned} \tag{1}$$

其中 $x \in R^n, u \in R^m, y \in R^p$.

假设此被控对象的执行器中有若干个失效，如产生开路故障或卡死（失灵）故障．在这种情况下，相应输入通道的输入信号被切断，因而进入被控对象的控制信号或者为零（开路故障）或者为一常值干扰（卡死故障）．为了分析闭环系统在正常及执行器失效情况下的稳定性，则无论执行器发生了何种失效，我们都可将矩阵 B 和 E 的第 i 列元素全部置为零来描述第 i 个执行器的失效，相应的输入矩阵和传递矩阵用 B^i 和 E^i 来表示．

当被控对象(1)是渐近稳定的，即 A 是稳定矩阵时，若取

$$u = -B'Px, \tag{2}$$

而 P 满足

$$PA + A'P + Q = 0, \qquad Q > 0, \tag{3}$$

则对任意的

$$\Delta = \operatorname{diag}(\delta_1, \cdots, \delta_m), \quad \delta_i = \begin{cases} 0 & 第\ i\ 个执行器失效, \\ 1 & 第\ i\ 个执行器正常, \end{cases}$$

状态反馈控制律

$$u = -\Delta B'Px$$

都将保证闭环系统稳定[1]．这意味着状态反馈律(2)能使闭环系统对任意的执行器失效

本文于 1988 年 8 月 24 日收到．

都具有完整性．这里的完整性指的是闭环系统在有部件失效时依然保持稳定的性质．

当A具有不稳定模态时，文献[2—3]研究了如何设计状态反馈律使闭环系统对满足一定条件的执行器失效具有完整性．如果只考虑单个执行器失效，则可求得一定常状态反馈增益阵K和相应的指标集J，使得对任意一个$i\in J$，$A-B^iK$均为稳定的．

对于一个实际的被控对象，它的状态往往不是全都可以测量的．如果利用状态观测器来估计系统的全部状态，则当有执行器失效时，观测器将给出错误的状态估计值[4]．在这种情况下，要设计对执行器失效具有完整性的反馈律，只能考虑直接利用输出来进行反馈．

二、问题的描述

设$R(s)^{p\times m}$表示p行m列的真有理分式矩阵所组成的集合，M表示稳定的真有理分式矩阵所组成的集合，即若$X\in M$，则X的所有元素均为真的且没有右半复平面的极点．考虑被控对象(1)，它的传递函数矩阵为

$$P(s)=E+C(sI-A)^{-1}B. \tag{4}$$

其中$P\in R(s)^{p\times m}$，它能够被描述成[5]

$$P(s)=ND^{-1}=\bar{D}^{-1}\bar{N}. \tag{5}$$

其中$N,D,\bar{D},\bar{N}\in M$，(N,D)右互质，$(\bar{D},\bar{N})$左互质，且一定存在$X,Y,\bar{X},\bar{Y}\in M$使得

$$\begin{vmatrix}\bar{D} & \bar{N}\\ -X & Y\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\bar{Y} & -N\\ \bar{X} & D\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\bar{Y} & -N\\ \bar{X} & D\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\bar{D} & \bar{N}\\ -X & Y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}I & 0\\ 0 & I\end{vmatrix}. \tag{6}$$

引理1[5] 对于一个给定的P，设它有左右互质分式描述$(\bar{D},\bar{N})$，(N,D)，且$X,Y,\bar{X},\bar{Y}\in M$满足(6)式，则稳定P的所有补偿器所组成的集合

$$\begin{aligned}S(P)&=\{(Y-R\bar{N})^{-1}(X+R\bar{D})\,|\,R\in M\}\\&=\{(\bar{X}+DS)(\bar{Y}-NS)^{-1}\,|\,S\in M\}.\end{aligned} \tag{7}$$

且如果P是严格真的，则任意一个属于$S(P)$的C均为真的(物理可实现的)．

证明．参见文献[5]．

设$P_i\in R(s)^{p\times m}$表示第i个执行器失效后的被控对象．如前所述，被控对象第i个执行器的失效可将(1)式中的B和E矩阵的第i列元素全部置为零来描述．如果用传递函数矩阵来描述对象，则相应于将P的第i列元素全部置为零．设用P^i表示之，那么，

$$P_i=P^i. \tag{8}$$

设P_i的左右互质分式描述为$(\bar{D}_i,\bar{N}_i)$和(N_i,D_i)，且存在$X_i,Y_i,\bar{X}_i,\bar{Y}_i\in M$满足(6)式，因而

$$S(P_i)=\{(Y_i-R_i\bar{N}_i)^{-1}(X_i+R_i\bar{D}_i)\}. \tag{9}$$

下面我们所考虑的目标是设计一动态补偿器C，使得

$$C\in S(P)\cap S(P_{i1})\cap\cdots\cap S(P_{ik}),\quad J=\{i1,\cdots,ik\}, \tag{10}$$

这是一个同时稳定化(Simultaneous Stabilization)的问题，即一个控制器可以稳定若干个特性不同的对象．显然，若一控制器满足方程(10)，则这个控制器不但能稳定正常的被控对象，而且当任一执行器$i(i\in J)$失效时，也能稳定被控对象．

三、使闭环系统对执行器失效具有完整性的动态补偿器设计

对于一个给定的被控对象，Nett 等[6]提出了一种从状态方程直接获取它的左右互质分式描述$(\bar{D},\bar{N})$ 和 (N,D)及相应的 $X,Y,\bar{X},\bar{Y}$ 的方法。

引理 2[6]. 在(1)式中，设(A,B)可稳，(A,C)可测，选择 K,F 使得 $A-BK$ 和 $A-FC$ 均为稳定的，则以(1)式为其实现的 $P(s)\in R(s)^{p\times m}$ 的左右互质分式描述 $(\bar{D},\bar{N})$，(N,D) 和相应的 $X,Y,\bar{X},\bar{Y}$ 为

$$\begin{aligned}&\bar{N}=C(sI-A+FC)^{-1}(B-FE)+E,\ \bar{D}=I-C(sI-A+FC)^{-1}F,\\&N=(C-EK)(sI-A+BK)^{-1}B+E,\ D=I-K(sI-A+BK)^{-1}B,\\&\bar{X}=K(sI-A+BK)^{-1}F,\ \bar{Y}=I+(C-EK)(sI-A+BK)^{-1}F,\\&X=K(sI-A+FC)^{-1}F,\ Y=I+K(sI-A+FC)^{-1}(B-FE).\end{aligned}\tag{11}$$

证明. 参见文献[6].

设系统(1)为可稳和可测的. 如前所述，我们能够求得一状态反馈增益阵K和相应的指标集 J，使得 $A-B^iK$ 对任意 $i\in J$ 均为稳定的. 选择 F 使 $A-FC$ 为稳定的，由引理2，知P 的左互质分式描述$(\bar{D},\bar{N})$为

$$\begin{aligned}&\bar{N}=C(sI-A+FC)^{-1}(B-FE)+E,\\&\bar{D}=I-(sI-A+FC)^{-1}F.\end{aligned}\tag{12a}$$

且存在满足(6)式的 X,Y

$$X=K(sI-A+FC)^{-1}F,\ Y=I+K(sI-A+FC)^{-1}(B-FE).\tag{12b}$$

而对任意的 $i\in J$，P_i 的左互质分式描述$(\bar{D}_i,\bar{N}_i)$为

$$\begin{aligned}&\bar{N}_i=C(sI-A+FC)^{-1}(B^i-FE^i)+E^i,\\&\bar{D}_i=I-C(sI-A+FC)^{-1}F=D.\end{aligned}\tag{13a}$$

满足(6)式的 X_i,Y_i 为

$$\begin{aligned}&X_i=K(sI-A+FC)^{-1}F=X,\\&Y_i=I+K(sI-A+FC)^{-1}(B^i-FE^i).\end{aligned}\tag{13b}$$

定理. 设$Q(J)$，$(Q(L))$表示用矩阵的所有 $i\in J(i\in L)$ 的列所构成的子矩阵. 则存在一控制器 C 满足式(10)的一个充分条件是有理分式矩阵方程

$$R\bar{N}(J)=(Y-I)(J)\tag{14}$$

存在解 $R\in M$. 且满足(10)式的控制器为

$$C=(Y-R\bar{N})^{-1}(X+R\bar{D}).\tag{15}$$

(14)，(15)式中的 $\bar{N},Y,X,\bar{D}$ 均由(12)式给出.

证明. 设存在$R\in M$，满足(14)式，不妨假设 $J=\{1,2,\cdots,s\}$，$L=\{s+1,\cdots,m\}$，则

$$\begin{aligned}Y-R\bar{N}&=I+K(sI-A+FC)^{-1}(B-FE)\\&\quad-R\{C(sI-A+FC)^{-1}(B-FE)+E\}\\&=I+\{(Y-I)\ (J)(Y-I)(L)\}-R\{\bar{N}(J)\ \bar{N}(L)\}\\&=I+\{(Y-I)(J)-R\bar{N}(J)\ \ (Y-I)(L)-R\bar{N}(L)\}\end{aligned}$$

$$= I + \{0 \ (Y - I)(L) - R\bar{N}(L)\}.$$

而对任一 $i \in J$,有

$$\begin{aligned} Y_i - R\bar{N}_i &= I + K(sI - A + FC)^{-1}(B^i - FE^i) \\ &\quad - R\{C(sI - A + FC)^{-1}(B^i - FE^i) + E^i\} \\ &= I + \{[(Y - I)(J)]^i \ (Y - I)(L)\} - R\{[\bar{N}(J)]^i \ \bar{N}(L)\} \\ &= I + \{[(Y - I)(J)]^i - R[\bar{N}(J)]^i \ (Y - I)(L) - R\bar{N}(L)\} \\ &= I + \{0 \ (Y - I)(L) - R\bar{N}(L)\}. \end{aligned}$$

其中 $[(Y - I)(J)]^i$ 和 $[\bar{N}(J)]^i$ 分别表示将 $[(Y-I)(J)]$ 和 $[\bar{N}(J)]$ 的第 i 列置为零后所得到的矩阵. 所以,对任意的 $i \in J$ 均有

$$Y_i - R\bar{N}_i = Y - R\bar{N}.$$

又由(12)和(13)式知,对任意的 $i \in J$,有

$$\bar{D}_i = \bar{D}, \qquad X_i = X.$$

所以对任意的 $i \in J$ 有

$$(Y_i - R\bar{N}_i)^{-1}(X_i + R\bar{D}_i) = (Y - R\bar{N})^{-1}(X + R\bar{D}).$$

取

$$C = (Y - R\bar{N})^{-1}(X + R\bar{D}).$$

其中 R 满足(14)式,则 C 满足式(10). 证毕

由上面的定理可以看出,方程(14)在使闭环系统对执行器失效具有完整性的动态补偿器的设计中起着关键性作用. 现在的问题是在什么条件下方程 (14) 才有稳定的解呢? 显而易见,方程有解的一个必要条件是 $\bar{N}(J)$ 的列数小于或等于 $\bar{N}(J)$ 的行数. 否则方程(14)将成为一个不相容的方程. 文献[7]中给出了方程(14)有解的充分必要条件,限于篇幅,这里不作介绍.

当 $E(J)$ 为列满秩时,一种比较简单的求解方程(14)的方法是, 先求出 $\bar{N}(J)$ 的一个稳定的左逆,正如文献[8]中所指出的那样,若 $E(J)$ 为列满秩的,则这个稳定的左逆一般(Generically)是存在的,设其为 $U \in M$,即

$$U \cdot \bar{N}(J) = I. \tag{16}$$

则可取

$$R = (Y - I)(J) \cdot U. \tag{17}$$

这时 R 为满足式(14)的稳定矩阵. 但如何从满足(17)式的 R 中求得能使 C 为真的 R 还有待研究.

若系统为严格真的,即 $E = 0$,则可以利用别的方法求解方程(14)[7],且由引理 1 知,这时所得到的补偿器 C 一定是真的(物理可实现的).

对于输出数多于输入数的被控对象,$\bar{N}(J)$的列数永远小于其行数. 因而方程(14)可能有解. 但是对于输入数多于输出数的被控对象, $\bar{N}(J)$ 的列数未必小于其行数. 这时,若 $P(s)$ 为行满秩的,则可以增加$(m - p)$个从输入至输出的直接输出而形成相应的非异 $m \times m$ 被控对象 $P'(s)$[1]. 其过程为: 由于$P(s)$ 行满秩,故其m列中应有 p 列独立, 通过

1) 蓝鸿翔,具有指定闭环极点和良好跟踪性能的多变量系统控制器,控制理论及其应用年会论文集, 湖南.索溪裕(1987),5—8.

列交换将它们移至前 p 列，形成非异 $p\times p$ 子块，然后将 $P(s)$ 增广为 $m\times m$ 方阵，新增 $(m-p)$ 行的前 p 列为全零元，后 $(m-p)$ 列为 I_{m-p}，即

$$P'(s)=\begin{vmatrix} P'_p(s) & * \\ 0 & I_{m-p} \end{vmatrix}. \tag{18}$$

在控制器的实现中，这相应于将被控对象的若干输入信号当作其输出而直接用于反馈．对 $P'(s)$，我们可得到方程

$$R\bar{N}'(J)=(Y'-I)(J). \tag{19}$$

这时，$\bar{N}'(J)$ 的列数永远小于或等于其行数．

综上所述，我们可得到使闭环系统对执行器失效有完整性的动态补偿器的设计步骤为：

1）利用文献[1—3]中的方法求 K，使之对尽量多的 i 保证 $A-B^iK$ 均为稳定矩阵．设 J 表示所有 i 的集合；

2）如果被控对象的输入数多于输出数，检验 J 中所含元素的个数是否大于 $\bar{N}$ 的行数，如果大于 $\bar{N}$ 的行数，则将 $P(s)$ 扩展为 $P'(s)$；

3）利用引理 2 得到 $\bar{N},\bar{D},X,Y$；

4）解方程(14)，得到控制器 C．若方程无解，则可以用 J 的一个子集 J' 代替 J 并返回第 4 步．

结　束　语

本文提出的使闭环系统对执行器失效具有完整性的动态补偿器的设计方法中，最关键的问题是解有理分式矩阵方程(14)．显然，对传感器失效的问题是对执行器失效问题的对偶．依此法设计的控制器，其鲁棒性问题需进一步研究．

本文的工作得到了疏松桂先生的帮助，在此向他致谢．

参　考　文　献

[1] Harvey, C. A., On Feedback Systems Possessing Integrity with respect to Actuator Outages, ed. by N. R. Sandell, Recent Developments in the Robustness Theory of Multivariable Systems, LIDS-R-954, MIT, Cambridge, 1979.

[2] Joshi, S. M., Design of Failure-Accommodating Multiloop LQG-Type Controllers, *IEEE Trans. Auto. Control*, **AC-32**(1987), 740—741.

[3] 程　一, On the Synthesis of Output Feedback Law Possessing Integrity against Actuator and Sensor Failures, Proceedings of the IEEE 1988 International Conference on System, Man and Cybernetics, 702—705, 1988.

[4] Solhelm, O. A., Some Integrity Problems in Optimal Control Systems, AGARD Conference Proceedings, No.137, 1978.

[5] Vidyasagar, M., Control System Synthesis: A Factorization Approach, the MIT Press, 1985.

[6] Nett, C. N., C. A. Jacobson and M. J. Balas, A Connection Between State-Space and Doubly Coprime Fractional Representations, *IEEE Trans. Auto. Control*, **AC-29**(1984), 831—832.

[7] Kailath, T., Linear Systems, Prentice-Hall, Inc., 1980.

[8] Minto, K. D. and M. Vidyasagar, A State-Space Approach to Simultaneous Stabilization, *Control-Theory and Advanced Technology*, **2**(1986), 39—64.

A COMPENSATOR DESIGN FOR SYSTEM INTEGRITY AGAINST ACTUATOR FAILURE

CHENG YI ZHU ZONGLIN GAO JINGLING

(*Institute of Automation, Academia Sinica*)

ABSTRACT

A compensator design method is proposed to maintain closed loop systems integrity against actuator failure. The sufficient condition for existence of the compensator is shown and the design procedure is given.

Key words ——Integrity; compensator; factorization.

中国自动化学会第五届理事会理事长、副理事长、秘书长及常务理事名单

（一九八九年十月二十八日五届二次理事会选举产生）