第16卷 第5期 自 动 化 学 报 Vol. 16, No. 5
1990 年 9 月 ACTA AUTOMATICA SINICA Sept., 1990

线性特征系统的标准形与极点配置[1)]

程 鹏
(北京航空航天大学三系)

摘 要

本文研究了可控、可观测的线性特征系统的标准形与结构参数 d. 对 $d=0$ 的情况给出用输出反馈可任意配置极点的一个充分条件;对 $d\neq 0$ 的情况,文中用简单的例子作了说明.

关键词——输出反馈,极点配置,线性特征系统,标准形.

一、线性特征系统的标准形

线性时不变系统的动态方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=A\boldsymbol{x}+B\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{y}=C\boldsymbol{x},\tag{1}$$

其中 A、B 和C分别是 $n\times n$、$n\times m$ 和 $l\times n$的实常量矩阵, 并假定 $\operatorname{rank} B=m$, $\operatorname{rank} C=l$. 系统(1)在输出反馈

$$\boldsymbol{u}=K\boldsymbol{y}+\boldsymbol{v}\tag{2}$$

的作用下所得的闭环系统方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=(A+BKC)\boldsymbol{x}+B\boldsymbol{v},\quad \boldsymbol{y}=C\boldsymbol{x}.\tag{3}$$

记闭环系统(3)的特征多项式为

$$s^n+h_1s^{n-1}+\cdots+h_{n-1}s+h_n.\tag{4}$$

定义. 若对任意的K阵,(4)式中的 $h_i(i=1,2,\cdots,n)$ 均是反馈增益阵K的元素 k_{ij} 的线性函数,则称系统(1)为线性特征系统.

文献[1,2]分别从几何结构和矩阵表达形式这两个角度给出了系统(1)为线性特征系统的充分必要条件. 由这一条件不难得出:

命题 1. 在可控、可观测的假定下,系统(1)是线性特征系统的充分必要条件为

$$\dim(T^M\cap ImB)=m-1,\tag{5}$$

这里 T^M 表示含在C核中的最大 (A、B) 不变子空间, ImB 表示B的值域.

命题 2. 若系统(1)是可控、可观测的线性特征系统,则存在状态空间的基底变换,使(A, B, C) 变换为下列形式:

本文于 1988 年 3 月 17 日收到.
1) 国家自然科学基金资助项目.

$$
A_1=\begin{array}{c}
\begin{matrix} \qquad\qquad r & \qquad\qquad 1 & \qquad d+m-1 \end{matrix}\\
\left[\begin{array}{ccccc|c}
\times & 1 & & & 0 & \\
\vdots & & \ddots & & \vdots & \mathbf{0}\\
\vdots & & & 1 & 0 & \\
\times & 0 & \cdots & 0 & 1 & \\
\times & 0 & \cdots & 0 & 0 & A_6\\
\times & & & & 0 & \\
\vdots & & \mathbf{0} & & \vdots & A_9\\
\times & & & & 0 &
\end{array}\right]
\end{array}
\begin{matrix} \\ r \\ \\ \\ 1 \\ \\ d+m-1, \\ \\ \end{matrix}
\qquad
B_1=\begin{bmatrix} 0 \\ I_m \\ 0 \end{bmatrix}\begin{matrix} r \\ \\ d, \end{matrix}
\tag{6}
$$

$$C_1=[c_1\ c_2\cdots c_r\ c_{r+1}\ 0\cdots 0],$$

其中 (A_9, A_6) 可观测。

证明．由命题 1 可假定 T^M 中的线性无关向量为 $b_2, \cdots, b_m, q_1, \cdots, q_d$，且 $b_1\bar{\in}T^M\cap ImB$。令 $r=n-m-d$，考虑向量组

$$A^rb_1, \cdots, Ab_1, b_1, b_2, \cdots, b_m, q_1, \cdots, q_d, \tag{7}$$

不难证明它们是线性无关组．取(7)式所给出的向量组作为状态空间的基底，(A, B, C) 可变换为 (6) 式的形式，而 (A_9, A_6) 的可观测性可由 (A_1, C_1) 的可观测性得到。

命题 3. 若 $d=0$，通过对状态变量、输入变量以及输出变量分别进行的可逆变换，(6)式可化为下列形式：

$$
A_2=\begin{bmatrix}
0 & 1 & & \\
\vdots & & 1 & \\
\vdots & & & \ddots \\
0 & & & 1\\
a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1
\end{bmatrix},\quad
B_2=\begin{bmatrix} 0 \\ I_m \end{bmatrix},\quad
C_2=[C_4\ \ \underset{m-1}{0}],
\tag{8}
$$

式中 C_4 为行赫密特标准形。

证明．记 P_3 为 $(A_9、A_6)$ 的可观测性矩阵．令

$$
P_1=\begin{bmatrix} I_r & & \\ & 1 & \\ & & P_3 \end{bmatrix},\qquad
P_2=\begin{bmatrix}
1 & & & & \mathbf{0}\\
\alpha_1 & 1 & & & \\
\alpha_2 & \alpha_1 & \ddots & & \\
\vdots & \alpha_2 & \ddots & \ddots & \\
\alpha_{n-1} & \cdots & \alpha_2 & \alpha_1 & 1
\end{bmatrix},
$$

P_2 中 $-\alpha_i(i=1, 2, \cdots, n-1)$ 为矩阵 $P_1A_1P_1^{-1}$ 的第一列中前 $n-1$ 个元素．若令 $P=P_2^{-1}P_1$，可以验证 $(PA_1P^{-1}、PB_1T_1、T_2C_1P^{-1})$ 具有(8)式的形式，这里 T_1，T_2 分别表示输入变换和输出变换矩阵。

(8) 式表明在相应的假设条件下，A 是循环矩阵，ImB 中可以取到 A 的生成元 b，它具有性质：$b, Ab, \cdots, A^{m-1}b$ 张满 B 的值域且 $b, Ab, \cdots, A^{m-2}b$ 张成 C 核中的最大 $(A、B)$ 不变子空间．生成元的这一性质表明了 $d=0$ 时线性特征系统的结构特点。

二、d=0 时的极点配置条件

文 [3] 证明了下列定理：

引理. 线性特征系统用输出反馈可任意配置极点的充分必要条件是矩阵组

$$\{CB, CAB, \cdots, CA^{n-1}B\} \tag{9}$$

线性无关，即由 $\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i CA^i B = 0$，可知 $\alpha_i = 0 (i = 0, 1, \cdots, n-1)$。

定义. 满足引理的线性特征系统称为线性可解系统.

为了将引理用于(8)式，可计算出

$$A^i = \begin{bmatrix} O_{n-i,i} \quad I_{n-i} \\ \alpha_{n+1} \\ \vdots \\ \alpha_{n+i} \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \cdots, n-1, \tag{10}$$

式中 α_{n+1} 即矩阵 A_2 中的最后一行，而

$$\alpha_{n+i} = \sum_{j=1}^{i-1} a_j \alpha_{n+i-j} + [0 \cdots 0 \ a_n \cdots a_i], \quad i = 2, 3, \cdots, n-1. \tag{11}$$

定义 $(2n-1) \times n$ 矩阵 M_A 及 M_A 后 m 列元素构成的 $(2n-1) \times m$ 矩阵 M_m 为

$$M_A = \begin{bmatrix} I_n \\ \alpha_{n+1} \\ \alpha_{n+2} \\ \vdots \\ \alpha_{n+(n+1)} \end{bmatrix}, \quad M_m = \begin{bmatrix} O_{n-m,m} \\ I_m \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \}\text{“1”行区} \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}, \tag{12}$$

上式中 α_i 是 $\alpha_{n+i} (i = 1, 2, \cdots, n-1)$ 的后 m 个元素构成的行向量. 显然 M_A 的第 $i+1$ 行至 $n+i$ 行正是矩阵 A^i，并且有

$$\alpha_{n+i} = \sum_{j=1}^{i-1} a_j \alpha_{n+i-j} + \sum_{j=i}^{n} a_j e_{n+i-j}, \tag{13}$$

式中 e_{n+i-j} 即 $n \times n$ 单位阵的第 $n+i-j$ 行.

命题 4. 设系统 (A, B, C) 如(8)式所示，且 C 阵中除 $i_1, i_2, \cdots, i_l = r+1$ 列依次为 I_l 的列向量外，其他的列都为零. 若对某一 μ，$CA^\mu B$ 不包含有 M_m 中的 I_m 的行，则矩阵组 $\{CB, CAB, \cdots, CA^\mu B\}$ 线性相关.

命题 5. 设系统 (A, B, C) 如(8)式所示，且 C 阵中除 $i_1, i_2, \cdots, i_l = r+1$ 列依次为 I_l 的列向量外，其他的列都为零，则 $(A、B、C)$ 线性可解的充分必要条件为 $i_1 = 1$，且 C 阵任意两相邻的非零列之间间距小于 m，即

$$|i_a - i_{a-1} - 1| < m, \quad a = 2, \cdots, l. \tag{14}$$

证明. 这时矩阵 CA^iB 可由 C 阵乘(12)式的 M_m 阵的第 $i+1$ 行至第 $n+i$ 行而得到，在命题的条件下，$CA^iB (i = 0, \cdots, n-1)$ 一定在不同位置上出现 M_m 中的“1”行，因而 $\{CB, \cdots, CA^{n-1}B\}$ 线性无关，由引理可知 (A, B, C) 线性可解. 反之若 $i_1 \neq 1$ 或(14)式不满足，总存在 μ_0，使 $CA^{\mu_0}B$ 中不包括 M_m 中的“1”行，即由命题 4 可知 $\{CB, CAB, \cdots, CA^{n-1}B\}$ 线性相关，(A, B, C) 不是线性可解系统.

注 1. 对 $m = 1$ 的单输入系统，命题 5 即是全状态反馈的情况.

注 2. 对 $n = m + l - 1$ 的可控、可观测的线性特征系统，由命题 5 可知是线性可解的.

注 3. 若(8)式中 C_2 的前 $r+1$ 列中，存在列次为 $i_1,i_2,\cdots,i_l$ 的 l 个线无性关列，满足 $i_1=1$，$i_l=r+1$，且 $|i_{a+1}-i_a-1|<m$，$(a=1,\cdots,l-1)$，则 $(A、B、C)$ 线性可解.

三、d≠0 的情况

这时有 $r<n-m$，B 阵一般是一个列赫密特矩阵，M_AB 不如 M_m 那样简单，难以用简单的几何结构特点或某一简洁的数学表达式来概括出线性可解条件.

例. 设

$$A=\begin{bmatrix} 0 & & & & & & & \\ \vdots & & & & I_7 & & & \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & & & & & & & \\ 2 & -1 & -2 & 3 & -2 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix},\quad \begin{aligned} C_1^T&=[e_1\ e_3\ e_5],\\ C_2^T&=[e_1\ e_2\ e_5],\\ C_3^T&=[e_1\ e_4\ e_5],\end{aligned}$$

$$B=[e_5\ e_6\ e_8],$$

这里 e_i 表示 I_8 的第 i 列. 不难验证（A、B、C_i）均是可控、可观测的线性特征系统，且 $d=1$. 直接计算(9)式的矩阵组，可知（A、B、C_2）不能任意配置极点，而（A、B、C_1）与（A、B、C_3）均是线性可解系统. 这里 C_i 之间的区别并不大.

参　考　文　献

[1] 程鹏，杨玲，线性特征系统的充分必要条件，控制理论与应用，**6**(1989)，增刊 1，77—83.

[2] 程鹏，关于线性特征系数的几个问题，控制理论与应用，**3**(1986)，3，61—68.

[3] Tarokh. M., On Output Feedback Stabilization and Pole Assignment, *Int. J. Control*, **31**(1980), 399—408.

[4] 旺纳姆，W. M. 著，姚景尹，王恩平译，线性多变量控制(一种几何方法)，科学出版社(1984 年).

THE CANONICAL FORM AND POLE-PLACEMENT OF LINEAR CHARACTERISTIC SYSTEMS

Cheng Peng

(Beijing University of Aeronautics and Astronautics)

Abstract

The canonical form and the structure parameter d of linear characteristic systems under the controllable and observable condition are studied in this paper. When d = 0, a sufficient condition of arbitrary pole-placement using output feedback will be established. In the case of d ≠ 0, a simple example is given for illustration.

Key words——Output feedback; pole-placement; linear characteristic system; canonical form.