第16卷 第5期
1990年9月

自动化学报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 16, No. 5
Sept., 1990

结构随机变化系统的多层递阶预报

韩志刚
(哈尔滨黑龙江大学应用数学研究所)

摘　　要

本文考虑了模型结构和参数都可能时变的系统的预报问题，应用了结构时变的动态系统在它的每种结构中逗留时间的概念，给出了模型结构改变的统计检验方法，并把多层递阶预报方法推广到结构时变的系统.

关键词——预报，随机系统，模型结构，逗留时间.

一、引　　言

多层递阶预报方法[1]在油田、天气、经济等系统中，已有了一系列成功的应用[2]. 一般来说，其预报精度都比非多层递阶预报方法有所提高. 这是由于多层递阶预报方法充分考虑了系统参数时变特性的结果. 然而通过大量实践可以发现，仅考虑参数时变系统往往是不够的，有些实际系统的模型在不同的期间可能有不同的结构. 所以考虑模型结构时变或结构与参数皆时变的系统的预报问题，是有理论和实践意义的.

对这一问题，在文献[3]中已进行了初步的讨论，给出了模型结构变化的一种判据. 这种判据以模型的预报误差为基础，导出了一种具有遗忘因子的递推算法，并称其为预报准确度判别法[4]. 这种判别法对于信噪比较大的系统是比较有效的，但当噪声的功率较大时，应用这种判别法效果就不太理想了. 为克服这一缺点，本文引入了系统模型结构改变的统计假设检验判别法和应用了结构逗留时间的概念. 结构逗留时间的统计特性将为系统的结构变化提供重要的信息，所以首先讨论了逗留时间的统计分布，接着引入了判定系统模型结构的 F-检验法. 由于结构随机变化的系统的变化较复杂，对其结构的判定仅依赖一种方法往往不易奏效. 因此建议综合应用各种方法，以求所得的结论尽可能的符合实际.

二、结构逗留时间及其分布

设系统 S 可能有 n 种不同的结构，结构的变化是随机发生的. 每种结构的数学模型的基本框架是已知的，但可能含有未知参数. 为叙述方便，把系统的每一种结构叫做一种

本文于1988年3月22日收到.

结构状态，用 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 表示结构状态的集合，用 τ_k 表示系统 S 的结构状态第 k 次改变的时间. 假定 τ_k 以后系统的结构已进入状态 i，令 $\tau(k, i) = \tau_{k+1} - \tau_k$，那么 $\tau(k, i)$ 就是系统 S 在 τ_k 以后于状态 i 中逗留的时间，一般地说它依赖于 k 和 i.

这里仅考虑 $\tau(k, i)$ 与 k 和 i 皆无关这种最简单的情形. 此时把 $\tau(k, i)$ 记成 τ，并称 τ 为系统 S 在每个结构状态中的逗留时间. 由于系统结构是随机改变的，所以 τ 是随机变量.

下面确定 τ 所服从的分布，为此令 $F(t) = P\{\tau \leqslant t\}$，即 $F(t)$ 是 τ 的分布函数. 进一步令

$$G(t) = 1 - F(t) = P\{\tau > t\}, \tag{1}$$

即 $G(t)$ 表示系统 S 在一次结构改变之后经过时刻 t 结构尚未改变的概率. 为寻求 $F(t)$，等价地只要确定出 $G(t)$ 就够了.

设 E_1 表示事件: {从上一次结构改变开始，经过时间 t，系统 S 的结构尚无改变}，E_2 表示事件: {从时刻 t 到时刻 $t + \Delta t$，系统 S 无结构变化}. 令 $P(t, t + \Delta t)$ 为系统从上一次结构改变开始，经过时间 t 结构尚无改变，而到时刻 $t + \Delta t$ 结构仍无改变的概率，则有

$$P(t, t + \Delta t) = P\{E_2 | E_1\} = P\{E_2 E_1\}/P\{E_1\}.$$

但 E_2E_1 表示事件: {从上一次结构改变开始，经过时间 $t + \Delta t$，结构尚无改变}，所以有

$$P\{E_2E_1\} = G(t + \Delta t), \quad P\{E_1\} = G(t), \text{ 从而}$$

$$P(t + \Delta t) = G(t + \Delta t)/G(t). \tag{2}$$

进一步假设: 系统 S 在区间 $[t, t + T]$ 中没有结构改变的概率仅与 T 有关，而不依赖于 t，于是 $P(t, t + T) = G(T)$. 在(2)式中令 $\Delta t = T$，则有

$$G(t + T) = G(t) \cdot G(T), \tag{3}$$

自然地有 $G(0) = 1$. 不难看出满足等式(3) 的 $G(t)$ 必有形式 $G(t) = e^{-\lambda t}$，其中 λ 是某个适当的常数. 由此得出

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t} \tag{4}$$

即逗留时间 τ 服从指数分布. 不难算出 τ 的均值和方差如下:

$$E\{\tau\} = \int_0^\infty t\lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}, \quad \mathrm{Var}\{t\} = \int_0^\infty \lambda t^2 e^{-\lambda t} dt - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

在应用中，可以用 τ 的样本平均值和抽样方差来近似地代替 $E\{\tau\}$ 及 $\mathrm{Var}\{\tau\}$，它们分别是

$$\bar{\tau} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \tau(k), \quad S^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^{N} (\tau(k) - \bar{\tau})^2,$$

其中 $\tau(k)$ 表示 τ 的第 k 个观测值，N 是 τ 的样本个数.

三、结构改变的统计假设检验方法

已经假定系统 S 有 n 种不同的结构，每种结构的数学模型的框架是已知的. 如果用

$y(k)$ 表示系统 S 的输出，$u(k)$ 表示输入，并且假定各模型都已写成了向前一步预报模型的形式，则可以将 n 个模型表示成：

$$
\begin{aligned}
y(k) &= M_1(\boldsymbol{Y}_{k-1},\ \boldsymbol{U}_{k-1},\ \theta_1,\ k) + e(k),\ \text{当}\ k\in[\tau_{k_1},\ \tau_{k_1+1}],\\
y(k) &= M_2(\boldsymbol{Y}_{k-1},\ \boldsymbol{U}_{k-1},\ \theta_2,\ k) + e(k),\ \text{当}\ k\in[\tau_{k_2},\ \tau_{k_2+1}],\\
&\ \ \vdots\\
y(k) &= M_n(\boldsymbol{Y}_{k-1},\ \boldsymbol{U}_{k-1},\ \theta_n,\ k) + e(k),\ \text{当}\ k\in[\tau_{k_n},\ \tau_{k_{n+1}}].
\end{aligned}
$$

此处，$e(k)$ 是零均值的白噪声，τ_{k_i}，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$，表示系统结构第 k_i 次改变的时间. 区间 $[\tau_{k_1},\ \tau_{k_1+1}]$ $[\tau_{k_2},\ \tau_{k_2+1}]$，$\cdots$，$[\tau_{k_n},\ \tau_{k_n+1}]$ 互不相重叠，但可能有共同的端点. 每个 $[\tau_{k_i},\ \tau_{k_i+1}]$ 可重复的表示不同的区间，并且

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{Y}_{k-1} &= \{y(0),\ y(1),\ \cdots,\ y(k-1)\},\\
\boldsymbol{U}_{k-1} &= \{u(0),\ u(1),\ \cdots,\ u(k-1)\}.
\end{aligned}
$$

假定已有了“良好的”递推算法，可依据观测数据，用上述的 n 个模型估计出 n 个未知参数向量 $\theta_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 之值 $\hat{\theta}_i(k)$. 由于在每个时刻，在这 n 个模型中只有一个真正描写系统 S，而其余的都是虚假的. 所以在 n 个参数向量估值中也仅有一个是需要的. 如果在 k 时刻系统 S 的结构状态是 j，就说此时的观测数据与结构 j 相匹配.

如果在 k 时刻已知观测数据与系统的结构 j 相匹配，而 $\hat{\theta}_j(k+1|k)$ 表示参数 θ_j 依据 k 时刻以前的估值所得出的预报值，那么如果在 $k+1$ 时刻观测数据仍与结构 j 相匹配，而且参数预报算法足够好，则可以认为预报误差

$$\varepsilon_j(k+1) = Y(k+1) - M_j(\boldsymbol{Y}_k,\ \boldsymbol{U}_k,\ \hat{\theta}_j(k+1|k),\ k+1)$$

是白噪声 $e(k)$ 的抽样值，而其它的 $\varepsilon_i(k+1)$：

$$\varepsilon_i(k+1) - Y(k+1) - M_i(\boldsymbol{Y}_k,\ \boldsymbol{U}_k,\ \hat{\theta}_i(k+1|k),\ k+1),\ i\neq j,$$

一般地说，则不能看作是白噪声 $e(k)$ 的抽样值.

进一步假定 n 个模型中，最大阶数是 m，以及有常数 N 使得逗留时间 τ 满足 $\tau\geqslant N$. 这一假设意味着，系统 S 进入一个新的结构状态后，不会很快改变到另一状态. 取

$$\varepsilon_*(k)^2 = \min_{1\leqslant i\leqslant n}\{\varepsilon_i(k)^2\},$$

引入统计量

$$S^2(k) = \frac{1}{k-M-1}\sum_{h=M}^{k-1}\varepsilon_*(h)^2,$$

M 是一个适当选取的整数，并且满足 $M\geqslant 1$，

$$S_i^2(k) = \frac{1}{m+1}\sum_{h=k-m-1}^{k}\varepsilon_i(h)^2,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n.$$

置　　$$F_i(m+1,\ k-M-1) = S_i^2(k)/S^2(k),\ i=1,\ 2,\cdots,\ n,$$

在 $e(k)$ 为零均值的正态白噪声的假定之下，如果观测数据与结构状态 i 相匹配，则可以认为 $F_i(m+1,\ k-M-1)$ 服从自由度为 $m+1$ 和 $k-M-1$ 的 F 分布[5]. 于是可以得出如下的统计假设检验手续，取置信度 $\alpha=0.95$，由 F 分布表得 $F_{0.95}(m+1,\ k-M-1)$.

如果在 $k-1$ 时刻，已知系统 S 的结构状态是 i_0，而且

$$F_{i_0}(m+1,\ k-M-1) < F_{0.95}(m+1,\ k-M-1),$$

则系统结构状态在 k 时刻仍为 i_0. 如果有

$$F_{i_0}(m+1,\ k-M-1) \geqslant F_{0.95}(m+1,\ k-M-1),$$

以及有某个 i_1, 使得

$$F_{i_1}(m+1,\ k-M-1) < F_{0.95}(m+1,\ k-M-1),$$

则认为在 k 时刻,系统结构状态已产生改变,而且改变到状态 i_1. 如果这种 i_1 不是唯一的,则认为系统的结构状态正处于改变过程中,状态暂不确定,继续进行下一时刻的检验;如果这种 i_1 不存在,则认为系统的结构状态仍为 i_0.

四、结构随机变化系统的多层递阶预报

为简单计,假定系统 S 可能有的结构数是 $n=3$, 并把三个模型简写如下:

$$y(k)=M_1(\theta_1(k))+e(k),\ \text{当}\ k\in[\tau_{k_1},\ \tau_{k_1+1}],$$
$$y(k)=M_2(\theta_2(k))+e(k).\ \text{当}\ k\in[\tau_{k_2},\ \tau_{k_2+1}],$$
$$y(k)=M_3(\theta_3(k))+e(k),\ \text{当}\ k\in[\tau_{k_3},\ \tau_{k_3+1}].$$

由于未知参数可能是时变的,所以把它们写成 $\theta_1(k)$, $\theta_2(k)$ 和 $\theta_3(k)$. 可用种种适宜的算法来估计这些参数,这里推荐两种算法.

算法 1. 广义递推梯度算法[6].

$$\hat{\theta}_i(k)=\hat{\theta}_i(k-1)+\frac{\delta}{\|\nabla_{\hat{\theta}_i(k-1)}M_i(\hat{\theta}_i(k-1))\|^2}\nabla_{\hat{\theta}_i(k-1)}M_i(\hat{\theta}_i(k-1))$$
$$\cdot\{Y(k)-M_i(\hat{\theta}_i(k-1))\},\ i=1,\ 2,\ 3,$$

其中 $\hat{\theta}_i(k)$ 表示 $\theta_i(k)$ 的估值,而

$$\nabla_{\hat{\theta}_i(k-1)}M_i(\hat{\theta}_i(k-1))=\frac{\partial}{\partial\theta}M_i(\theta)\big|_{\theta=\hat{\theta}_i(k-1)},$$

δ 是适当选取的常数.

算法 2. 多项式逼近算法[7].

这种算法的基本点是把时变参数的估计转化成非时变参数的估计,详细介绍可见文献[7].

在以下的讨论中,假定观测数据"足够多",使得在观测过程中,系统 S 的结构状态已有了多次改变.

在参数估计过程中,可以应用本文所提出的 F-检验法或文献[3]或[4]中所提出的预报准确度判别法,来确定系统结构变化的规律,从而可得出结构逗留时间的一系列观测值 $\bar{\tau}(1)$, $\bar{\tau}(2)$, $\cdots$, $\bar{\tau}(l)$, 以及样本均值

$$\bar{\tau}=\frac{1}{l}\sum_{j=1}^{l}\bar{\tau}(j),$$

$\bar{\tau}$ 可以作为 $E\{\tau\}$ 的估值. 由此得出 τ 的分布函数中的重要参数 λ 的估值 $\hat{\lambda}$ 为 $\hat{\lambda}=1/\bar{\tau}$.

至此可以叙述结构随机变化的系统的多层递阶预报方法了,基本步骤如下.

1）依据观测数据，用递推估值算法 1 或 2，对模型 M_1，M_2，M_3 中的未知参数进行估计，设所得的估值是

$$\hat{\theta}_1(m),\ \hat{\theta}_1(m+1),\ \cdots,\ \hat{\theta}_1(N),$$
$$\hat{\theta}_2(m),\ \hat{\theta}_2(m+1),\ \cdots,\ \hat{\theta}_2(N),$$
$$\hat{\theta}_3(m),\ \hat{\theta}_3(m+1),\ \cdots,\ \hat{\theta}_3(N),$$

N是观测数据的组数.

2）在参数估值的同时，用 F-检验法或预报准确度判别法确定时刻N以前的系统结构状态的变化情况，得出结构状态逗留时间的样本值和样本均值 $\bar{\tau}$.

3）确定目前时刻 N，系统结构所处的状态，设其为 i_0，求出系统在结构状态 i_0 中已逗留的时间 τ_{i_0}，进一步得出系统结构状态继续逗留在 i_0 中的期望时间 $\bar{\tau}-\tau_{i_0}$.

4）应用多层递阶方法[1]以 M_{i_0} 为预报模型，进行最大为向前 $\bar{\tau}-\tau_{i_0}$ 步的预报.

可以看出，这种方法当 τ_{i_0} 接近于 $\bar{\tau}$ 时，其预报步长就缩短了，特别是模型结构正在变化时，只能进行向前一步预报. 一旦进入新的结构状态，就又可以进行向前多步预报了.

系统结构状态的变化规律，有时也可以借助于分析诸参数估值序列 $\{\hat{\theta}_i(k)\}$，$i=1, 2, \cdots, n$，的变化情况来求得. 事实上，如果在时间间隔 $[\tilde{\tau}_{k_{i_0}},\ \tilde{\tau}_{k_{i_0}+1}]$ 中，系统处于结构状态 i_0，那么只要递推算法足够好，从 $\hat{\theta}_{i_0}(\tilde{\tau}_{k_{i_0}})$ 到 $\hat{\theta}_{i_0}(\tilde{\tau}_{k_{i_0}+1})$ 之间 $\hat{\theta}_{i_0}(k)$ 的变化就必然表现出一定的规律性，而其余的参数由于模型与观测数据不匹配，其估值的变化规律将是杂乱的. 所以可以借助于诸参数估值的变化规律来确定系统结构状态的变化.

五、计算实例

为简单计，以具有两个结构的系统为例，其模型分别为

S_1: $y(k)=a(k)Y(k-1)+b(k)u(k)$,

S_2: $y(k)=\alpha(k)e^{\beta(k)Y(k-1)}+\gamma(k)u(k-1)$,

其中 $y(k)$ 是输出，$u(k)$ 是输入，$a(k)$、$b(k)$、$\alpha(k)$、$\beta(k)$、$\gamma(k)$ 是未知随机时变参数. 假设已得到如下的一系列观测数据：

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$y(k)$	−0.5	3.6	3	6	7.5	10.8	10.5	9.6	9
$u(k)$	−10	−10	−15	−15	−18	−15	−12	−10	0.7
k	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$y(k)$	12.8	12.8	10	9.8	6.8	11.7	11.2	17.9	10
$u(k)$	−1	−2	−1	−2	1	−1.5	1	−5	−2
	……								
k	51	52	53	54	55	56	57	58	59
$y(k)$	11.79	12.9	14.2	14.8	15.1	13.8	10	9.6	11.3
$u(k)$	−4.5	−5	−6	−6.5	−7.5	−8	−5	−4	−4.5

为进行比较，给出两种预报结果.

第一种情形. 不利用逗留时间所提供的信息，用 $\hat{y}(k)$ 表示预报值，$y(k)$ 表示观测数据，S_i 表示所应用的模型，其结果如下：

k	43	44	45	46	47	48	49	50	51
$y(k)$	12.9	8.8	13.5	9.2	12.2	9.6	10.8	12	11.8
$\hat{y}(k)$	14.2	8.9	13.5	9.15	12.16	9.53	10.73	15.9	10.6
S_i	S_2	S_2	S_2	S_2	S_2	S_2	S_2	S_2	S_1
k	52	53	54	55	56	57	58	59	60
$y(k)$	13	14.2	14.8	15.1	13.8	10	9.6	11.3	14
$\hat{y}(k)$	12.4	13.9	15.4	16	14.9	9.8	6.7	9.8	15.6
S_i	S_1	S_1	S_1	S_1	S_1	S_1	S_1	S_1	S_2

模型结构的改变时刻是 39, 50, 59. 上述结果表明,在模型结构改变时刻附近,预报误差较大;反过来,根据预报误差增大的规律,也可以近似确定模型结构的改变时间.

进一步结合模型参数估值[2],可以得出逗留时间的抽样值: 9, 13, 8, 10, 10, 9. 由此得出平均逗留时间 $\bar{\tau} \approx 10$. 应用这一信息,从时刻 60 系统的结构已进入 S_2, 由参数估值结合逗留时间的变化规律可以得出模型 S_2 的参数满足如下的预报公式[2]:

$$\hat{\alpha}(60+k)=0.43,\quad \hat{\beta}(60+k)=-2,\ \forall k,$$

$$\hat{\gamma}(60+k)=-0.1(60+k).$$

依据模型 S_2 向前预报的结果如下:

k	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
$y(k)$	17	19	6.3	12.8	6.5	13.2	10.05	10.2	11.04	9.8
$y(k)$	14.5	17.7	6.3	12.6	6.5	13.2	10	10.3	11	9.6

由上述结果可见,利用逗留时间的信息以后,预报结果有所改善.

参 考 文 献

[1] 韩志刚,动态系统预报的一种新方法,自动化学报, **9**(1983), No. 3, 161—168.
[2] 韩志刚,多层递阶方法及其应用,科学出版社, 1989 年.
[3] 韩志刚,变结构动态系统的多层递阶预报,黑龙江大学自然科学学报, 1988, No. 1, 16—22.
[4] 韩志刚,一类变结构系统的自适应辨识,控制理论与应用, **5**(1988), No. 4, 86—91.
[5] Söderström, T., On Model Structure Testing On System Identification, *Int. J. Control*, **26**(1977), No. 1.
[6] 韩志刚,动态系统时变参数的辨识,自动化学报, **10**(1984), 330—337.
[7] 韩志刚,动态系统时变参数辨识的一种途径,控制与决策, **4**(1981), No. 5, 1—6.

MULTI-LEVEL RECURSIVE PREDICTION OF SYSTEM WITH RANDOM-VARYING STRUCTURE

Han Zhigang

(Institute of Applied Mathematics, Heilongjiang University)

Abstract

In this paper, the prediction problem of systems with random-varying structure has been studied. The staying-time concept of such systems at every structure is applied and a statistic test method of system structure variation is obtained. Furthermore, the multi-level recursive prediction method is extended to the random-varying structure systems.

Key words ——Prediction; stochastic system; structure; tst aying-time.