第16卷 第5期　　自 动 化 学 报　　Vol. 16, No. 5
1990 年 9 月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　Sept., 1990

用不可靠元件构造可靠系统及其神经网络实现

姚增起
（中国科学院自动化研究所）

摘　要

本文提出了可靠系统概念及用不可靠元件构造可靠系统的冗余原则，证明了可靠系统的重要性质．其中特别重要的是，当元件可靠度大于系统可靠度转折点，且元件数趋于∞时，系统可靠度趋于 1．本文还给出了一个用 BP 模型实现可靠系统的例子．

关键词——可靠系统，可靠性，冗余原则，神经网络，BP 模型．

一、引　言

人的大脑细胞在人的一生中不断地失效并死亡，而不影响任何生理系统的正常工作．据估算，在人的大脑内总数为 10^{10} 个脑细胞中，平均每小时约有 1000 个失灵或死亡，一年内脑细胞失灵的总数约为 10^7 个；一个人一生中失灵或死亡的脑细胞达 10^9 个，相当于脑细胞总数的十分之一．然而，一个正常人的神经系统却能够毫无故障地工作一生，不但不被这些损坏了的“零件”所破坏，而且思维能力逐年提高，可靠性也日益增大，这是一般工程系统所望尘莫及的．如何用不可靠的元件构造出可靠的系统，以达到人脑所具有的优良特性，是人们非常关心的问题．早在 50 年代，冯·诺依曼等人就对此问题进行过研究，但限于当时的理论水平和技术条件，他们不可能对此问题作出更好的解答．神经网络理论及 VLSI 技术的出现与发展为我们提供了解决问题的可能．

以下本文将给出一个一般的由不可靠元件构造可靠系统的原则，然后提出基本可靠系统和可靠系统概念，并证明了它们的性质，最后是一个用 BP 模型实现可靠系统的例子．

二、冗余原则及基本可靠系统性质

冗余原则． 假设有一个系统是由 $n(n>1)$ 个同类元件组成的，它们相互独立．当任意 k_0 个或 k_0 个以上的元件是好的时，系统就是好的．

本文于 1989 年 11 月 21 日收到．

记 $\alpha = k/n$, $\alpha_0 = k_0/n$. 称 n 为**系统规模**, k_0 为系统**绝对阈值**, α_0 为系统**相对阈值**. 显然应有 $k_0 > 0$. 当 $k_0 = n$ 时,相当于系统是串联的. 由于串联系统不具备所要求的性质,所以不予讨论. 因此, $0 < k_0 < n$, $0 < \alpha_0 < 1$.

定义 1. 当一个系统满足冗余原则时,称它为**基本可靠系统**.

假定每个元件的可靠度为 $p(0 \leqslant p \leqslant 1)$, 则 n 个元件有 k 个是好的概率 $P(n, k)$ 为

$$P(n, k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \tag{1}$$

其中, $C_n^k = n!/k!(n-k)!$.

记基本可靠系统可靠度为 $R(p, n, k_0)$, 则

$$R(p, n, k_0) = \sum_{k=k_0}^{n} P(n, k) = \sum_{k=k_0}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}. \tag{2}$$

基本可靠系统具有下列性质:

1) $R(0, n, k_0) = 0$, $R(1, n, k_0) = 1$; 2) $R(p, n, k_0)$是一个 p 的单调增函数; 3) 当 $0 < p < 1$ 时, $R(p, n, k_0)$ 在 p 方向有一个而且仅有一个拐点 p_0, $p_0 = (k_0 - 1)/(n-1) = (n\alpha_0 - 1)/(n-1)$; 4) 当 α_0 保持不变时,

$$\lim_{n \to \infty} R(p, n, k_0) = u(p - \alpha_0),$$

其中 $u(x)$ 为单位阶跃函数.

证明. 1) 这是显而易见的,证明省略.

2) 记 $r(p, n, k_0)$ 为 $R(p, n, k_0)$ 在 p 点对 p 的偏导数,即

$$r(p, n, k_0) = \partial R / \partial p. \tag{3}$$

为了证明 $R(p, n, k_0)$ 是 p 的单调增函数,以下首先证明

$$r(p, n, k_0) = k_0 C_n^{k_0} p^{k_0 - 1} (1-p)^{n-k_0}. \tag{4}$$

由二项式定理

$$(1-p)^{n-k} = \sum_{i=0}^{n-k} C_{n-k}^i (-1)^i p^i, \tag{5}$$

将(5)式代入(2)式得

$$R(p, n, k_0) = \sum_{k=k_0}^{n} \sum_{i=0}^{n-k} C_n^k C_{n-k}^i (-1)^i p^{i+k}. \tag{6}$$

作变换 $i + k = m$, 则 $i = m - k$, (6) 式变为

$$\begin{aligned} R(p, n, k_0) &= \sum_{k=k_0}^{n} \sum_{m=k}^{n} C_n^k C_{n-k}^{m-k} (-1)^{m-k} p^m \\ &= \sum_{m=k_0}^{n} \sum_{k=k_0}^{m} C_n^k C_{n-k}^{m-k} (-1)^{m-k} p^m. \end{aligned} \tag{7}$$

由(3)式和(7)式得

$$r(p, n, k_0) = \sum_{m=k_0}^{n} \sum_{k=k_0}^{m} m C_n^k C_{n-k}^{m-k} (-1)^{m-k} p^{m-1}. \tag{8}$$

作变换 $m - k_0 = j$, 则 $m = j + k_0$, (8)式变为

$$r(p, n, k_0) = \sum_{j=0}^{n-k_0} \sum_{k=k_0}^{j+k_0} (j + k_0) C_n^k C_{n-k}^{j+k_0-k} (-1)^{j+k_0-k} p^{j+k_0-1}$$

$$= p^{k_0-1} \sum_{j=0}^{n-k_0} \sum_{k=k_0}^{j+k_0} (j + k_0) C_n^{j+k_0} C_{j+k_0}^k (-1)^{j+k_0-k} p^j$$

$$= p^{k_0-1} \sum_{j=0}^{n-k_0} (j + k_0) C_n^{j+k_0} (-1)^{j+k_0} \left(\sum_{k=k_0}^{j+k_0} C_{j+k_0}^k (-1)^k \right) p^j. \tag{9}$$

可以证明

$$\sum_{k=k_0}^{j+k_0} C_{j+k_0}^k (-1)^k = (-1)^{k_0} C_{j+k_0-1}^{k_0-1}.$$

所以,(9)式变为

$$r(p, n, k_0) = p^{k_0-1} \sum_{j=0}^{n-k_0} (j + k_0) C_n^{j+k_0} C_{j+k_0-1}^{k_0-1} (-1)^j p^j$$

$$= k_0 C_n^{k_0} p^{k_0-1} \sum_{j=0}^{n-k_0} C_{n-k_0}^j (-1)^j p^j = k_0 C_n^{k_0} p^{k_0-1} (1 - p)^{n-k_0},$$

(4)式得证.

可以看出，$r(p, n, k_0)$ 是一个 β 分布的密度函数. 显然有 $r(p, n, k_0) \geqslant 0$，所以，$R(p, n, k_0)$ 是 p 的单调增函数.

3) 由(4)式容易证明,当 $0 < p < 1$ 时，$R(p, n, k_0)$ 的唯一拐点为

$$p_0 = (k_0 - 1)/(n - 1) = (n\alpha_0 - 1)/(n - 1). \tag{10}$$

4) 当 n 和 k_0 很大,而 α_0 保持不变时，使用 Stirling 公式表示阶乘，由(4)式可得

$$r(p, n, k_0) = \frac{n}{\sqrt{2\pi(n-1)p_0(1-p_0)}} \left[\left(\frac{p}{p_0}\right)^{p_0} \left(\frac{1-p}{1-p_0}\right)^{1-p_0} \right]^{n-1}. \tag{11}$$

因 n 很大,而 α_0 保持不变,由(10)式，$p_0 = \alpha_0$，(11)式变为

$$r(p, n, k_0) = \frac{n}{\sqrt{2\pi(n-1)\alpha_0(1-\alpha_0)}} \left[\left(\frac{p}{\alpha_0}\right)^{\alpha_0} \left(\frac{1-p}{1-\alpha_0}\right)^{1-\alpha_0} \right]^{n-1}. \tag{12}$$

考虑函数

$$f(p) = \left(\frac{p}{\alpha_0}\right)^{\alpha_0} \left(\frac{1-p}{1-\alpha_0}\right)^{1-\alpha_0},$$

$p = \alpha_0$ 时，f 取极大值,且 $f(\alpha_0) = 1$，此时

$$r(\alpha_0, n, k_0) = \frac{n}{\sqrt{2\pi(n-1)\alpha_0(1-\alpha_0)}}. \tag{13}$$

当 $n \to \infty$ 时，$r(\alpha_0, n, k_0) \to \infty$. 由于 $p = \alpha_0$ 为极大点，且 $f(\alpha_0) = 1$，所以当 $p \neq \alpha_0$ 时，$f(p) < 1$；当 $n \to \infty$ 时,由(12)式有 $r(p, n, k_0) \to 0$. 又由于 $R(0, n, k_0) = 0$，由(3)式得

$$R(p, n, k_0) = \int_0^p r(x, n, k_0) dx. \tag{14}$$

所以,对任意的 n 和 k_0 有 $\int_0^1 r(x, n, k_0) dx = R(1, n, k_0) = 1$，由此得:

定理 1. $\lim\limits_{n\to\infty} r(p, n, k_0) = \delta(p-\alpha_0)$. 其中，$0 \leqslant p \leqslant 1$，$\delta(x)$ 为单位脉冲函数.

由(14)式得

$$\lim_{n\to\infty} R(p, n, k_0) = \lim_{n\to\infty}\int_0^p r(x, n, k_0)dx = \int_0^p \lim_{n\to\infty} r(x, n, k_0)dx$$

$$= \int_0^p \delta(x-\alpha_0)dx = u(p-\alpha_0).$$

图 1 是几个典型的 $R(p, n, k_0)$ 曲线.

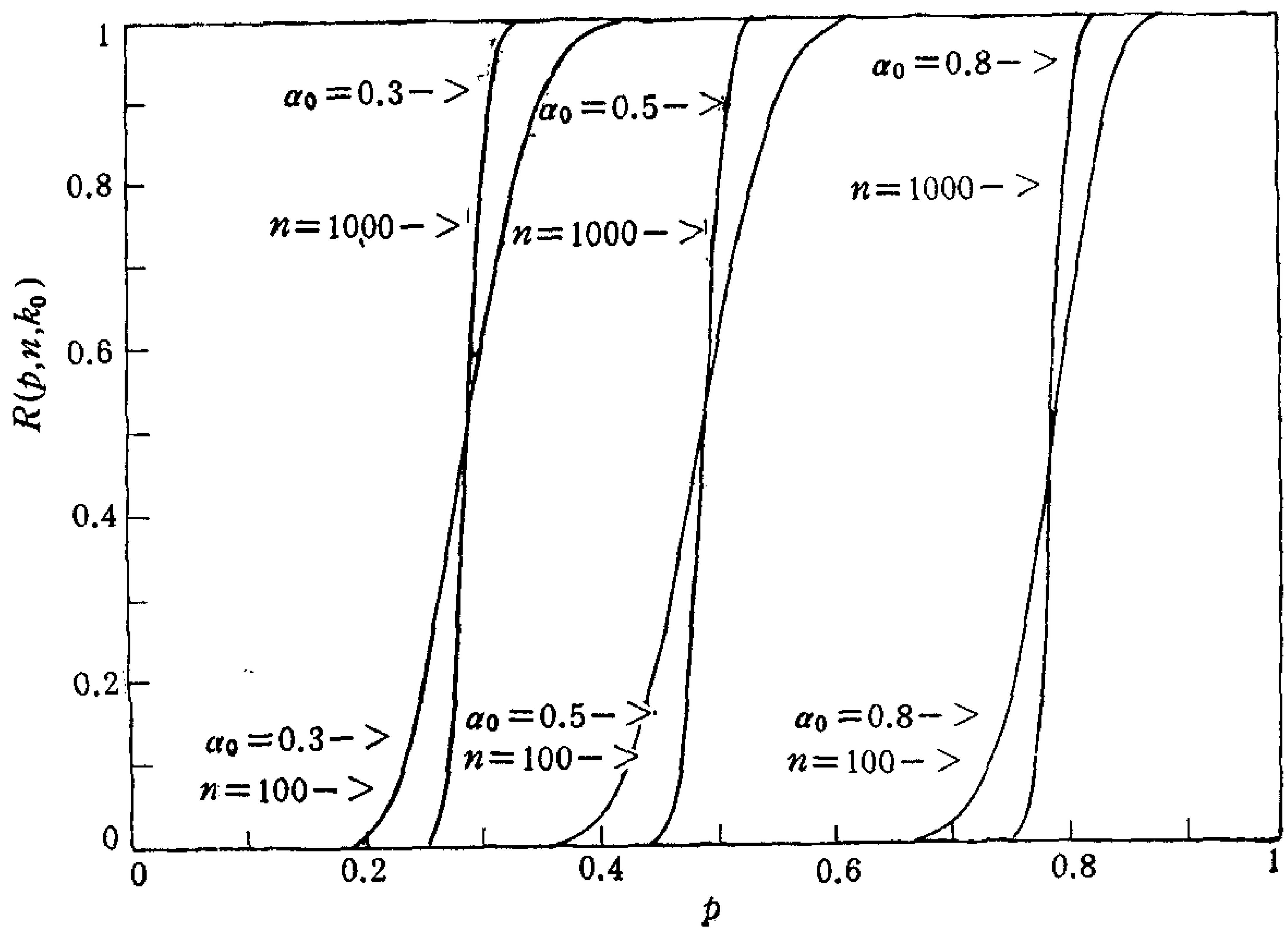

图 1

定义 2. p_t 称为一个系统的转折点，如果 $\lim\limits_{n\to\infty} R(p, n, k_0) = u(p-p_t)$.

定理 2. 基本可靠系统的转折点 $p_t = \alpha_0$.

三、可靠系统及其性质

假定有一个系统由 m 个部件组成，第 i 个部件可靠度为 R_i，$i=1, 2, \cdots, m$，系统可靠度为 R_s，记 $R=(R_1, R_2, \cdots, R_m)$，则 R_s 为 R 的函数，记为 $R_s = R_s(R)$. 记 $\bar{0}=(0, 0, \cdots, 0)$，$\bar{1}=(1, 1, \cdots, 1)$.

定义 3. 如果一个系统的可靠度函数 $R_s(R)$ 满足下列条件，则称其为**单调关联系统**. 1) $R_s(\bar{0})=0$, $R_s(\bar{1})=1$; 2) $\partial R_s/\partial R_i \not\equiv 0$, $i=1,2,\cdots,m$; 3) $\partial R_s/\partial R_i \geqslant 0$, $i=1, 2, \cdots, m$.

很多系统都是单调关联系统，如串联系统，并联系统，串、并混联系统和桥式系统.

定义 4. 如果一个单调关联系统的每个部件都是基本可靠系统，则称它为**可靠系统.**

显然，基本可靠系统也是一种可靠系统.

以下考虑一种特殊的情况，即假定可靠系统的所有部件相互独立. 假定可靠系统的第 i 个部件规模为 n_i，绝对阈值为 k_{i0}，每个元件的可靠度均为 p_i，$i=1, 2, \cdots, m$,

第 i 个部件的可靠度为 $R_i(p_i, n_i, k_{i0})$. 以下记 $N=(n_1, n_2, \cdots, n_m)$, $P=(p_1, p_2, \cdots, p_m)$, $K=(k_1, k_2, \cdots, k_m)$, $K_0=(k_{10}, k_{20}, \cdots, k_{m0})$, $\alpha_i=k_i/n_i$, $\alpha_{i0}=k_{i0}/n_i$, $i=1, 2, \cdots, m$, $A=(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$, $A_0=(\alpha_{10}, \alpha_{20}, \cdots, \alpha_{m0})$, $R(P, N, K_0)=(R_1(p_1, n_1, k_{10}), R_2(p_2, n_2, k_{20}), \cdots, R_m(p_m, n_m, k_{m0}))$.

类似于基本可靠系统，有 $\bar{0}<K_0<N$, $\bar{0}<A_0<\bar{1}$. 记可靠系统的可靠度为 $R_s(P, N, K_0)$，则应有 $R_s(P, N, K_0)=R_s(R(P, N, K_0))$.

可靠系统具有下列性质:

1) $R_s(\bar{0}, N, K_0)=0$, $R_s(\bar{1}, N, K_0)=1$; 2) $R_s(P, N, K_0)$ 是 p_i 的单调增函数, $i=1, 2, \cdots, m$; 3) 当 $\bar{0}<P<\bar{1}$ 时, $R_s(P, N, K_0)$ 在 p_i 方向有一个而且仅有一个拐点 p_{i0}, $p_{i0}=(k_{i0}-1)/(n_i-1)=(n_i\alpha_{i0}-1)/(n_i-1)$.

记 $x_i=u(p_i-\alpha_{i0})$, $i=1, 2, \cdots, m$, $X=(x_1, x_2, \cdots, x_m)$. $P=P(X)$ 表示,若 $x_i=1$, 则 $p_i>\alpha_{i0}$, 若 $x_i=0$, 则 $p_i<\alpha_{i0}$, $i=1, 2, \cdots, m$. $N\to\infty$表示,对所有 $i=1, 2, \cdots, m$, $n_i\to\infty$; 4) 当 A_0 保持不变时, $\lim\limits_{N\to\infty}R_s(P, N, K_0)=R_s(X)$. 其中 $\bar{0}\leqslant X\leqslant\bar{1}$. 因为 $X=\bar{0}$ 相当于 $P<A_0$, $X=\bar{1}$ 相当于 $P>A_0$, 所以有:

推论 1. 当 A_0 保持不变时,对任意的 $P<A_0$, $\lim\limits_{N\to\infty}R(P, N, K_0)=0$; 对任意的 $P>A_0$, $\lim\limits_{N\to\infty}R_s(P, N, K_0)=1$.

令 $p_1=p_2=\cdots=p_m=p$, 则 $R_s(P, N, K_0)=R_s(p, N, K_0)$.

定理 3. 可靠系统的转折点为 $p_t=\inf\{p, R_s(X)=1\}$.

定理 4. 当 $p_i>p_t$, $i=1, 2, \cdots, m$ 时, $\lim\limits_{N\to\infty}R_s(P, N, K_0)=1$.

对于串联系统 $p_t=\max\{\alpha_{i0}, i=1, 2, \cdots, m\}$, 对于并联系统

$$p_t=\min\{\alpha_{i0}, i=1, 2, \cdots, m\}.$$

四、用 BP 模型构造可靠系统

从前面的分析可以看出,要使一个系统成为可靠系统,必须满足两个条件: 一是系统有并行分布式处理的能力,二是系统规模要大,或者说其元件数要足够多. 现有的许多神经网络模型都具有并行分布式处理能力,而 VLSI 技术又可以满足对系统规模的要求.本节将以 BP 模型为例构造可靠系统.

最简单的 BP 网络表示在图 2 中，它实际上是一个 Perceptron. I_0, I_1 和 I_2 为输入, O 为输出, $I_0=1$. W_0、W_1 和 W_2 分别为 3 个连枝的权重. 为简便起见,此处也称 3 个连枝为 W_0、W_1 和 W_2, $O=1/(1+e^{-(W_0+W_1I_1+W_2I_2)})$.

假定给定一组样本集,即一组输入 SI_{1i}、SI_{2i}, 及要求的相应输出 SO_i, $i=1, 2, \cdots, s$, 运用 BP 学习规律,通过对样本集的学习,即可确定网络中的权重 W_0、W_1 和 W_2. 这时,当输入给定为 SI_{1i}、SI_{2i} 时,即可得到所要求的输出 SO_i. 当然，实际输出和所要求的值有一定误差,但误差保持在给定范围 Δ_1 内. 为了简化分析,这里假定所有节点及

W_0 是完全可靠的。现规定，连枝失效即为其权重等于 0，W_1 为部件 1，W_2 为部件 2。如果对所有 $i=1, 2, \cdots, s$，下列条件满足，即当 $I_1=SI_{1i}$，$I_2=SI_{2i}$ 时，$O=SO_i$，且误差保持在 Δ_2 内，则图 2 的系统是可靠的。这里，$\Delta_2 \geqslant \Delta_1$，但小于一个规定数。通过计算可以发现，只有当 W_1 和 W_2 均为可靠时，系统才是可靠的，所以它是一个串联系统。若 R_1 和 R_2 分别为 W_1 和 W_2 的可靠度，R_s 为系统可靠度，则应有 $R_s=R_1R_2$。现在用 n_1 个相同连枝代替 W_1，每个连枝权重为 W_1/n_1；用 n_2 个相同连枝代替 W_2，每个连枝权重为 W_2/n_2，得到图 3。

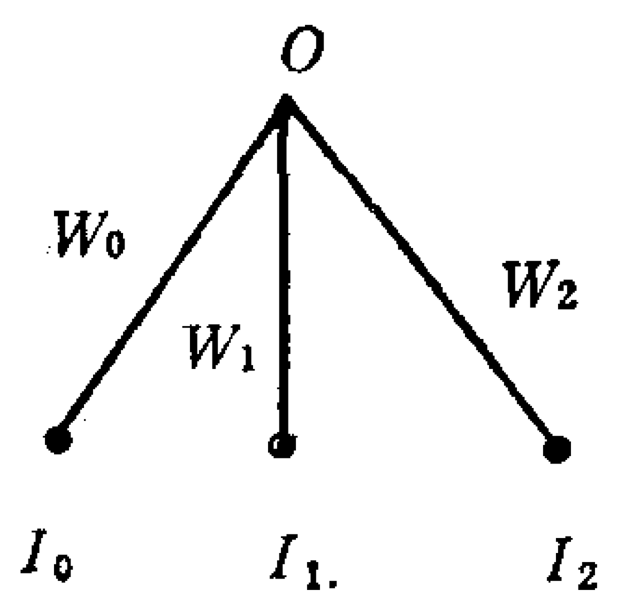

图 2

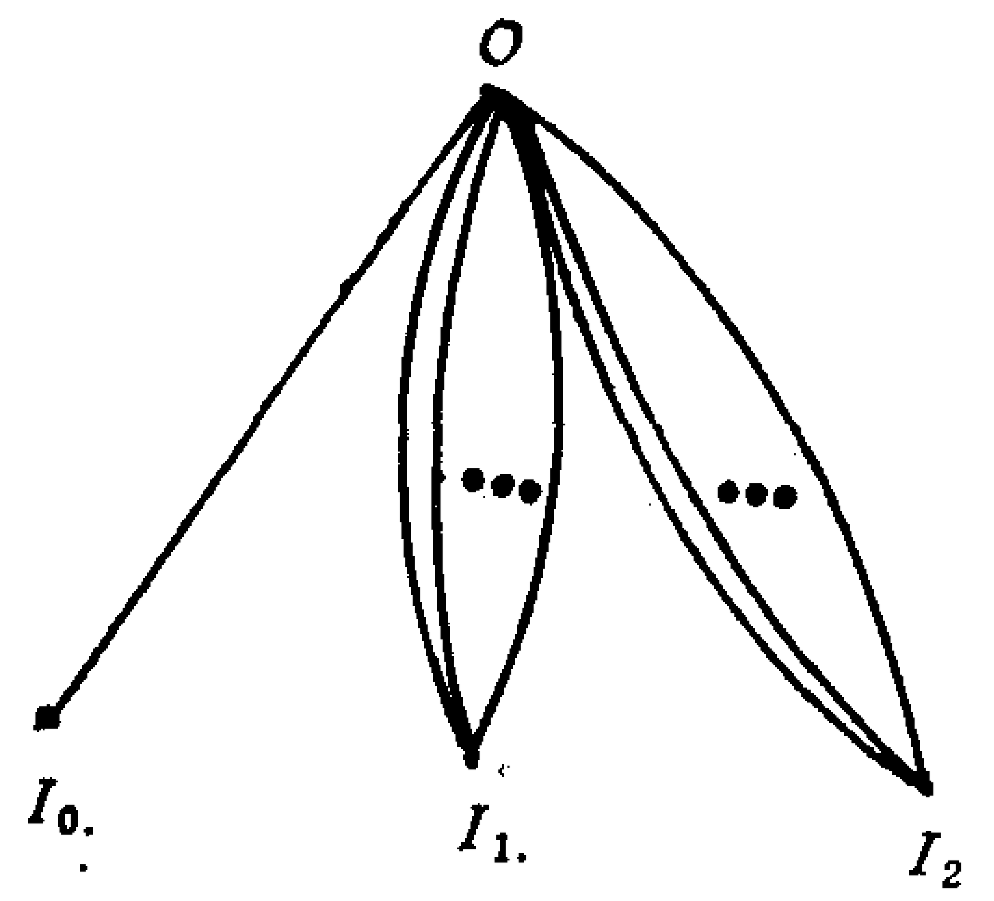

图 3

可以证明，用上述方法构成的部件 1 和部件 2 均为基本可靠系统。考虑样本集为“或门”的情形(见表 1)。

表 1

	SI_1	SI_2	SO		SI_1	SI_2	SO
样本1	0	0	0	样本3	1	0	1
样本2	0	1	1	样本4	1	1	1

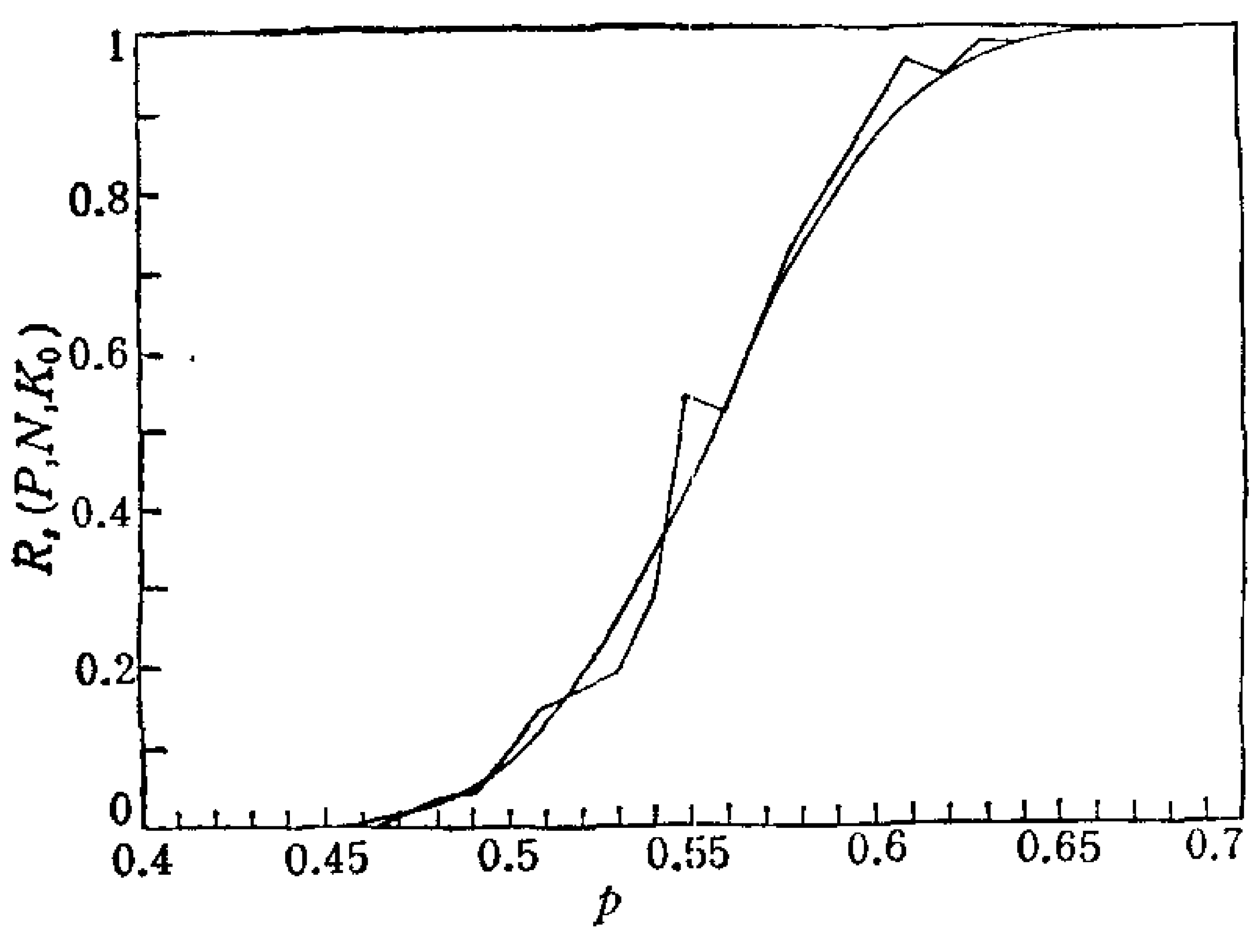

图 4

随机选取权重初值为 $+0.5$ 或 -0.5，对图 2 的网络进行训练，输出误差为 $\Delta_1=0.1$，可得各连枝权重

$$W_0=-2.1975430;\quad W_1=4.9210730;$$
$$W_2=4.9236680.$$

取 $\Delta_2=0.4$，可以算出 $\alpha_{10}=0.528951$，$\alpha_{20}=0.528672$。

假定部件 1 的连枝可靠度和部件 2 的连枝可靠度均为 p，取 $n_1=n_2=100$，可以计算出图 2 系统的可靠性曲线（参见图 4 中的单调曲线），图 4 中的非单调曲线为模拟结果。

可以发现，α_{10} 和 α_{20} 与 Δ_1 和 Δ_2 有关。Δ_1 越小，Δ_2 越大，α_{10} 和 α_{20} 就越小，系统性能也就越好。

五、讨　论

显然，用不可靠元件构造可靠系统的首要条件是冗余，即在 n 个元件中，允许最多有 $n-k_0+1$ 个元件失效．这也可称为表决系统，但这种表决系统与以前的表决系统有本质不同．这种表决是系统本身的性质，而以前的表决是一种人为的规定．

由于转折点由 A_0 决定，若能构造出 A_0 很小的系统，则对于很不可靠的元件，即可靠度 P 很小的元件，也能使系统可靠度 R_s 任意接近于 1．

系统可靠性是由 N、A_0 及 P 决定的． A_0 越小，系统可靠性能越好． P 是一个可变参数，随着时间推移，P 将减小；N 是系统的规模，N 越大，系统可靠性能也就越好．但对于一般的工程系统，由于成本及体积等原因，N 不可能很大． VLSI 技术及生物技术将会使 N 很大，而成本和体积却保持在合理的限度内．

参　考　文　献

[1] 钱学森，宋健，工程控制论，科学出版社，1981．
[2] Neuman, Von J., Probabilistic Logic and Synthesis of Reliable Organisms from Unreliable Components, Automata Studies, Princeton University Press, New Jersey, 1956.
[3] Lippmann, R. P., An Introduction to Computing with Neural Nets, *IEEE ASSP Magazine*, **4** (1987), 4 -22.

THE SYNTHESIS OF RELIABLE SYSTEMS FROM UNRELIABLE COMPONENTS AND ITS REALIZATION USING NEURAL NETWORKS

YAO ZENGQI
(*Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences*)

ABSTRACT

This paper studies the plausibility of constructing reliable system from unreliable components by using redundancy. One important property, among several shown in the paper, is that the reliability of the entire system can approaches 1 as the degrees of the reliability of the components exceed a turning point of the system reliability function, and the number of elements used tends to ∞. An example of synthesizing such system using neural networks is given.

Key words ——Reliable system; reliability; redundancy principle; neural networks; BP model.