

# 奇异摄动型卡尔曼滤波算法及其在互联电力系统负荷频率控制中的应用

南志远 王瑞申

(华北电力学院北京研究生部)

## 摘 要

本文讨论了一种大系统实时随机最优控制算法——奇异摄动型卡尔曼滤波的设计问题。建立了线性定常离散互联电力系统的奇异摄动模型。奇异摄动型卡尔曼滤波每循环一步所需要的计算时间和内存量会大大减小。文中还考虑了控制增益的计算问题。通过对华北互联电力系统 LFC 的仿真证明了其控制效果和奇异摄动型卡尔曼滤波算法的有效性。

**关键词**——随机控制, 电力系统计算机控制, 卡尔曼滤波, 状态估计, 负荷频率控制。

## 一、引 言

电力系统负荷频率控制 (LFC) 的目的就是, 当系统负荷发生变化时, 控制发电机的有功输出, 使系统频率和联络线功率在一定的范围内变化, 保证系统的安全和稳定。

早在五十年代, 就提出了以区域频率与额定值的偏差和联络线功率与计划值的偏差为反馈量的 TBC 控制方式, 它要求每个区域分别调节并吸收本区域变化的负荷; 并以控制简单、容易实现等优点, 至今还广泛应用于电力系统的联络线功率和频率的控制。随着现代控制理论的发展和计算机的广泛应用, 在七十年代初, 美国学者 Elgerd 和 Fosha 等人从控制论的观点, 首先提出了用现代控制理论的方法解决互联电力系统 LFC 问题<sup>[1]</sup>。但是最优控制器的结构复杂, 需要全系统的状态量反馈, 而实际系统中往往有很多量是不可测的。另一方面, 电力系统的负荷包括确定性扰动和随机扰动两部分, 并且系统还会受到各方面的干扰。把互联电力系统作为一个随机系统进行负荷频率的控制, 利用有限的可观测量 (如区域的频率偏差  $\Delta F$  和联络线功率偏差  $\Delta P_{tie}$ ), 用卡尔曼滤波对系统的状态量进行估计, 可以实现随机最优控制。随着电力系统的不断发展, 描述它的状态方程的维数越来越大, 用常规卡尔曼滤波所需要的计算量、占计算机内存和计算时间都相当可观。文献[2]、[3]提出了用解 Chandrasekhar 型方程而不是 Riccati 方程来解决定常、线性、离散系统的滤波问题, 但是当测量维数和控制维数比较高时, 这种方法将失去优越性。奇异摄动理论在离散系统中的发展, 在一定程度上对解决这一问题提供了很好的途径。它是分

析流体力学和非线性技术的传统工具,广泛应用于拥有快、慢变量模型的动力现象,在控制方面的应用也得到了迅速发展<sup>[4,5]</sup>.

具有奇异摄动形的系统是实际问题中经常存在的一种系统.由于许多系统有小的“寄生”参数的存在,如小的时间常数、小的质量块等,或由于大的反馈增益和弱耦合的存在,使描述系统的状态方程的阶数增大.奇异摄动法分析和设计的主要目的就是减小模型中快变量和慢变量的相互关系,降低系统维数,严格限制做为快慢变量比率的摄动小参数 $h$ ,使快变量相对于慢变量的动态响应趋于零.当 $h$ 比较小时,在各自的时域内(快慢子系统)求其近似的响应特性.

在本文中,讨论了利用奇异摄动法设计卡尔曼滤波器,并应用于互联电力系统的负荷频率随机控制中.求出了其零阶、一阶和二阶逼近解并把它们与常规算法解进行了比较,结果表明这些近似解与精确解是非常接近的.

## 二、问题的描述

考虑一个线性定常随机控制系统:

$$\begin{aligned} X(k+1) &= AX(k) + TW(k) + GU(k), \\ Y(k) &= HX(k) + V(k). \end{aligned} \quad (2.1)$$

其中 $X$ 和 $U$ 是 $n$ 维的状态向量和 $m$ 维的控制向量, $Y$ 是 $p$ 维的量测向量, $A$ 、 $G$ 、 $T$ 和 $H$ 是相应维数的常数矩阵, $W$ 和 $V$ 分别是随机扰动向量和随机量测误差向量.初始状态 $X(0) = X_0$ 与 $W$ 、 $V$ 的统计特性为

$$\begin{aligned} E[W(k)] &= 0, & E[V(k)] &= 0, \\ E[W(k)W'(j)] &= Q\delta_{kj}, & E[V(k)V'(j)] &= R\delta_{kj}, \\ E[W(k)V'(j)] &= 0. \end{aligned} \quad (2.2a)$$

$$\begin{aligned} E[X(0)X(0)'] &= P(0), \\ E[X(0)] &= 0. \end{aligned} \quad (2.2b)$$

$$\begin{aligned} E[X(0)W'(k)] &= 0, \\ E[X(0)V'(k)] &= 0. \end{aligned} \quad (2.2c)$$

其中 $k, j = 0, 1, \dots, Q$ 是 $m \times m$ 的半正定阵, $R$ 是 $p \times p$ 半正定阵, $\delta_{kj}$ 是Kronecker函数, $P(0)$ 是 $n \times n$ 的半正定阵.随机系统的二次型性能指标为:

$$\begin{aligned} J &= E \left[ \frac{1}{2} X'(N)Q_0X(N) \right] \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} [X'(k)Q_1X(k) + U'(k)Q_2U(k)], \end{aligned} \quad (2.3)$$

其中 $Q_0$ 和 $Q_1$ 为半正定阵, $Q_2$ 为正定阵.

根据分离定理,有随机状态调节器方程如下:

最优控制律:

$$U(k) = -K(k)\hat{X}(k/k). \quad (2.4)$$

控制增益:

$$K(k) = [Q_2 + G'P(k+1)G]^{-1}G'P(k+1)A, \quad (2.5)$$



$$P(k) = A'P(k+1)A + Q_1 - A'P(k+1)G[Q_2 + G'P(k+1)G]^{-1}G'P(k+1)A, \quad (2.6)$$

$$P(N) = Q_0.$$

预报方程:

$$\hat{X}(k/k-1) = A\hat{X}(k-1/k-1) + GU(k-1), \quad (2.7)$$

$$P(k/k-1) = AP(k-1/k-1)A' + TQT'. \quad (2.8)$$

校正方程:

$$\hat{X}(k/k) = \hat{X}(k/k-1) + L(k)[Y(k) - H\hat{X}(k/k-1)], \quad (2.9)$$

$$P(k/k) = [I - L(k)H]P(k/k-1). \quad (2.10)$$

滤波增益:

$$L(k) = P(k/k-1)H'[R + HP(k/k-1)H']^{-1}. \quad (2.11)$$

方程(2.7)–(2.11)就是卡尔曼滤波方程,  $L(k)$ 是  $n \times p$ 的卡尔曼增益矩阵,  $P(k/k-1)$ 和  $P(k/k)$ 为  $n \times n$ 的预测误差和估计误差方差阵.

### 三、奇异摄动型卡尔曼滤波计算

设具有双时特性的线性定常随机控制系统的奇异摄动方程为

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} X_1(k+1) \\ X_2(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ hA_{21} & hA_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(k) \\ X_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_{11} \\ hG_{21} \end{bmatrix} U(k) + \begin{bmatrix} T_{11} \\ hT_{21} \end{bmatrix} W(k), \\ Y(k) &= [H_{11} \ H_{12}] \begin{bmatrix} X_1(k) \\ X_2(k) \end{bmatrix} + V(k). \end{aligned} \quad (3.1)$$

其中  $X_1(k)$ 和  $X_2(k)$ 分别是  $n_1$ 维慢状态向量和  $n_2$ 维快状态向量,  $A_{ij}$ 、 $G_{ij}$ 、 $T_{ij}$ 和  $H_{ij}$ 分别是  $A$ 、 $G$ 、 $T$ 和  $H$ 的相应维数的分块矩阵,  $0 < h < 1$ 为奇异摄动小参数.

根据奇异摄动理论中的边界层校正法, 假设误差方差阵  $P(\bullet)$  ( $\bullet$ 代表  $k/k$ 或  $k/k-1$ )由两部分组成: 一个  $h$ 的升幂级数(称为外级数)  $P_0(\bullet)$ 和为了补偿初始值的校正级数  $C(\bullet)$ , 即:

$$P(K/k-1) = P_0(k/k-1) + h^k C(k/k-1), \quad (3.2a)$$

$$P(k/k) = P_0(k/k) + h^k C(k/k), \quad (3.2b)$$

$$P_0(\bullet) = \sum_{j=0}^r h^j P^{(j)}(\bullet), \quad (3.3a)$$

$$C(\bullet) = \sum_{j=0}^r h^j C^{(j)}(\bullet). \quad (3.3b)$$

卡尔曼增益阵也可用  $h$ 的级数表示为

$$L(k) = \sum_{j=0}^r h^j L^{(j)}(k). \quad (3.4)$$

(2.8)–(2.11)式中的矩阵也用相应的分块阵代替:

$$\begin{aligned} P(\bullet) &= \begin{bmatrix} P_{11}(\bullet) & P_{12}(\bullet) \\ P_{12}^t(\bullet) & P_{22}(\bullet) \end{bmatrix}, \quad C(\bullet) = \begin{bmatrix} C_{11}(\bullet) & C_{12}(\bullet) \\ C_{12}^t(\bullet) & C_{22}(\bullet) \end{bmatrix}, \\ L(K) &= [L_{11}^t(k) \ L_{21}^t(k)]^t. \end{aligned} \quad (3.5)$$

其中  $P_{11}(\bullet)$  和  $C_{11}(\bullet)$  为  $n_1 \times n_1$  维,  $P_{12}(\bullet)$  和  $C_{12}(\bullet)$  是  $n_1 \times n_2$  维,  $P_{22}(\bullet)$  和  $C_{22}(\bullet)$  是  $n_2 \times n_2$  维,  $L_{11}(k)$  和  $L_{21}(k)$  分别是  $n_1 \times p$  和  $n_2 \times p$  的矩阵。

把式 (3.1)–(3.5) 代入卡尔曼滤波方程, 就可以得到外级数和校正级数的零阶、一阶和高阶的逼近方程<sup>[6]</sup>。零阶逼近方程(外级数):

$$\begin{aligned} P_{11}^{(0)}(k/k-1) &= A_{11}P_{11}^{(0)}(k-1/k-1)A_{11}' + T_{11}QT_{11}', \\ P_{12}^{(0)}(k/k-1) &= 0, \\ P_{22}^{(0)}(k/k-1) &= 0, \\ L_{11}^{(0)}(k) &= B_{11}(k/k-1)H_{11}'N_1, \\ L_{21}^{(0)}(k) &= 0, \\ P_{11}^{(0)}(k/k) &= [I_1 - L_{11}^{(0)}(k)H_{11}]B_{11}(k/k-1), \\ P_{12}^{(0)}(k/k) &= 0, \\ P_{22}^{(0)}(k/k) &= 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

一阶逼近方程(外级数):

$$\begin{aligned} P_{11}^{(1)}(k/k-1) &= A_{11}P_{11}^{(1)}(k-1/k-1)A_{11}' + A_{11}P_{12}^{(1)}(k-1/k-1)A_{12}' \\ &\quad + A_{12}P_{12}^{(1)}(k-1/k-1)A_{11}', \\ P_{12}^{(1)}(k/k-1) &= A_{11}P_{11}^{(0)}(k-1/k-1)A_{21}' + T_{11}QT_{21}', \\ P_{22}^{(1)}(k/k-1) &= 0, \\ L_{11}^{(1)}(k) &= [B_{12}(k/k-1)H_{12}' - B_{11}(k/k-1)H_{11}'N_2]N_1, \\ L_{21}^{(1)}(k) &= B_{12}'(k/k-1)H_{11}'N_1, \\ P_{11}^{(1)}(k/k) &= -[L_{11}^{(1)}(k)H_{11}B_{11}(k/k-1) + L_{11}^{(0)}(k)H_{12}B_{12}'(k/k-1)], \\ P_{12}^{(1)}(k/k) &= [I_1 - L_{11}^{(0)}(k)H_{11}]B_{12}(k/k-1), \\ P_{22}^{(1)}(k/k) &= 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

及外级数的高阶逼近方程, 其中:

$$\begin{aligned} N_1 &= [R + H_{11}B_{11}(k/k-1)H_{11}']^{-1}, \\ N_2 &= N_1[H_{11}B_{12}(k/k-1)H_{12}' + H_{12}B_{12}'(k/k-1)H_{11}'], \\ B_{11}(k/k-1) &= P_{11}(k/k-1), \\ B_{12}(k/k-1) &= P_{12}(k/k-1)/h. \end{aligned} \quad (3.8)$$

校正级数的零阶逼近方程:

$$\begin{aligned} 0 &= A_{11}C_{11}^{(0)}(k-1/k-1)A_{11}' + A_{11}C_{12}^{(0)}(k-1/k-1)A_{12}' \\ &\quad + A_{12}C_{12}^{(0)}(k-1/k-1)A_{11}' + A_{12}C_{22}^{(0)}(k-1/k-1)A_{12}', \\ C_{12}^{(0)}(k/k-1) &= A_{11}C_{11}^{(0)}(k-1/k-1)A_{21}' + A_{11}C_{12}^{(0)}(k-1/k \\ &\quad - 1)A_{22}' + A_{12}C_{12}^{(0)}(k-1/k-1)A_{21}' + A_{12}C_{22}^{(0)}(k-1/k-1)A_{22}', \\ C_{22}^{(0)}(k/k-1) &= 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

为了求解方程 (3.6)、(3.7) 及 (3.9), 必须确定其初值。零阶逼近解的初始条件为:

$$\begin{aligned} C_{12}^{(0)}(0/0) &= P_{12}(0/0), \\ C_{22}^{(0)}(0/0) &= P_{22}(0/0), \\ C_{11}^{(0)}(0/0) &\text{ 可由 (3.9) 式求得,} \\ P_{11}^{(0)}(0/0) &= P_{11}(0/0) - C_{11}^{(0)}(0/0), \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$P_{12}^{(0)}(0/0) = 0,$$

$$P_{22}^{(0)}(0/0) = 0.$$

以及高阶逼近解的初始条件。

相似地可以得到求卡尔曼滤波稳态解的各阶逼近方程。

### 四、控制算法

由于奇异摄动模型的特殊性，随机最优控制的对偶原理不能直接用于控制器的计算。为此必须采取以下的措施：

1. 作变量代换。假设：

$$Z_1(k) = X_1(k),$$

$$Z_2(k) = X_2(k)/h. \tag{4.1}$$

系统的状态方程变成：

$$\begin{bmatrix} Z_1(k+1) \\ Z_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & hA_{12} \\ A_{21} & hA_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1(k) \\ Z_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_{11} \\ G_{21} \end{bmatrix} U(k) + \begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{21} \end{bmatrix} W(k),$$

$$Y(k) = [H_{11} \quad hH_{12}] \begin{bmatrix} Z_1(k) \\ Z_2(k) \end{bmatrix} + V(k). \tag{4.2}$$

2. 假设控制的性能指标中状态变量加权阵  $Q_1$  为

$$Q_1 = \begin{bmatrix} Q_{11} & hQ_{12} \\ hQ_{12}^t & h^2Q_{22} \end{bmatrix}. \tag{4.3}$$

也就是说，如  $Q_{ij}$  为同一数量级的矩阵，那么由于  $h < 1$ ，在控制中相应地加重了慢变量对控制的作用。因为慢变量子系统代表着系统的主要特性部分，因此这一假设在一定意义上也是比较合理的。

3. 假定  $P(k)$  是由一个外级数  $P_0(k)$  和校正级数  $C_p(k)$  组成：

$$P(k) = P_0(k) + h^{N-k}C_p(k). \tag{4.4}$$

由此可以得出与计算卡尔曼增益  $L(k)$  相类似的方程计算控制增益  $K(k)$ <sup>[7]</sup>。

### 五、互联电力系统的负荷频率控制

图 1 所示的是一个两区域的互联电力系统，可以用一个 9 阶的状态方程描述<sup>[8]</sup>，形式如式 (2.1)。其中  $X$  包括联络线功率偏差  $\Delta P_{tie}$ 、频率偏差  $\Delta F_1$  和  $\Delta F_2$  以及区域发电量增益  $\Delta P_{g1}$  和  $\Delta P_{g2}$ ， $Y$  是输出向量：

$$Y = [\Delta F_1 \quad \Delta F_2 \quad \Delta P_{tie}]^t.$$

为了得到奇异摄动模型，可以根据系

统的特征值和特征向量选择一个 5 维的慢变量向量

$$X_1 = [\Delta P_{tie} \quad \Delta F_1 \quad \Delta F_2 \quad \Delta P_{g1} \quad \Delta P_{g2}]^t$$

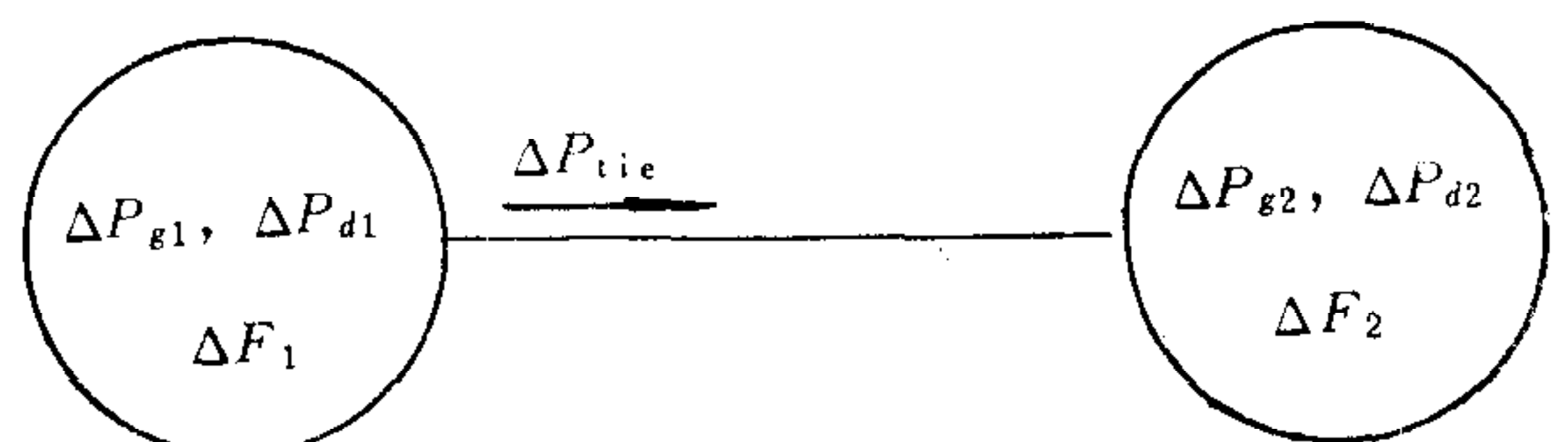


图 1 两区域系统



和一个 4 维的快变量向量  $X_2$ 。

利用前面所讨论的奇异摄动型卡尔曼滤波,就可以解决负荷频率的随机最优控制问题。为了比较,在仿真计算时还求出了常规卡尔曼滤波算法的结果。

假设扰动方差  $Q$  和测量误差方差  $R$  为

$$Q = \text{diag}(0.0004, 0.0004), R = \text{diag}(0.00001, 0.00001, 0.001).$$

表 1 卡尔曼增益每循环一步的计算机时间

算 法	常规算法	奇异摄动型算法	
		零阶逼近	一阶逼近
滤波增益每循环一步需要的计算机 CPU 时间 (秒)	0.084	0.021	0.052

表 2  $\Delta P_{tie}$ 、 $\Delta F_1$  和  $\Delta F_2$  的最大值比较

结果 项目	$W(k) = 0$			$W(k) \neq 0$		
	精确解	逼近解	相对误差	精确解	逼近解	相对误差
$\Delta F_{1\max}$ (Hz)	-0.03110	-0.03110	0	-0.03291	-0.03301	0.3
$\Delta F_{2\max}$ (Hz)	-0.03105	-0.03105	0	-0.03290	-0.03285	0.15
$\Delta P_{tie\max}$ (P.U.MW)	-0.00491	-0.0048	2.24	-0.00623	-0.00599	3.9
$\Delta P_{tie}(\infty)$	0	0	0	0	0	0

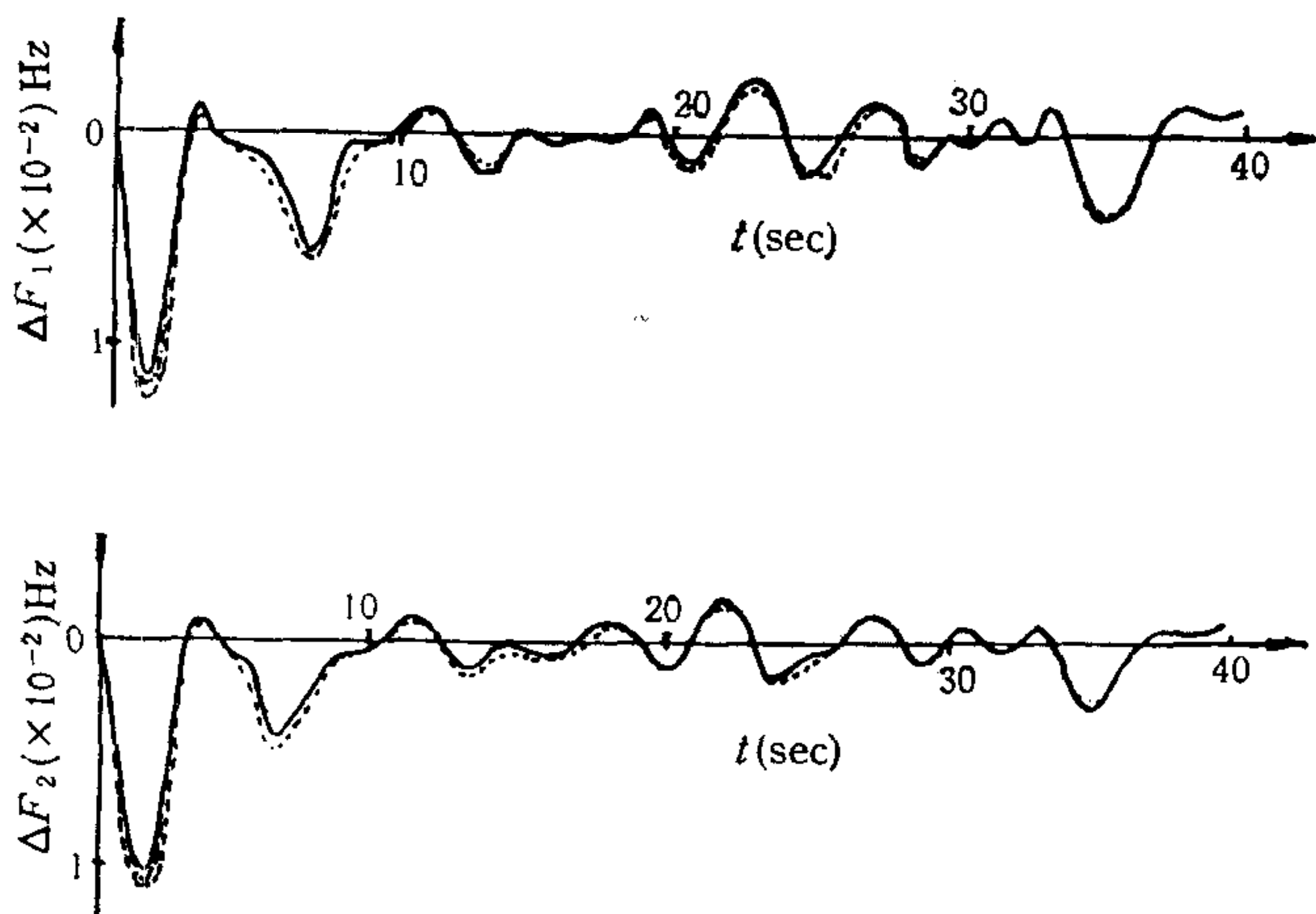


图 2 不考虑 GRC 时的响应曲线  
——精确解,二阶逼近解-----零阶逼近解,一·一·一阶逼近解

对于所考虑的系统,在 UNIVAX-1100/72 计算机上对滤波增益每循环一步所需要的

CPU 时间进行统计(见表 1)。可以看出：奇异摄动型算法零阶逼近比常规算法要快三倍,即使用一阶逼近也比常规算法快。

图 2 所示的是没有考虑发电速率限制 (GRC) 时负荷扰动情况下的响应曲线。负荷扰动包括阶跃扰动  $\Delta P_{d1} = 1\%$ 、 $\Delta P_{d2} = 0$  和随机扰动。图 3 反映的是考虑 GRC 的情况。表 2 列出的是常规算法(精确解)和零阶逼近算法下,  $\Delta P_{tie}$ 、 $\Delta F_1$  和  $\Delta F_2$  的最大值和它们的相对误差(分考虑随机扰动  $W(k) = 0$  和不考虑随机扰动  $W(k) \neq 0$  两种情况)。很明显可以看出零阶、一阶和二阶逼近解与其精确解是非常接近的。

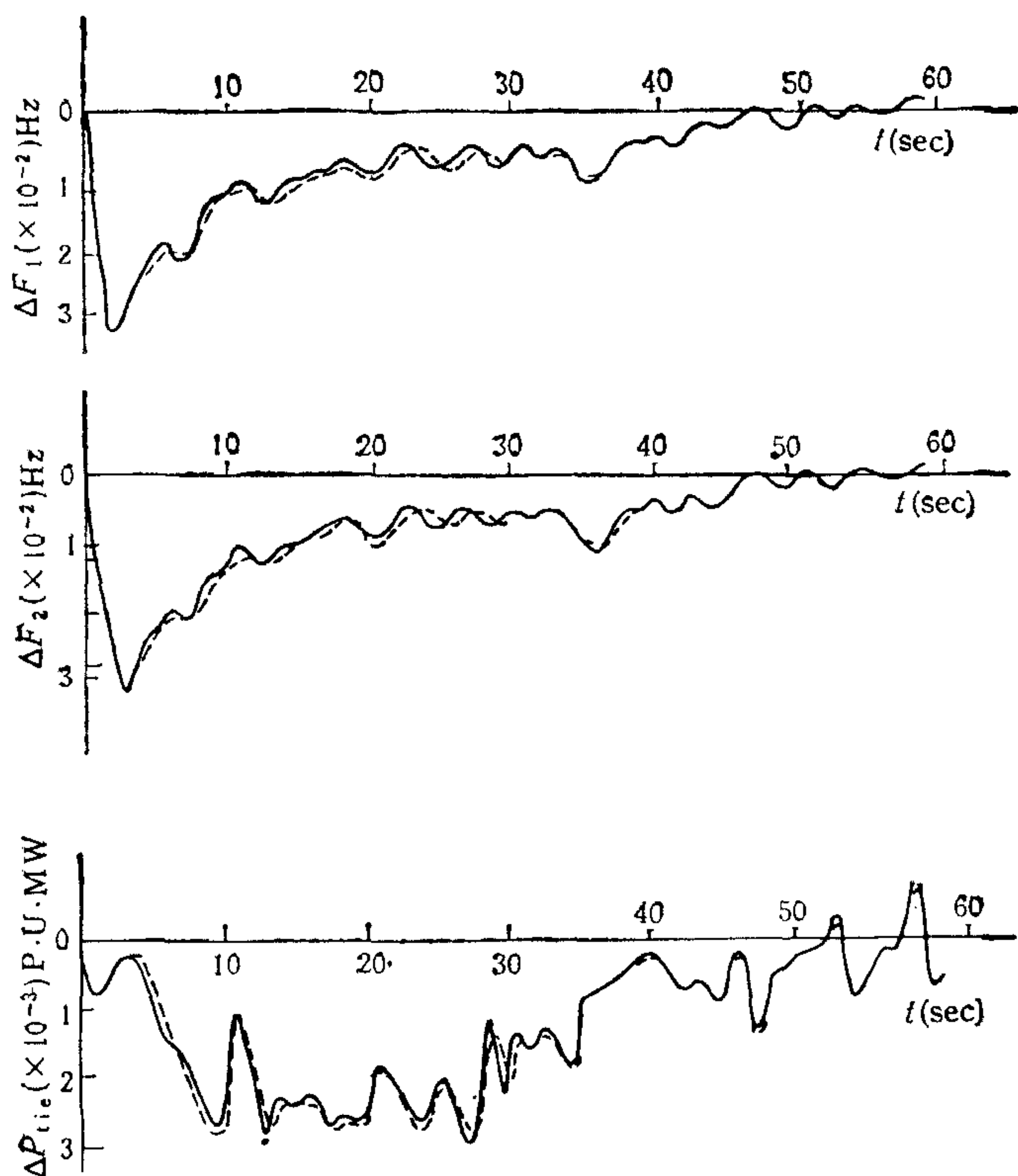


图 3 考虑 GRC 时的响应曲线  
 ——精确解,二阶逼近解    - - - -零阶逼近解,    - · - · - · -一阶逼近解

## 六、结 论

奇异摄动型卡尔曼滤波是一种近似的算法。对于任何的实际情况,只要能用或找到其奇异摄动形式的状态方程,就可以用这种方式进行控制。由于在滤波增益和控制增益的计算中使用的矩阵阶数都比较低,因此在计算速度上有一定的优越性,通过两区域的互联电力系统负荷频率随机最优控制的仿真也说明了这一点。尤其是零阶逼近,由于它采用的是系统的慢变量部分模型,但从控制效果上与常规滤波算法很接近,因此从另一角度上说,实现了以低阶的控制器对高阶的系统进行控制。

## 参 考 文 献

- [ 1 ] Elgerd, O. I. and Fosha, C. E. Optimal Megawatt Frequency Control of Multi-area Electric Energy System. *IEEE Trans.*, **PAS-89** (1970), 556—563.
- [ 2 ] Morf, M., Sidhu, G. S. and Kailath, T., Some New Algorithms for Recursive Estimation in Constant Linear Discrete Time System, *IEEE Trans.*, **AC-19**(1974), No. 4
- [ 3 ] Nan Zhiyuan and Guo Ming, Optimal Load Frequency Control of Interconnected Stochastic System. IFAC symposium on power systems and power plant control, 1986.
- [ 4 ] Saksena, V. R. and Kokotovic, P. V., Singular Perturbation and Time-scale Methods in Control Theory: Survey 1976—1983, *Automatica*, 1984, No. 5.
- [ 5 ] Syrcos, G. P. and Sannuti, P., Singular Perturbation Modelling of Continuous and Discrete Physical Systems, *Int. J. Control*, **37**(1983), No. 5.
- [ 6 ] Rao, A . K. and Naidu, D. S., Singular Perturbation Method for Kalman Filter in Discrete Systems. *IEE Proc.*, **131**(1984), No.1.
- [ 7 ] Nan Zhiyuan and Wang Ruishen, Dynamic State Estimation of Interconnected Power System by Singular Perturbation Method, 8th IFAC/IFORS Symposium on Identification and system parameter Estimation, 1988.
- [ 8 ] Hiyama, T., Optimisation of Discrete-type Load Frequency Regulators Considering Generation Rate Constraints, *IEE Proc.*, **129**(1982), No.6.

## THE LOAD FREQUENCY CONTROL OF INTERCONNECTED POWER SYSTEM BY SINGULAR PERTURBATION METHOD

NAN ZHIYUAN    WANG RUISHEN

(Beijing Graduate School of North China Institute of Electric Power)

### ABSTRACT

An algorithm of real-time stochastic optimal control for large scale systems has been developed. The design problem of a new-type of Kalman filter with singularly perturbed form is investigated. A constant linear discrete time interconnected stochastic power system is represented in a singularly perturbed form. The computational time and required storage of Kalman filter per iteration can be significantly reduced, especially for the zeroth-order approximation. The control gains are calculated in the singularly perturbed form. The control effects and the efficiency of this form of Kalman filter are examined by simulation for the stochastic LFC of North China power system.

**Key words** —— Estimation; stochastic control; power system computer control; kalman filter.