第16卷 第6期 自动化学报 Vol. 16, No. 6
1990年11月 ACTA AUTOMATICA SINICA Nov., 1990

串行生产线的数学模型及其性能估算

涂 菶 生
（南开大学计算机与系统科学系）

摘 要

本文利用 Cohen 等人提出的 DEDS 的极大代数上线性系统理论，建立了串行生产线的状态方程. 利用这线性模型，得到了系统的稳态运行的有关结果，并估算了参数扰动对系统性能的影响.

关键词——离散事件动态系统，极大代数上线性系统，扰动分析.

一、概 述

由于柔性制造系统 (FMS)、计算机综合制造系统 (CIMS)、通讯以及计算机网络等高技术的发展，离散事件动态系统 (DEDS) 日益引起人们关注. 八十年代初期，何毓琦教授针对排队网络，提出了扰动分析法，在仿真的基础上进行了理论分析，使计算量大为减少[2]. 稍后，Cohen 等人针对确定性的 DEDS 提出了极大代数上线性系统分析方法，对一般生产线给出了静态状态方程和批量生产的输入-输出动态方程，同时得到了其稳态运行的有关结果[1]. 这一方法的特点是将难以用数学形式描述的 DEDS 纳入线性系统的轨道来研究. 本文在极大代数上线性系统的基础上，建立了串行生产线的状态方程，并对其稳态性能作了分析，研究了参数扰动对系统性能的影响，并为在随机极大代数线性系统的框架中，讨论何毓琦教授提出的扰动分析方法奠定了基础.

二、串行生产线的状态方程

设 R 为实数域，$\varepsilon=-\infty$，令 $\bar{R}=R\cup\varepsilon$，在 $\bar{R}$ 上定义新乘法$\circ$和新加法$\oplus$运算如下:

$$a\circ b=a+b,\ a\oplus b=\max(a,b),\ \forall a,\ b\in\bar{R},$$

其中"+"为通常实数加法. 显然，新运算乘法和加法满足结合律、交换律和分配律. 令 $e=0$，有 $e\circ a=a$，$a\oplus\varepsilon=a$. 因此，e,ε 分别是单位元和零元. 为简单起见，今后记 $a\circ b=ab$，即本文乘法均指新乘法. 此时，$\bar{R}$ 称为一个极大代数. 类似可定义 $\bar{R}$ 上的向量、矩阵、向量的数乘和$\oplus$法以及矩阵的乘法和加法新运算[1].

考虑 $\bar{R}$ 上的时变线性系统

本文于1988年5月3日收到.

$$S:\begin{cases}\boldsymbol{x}[k+1]=A[k+1]\boldsymbol{x}[k]\oplus B[k+1]\boldsymbol{u}[k],\\ \boldsymbol{y}[k]=C[k]\boldsymbol{x}[k],\end{cases}\tag{2.1}$$

其中 k 为整数，$\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{y}$、$\boldsymbol{u}$ 分别为状态、输出、输入向量。若 $A[k]=A$，$B[k]=B$，$C[k]=C$，则(2.1)式化为定常线性系统

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}[k+1]=A\boldsymbol{x}[k]\oplus B\boldsymbol{u}[k],\\ \boldsymbol{y}[k]=C\boldsymbol{x}[k].\end{cases}\tag{2.2}$$

假定 $\boldsymbol{u}[k]\equiv\boldsymbol{\varepsilon}$，如果存在 $k_0\geqslant 0$，当 $k\geqslant k_0$ 时，恒有

$$\boldsymbol{y}[k+1]=\lambda\boldsymbol{y}[k],\tag{2.3}$$

此处 λ 为常数，则称系统(2.1)或(2.2)为输出稳定的。考虑图 1 所示的生产线。该生产线由 n 台机器 $M_i(i=1,\cdots,n)$ 所组成，工件 J_1，J_2，$\cdots$ 依次进入诸机器加工，每个工件在机器上加工的次序皆相同，而每个机器对工件加工的次序也相同。假定每个机器前的存贮空间无限大，并设 $p_i[k]$ 为机器 M_i 对工件 J_k 的加工时间，$x_i[k]$ 为工件 J_k 在机器 M_i 上加工完成后离开机器的时间。不难看出有 $x_1[k+1]=p_1[k+1]x_1[k]$。
当 $i\neq 1$ 时，有

$$\begin{aligned}x_i[k+1]&=p_i[k+1]x_{i-1}[k+1]\oplus p_i[k+1]x_i[k]\\&=p_{12\cdots i}[k+1]x_1[k]\oplus p_{2\cdots i}[k+1]x_2[k]\oplus\cdots\oplus p_i[k+1]x_i[k]\end{aligned}$$

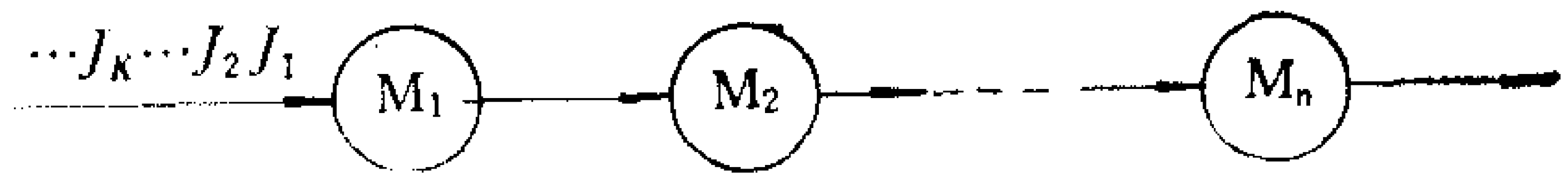

图 1 串行生产线示意图

其中 $p_{j\cdots i}[k+1]=\prod_{l=j}^{i}p_l[k+1]$，$1\leqslant j\leqslant i$。$M_n$ 为输出机，工件 J_k 离开 M_n 的时间作为输出 $y[k]$，则有 $y[k]=x_n[k]$。由此得串行生产线的状态方程如下：

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}[k+1]=A[k+1]\boldsymbol{x}[k],\\ y[k]=C[k]\boldsymbol{x}[k],\end{cases}\tag{2.4}$$

其中

$$\begin{cases}A[k+1]=\begin{bmatrix}p_1[k] & & & \varepsilon\\ p_{12}[k] & p_2[k] & & \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & & \ddots & \\ p_{12\cdots n}[k] & p_{2\cdots n}[k] & \cdots & p_n[k]\end{bmatrix},\\ C[k]=[\varepsilon,\varepsilon,\cdots,\varepsilon,e].\end{cases}\tag{2.5}$$

如果每个机器 M_i 在加工工件之后，对其下一个工件加工的开始时间需要设定的话，则在(2.4)式中需加入输入项(控制项)，如下式所示：

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}[k+1]=A[k+1]\boldsymbol{x}[k]\oplus B[k+1]\boldsymbol{u}[k],\\ y[k]=C[k]\boldsymbol{x}[k].\end{cases}$$

三、稳态性能分析

考虑串行生产线系统(2.4)，假定加工同一种工件，即 $p_i[k]=p_i$，则(2.4)，(2.5)式化为

$$\begin{cases}x[k+1]=Ax[k],\\ y[k]=Cx_n[k],\end{cases}\tag{3.1}$$

$$\begin{cases}A=A[k]=\begin{bmatrix}p_1 & & & \varepsilon\\ p_{12} & p_2 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ p_{1\cdots n} & p_{2\cdots n} & \cdots & p_n\end{bmatrix},\\ C=C[k]=[\varepsilon,\cdots,\varepsilon,e].\end{cases}\tag{3.2}$$

引理 3.1. 设 $A^k=[a_{ij}^k]$，$i,j=1,\cdots,n$，则有

1）$a_{ij}^k=\varepsilon$，当 $j>i$ 时；

2）$a_{ii}^k=p_i^k$；

3）当 $i>j$ 时，$a_{ij}^k=\lambda_{ij}^{k-1}p_i\cdots p_j$，$\lambda_{ij}=p_j\oplus p_{j+1}\oplus\cdots\oplus p_i,k\geqslant 2$.

证明．用归纳法证之．易知 $k=1$ 时，引理成立，设 $k\leqslant k_0\geqslant 1$ 时也成立，当 $k=k_0+1$ 时，显然 1)，2)也成立，下面证明 3)也成立．考虑 A 的子阵 A_{ij}，$i\leqslant j$:

$$A_{ij}=\begin{bmatrix}p_i & & & \varepsilon\\ p_{i,i+1} & p_{i+1} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ p_{i\cdots j} & p_{i+1\cdots j} & \cdots & p_j\end{bmatrix},$$

容易看出，A^k 子阵 $(A^k)_{ij}$ 为 $(A_{ij})^k$．由此可知，为了证明当 $k=k_0+1$ 时 3) 成立，只需证 $a_{n1}^{k_0+1}=\lambda_{n1}^{k_0}p_{1\cdots n}$．根据假设及 $A^{k_0+1}=AA_0^{k_0}$，可知

$$\begin{aligned}a_{n1}^{k_0+1}&=p_{1\cdots n}p_1^{k_0}\oplus p_{2\cdots n}\lambda_{21}^{k_0-1}p_{12}\oplus\cdots\oplus p_n\lambda_{n1}^{k_0-1}p_{12\cdots n}=p_{1\cdots n}(p_1^{k_0}\oplus\lambda_{21}^{k_0-1}p_2\oplus\cdots\oplus\lambda_{n1}^{k_0-1}p_n)\\&=\lambda_{n1}^{k_0}p_{12\cdots n}.\end{aligned}$$

命题 3.1. 对于串行生产线系统(3.1)和(3.2)，设初值为

$$x[0]=x_0=[\varepsilon,\cdots,\varepsilon,x_{i0},x_{i+1,0},\cdots,x_{n0}]^T,\quad x_{i0}\neq\varepsilon,$$

则存在一个 k_0，当 $k\geqslant k_0$ 时，有

$$y[k]=a_{ni}^k x_{i0}.\tag{3.3}$$

证明．易知有 $y[k]=a_{ni}^k x_{i0}\oplus a_{n,i+1}^k x_{i+1,0}\oplus\cdots\oplus a_{nn}^k x_{n0}$，由引理3.1，有 $a_{ni}^k=\lambda_{ni}^{k-1}p_{i\cdots n},\cdots,a_{nn}^k=\lambda_{nn}^{k-1}p_n$，且 $\lambda_{ni}\geqslant\lambda_{n,i+1}\geqslant\cdots\geqslant\lambda_{nn}$ 及 $x_{i0}\neq\varepsilon$．不难看出，只要 k_0 选择得足够大，当 $k\geqslant k_0$ 时，有 $y[k]=a_{ni}^k x_{i0}$.

定理 3.1. 串行生产线系统(3.1)，(3.2)是输出稳定的，即存在 $k_0>0$．当 $k\geqslant k_0$ 时有

$$y[k+1]=\lambda y[k],$$

其中 $\lambda=\max(p_1,\cdots,p_n)$.

本定理由命题 3.1 直接推出，由定理可得下面的结果．

推理 3.1. 若 $x_0=[e,\varepsilon,\cdots,\varepsilon]^T$，则对于串行生产线系统(3.1)和(3.2)，有

$$y[k] = \lambda^{k-1} p_{1\cdots n}.$$

考虑串行生产线(3.1)和(3.2),令

$$\mathring{A}_N = \prod_{k=1}^{N} A[k].$$

设 $\mathring{A}_N = [p_{Nij}]$，下面的结果是明显的。

引理 3.2. 1) $\mathring{A}_N$ 为下三角形；2) $p_{Nii} = p_i[1]p_i[2]\cdots p_i[N]$；3) 当 $i > j$ 时，有

$$p_{Nij} = \sum_{i \geqslant k_1 \geqslant \cdots \geqslant k_{N-1} > j} p_i[N]p_{i-1}[N]\cdots p_{k_1}[N]p_{k_1}[N-1]\cdots p_{k_2}[N-1]$$

$$\cdot p_{k_2}[N-2]p_{k_2-1}[N-2]\cdots p_{k_{N-1}}[1]\cdots p_j[1].$$

设 $\lambda_k = \max(p_1[k], \cdots, p_n[k])$，且 $\lambda = \max(p_{Nii}, i = 1, \cdots n)$，则有下面的结果。

引理 3.3. 设 $\mathring{A}_N[k] = (\mathring{A}_N)^k$，且

$$\mathring{A}_N[k] = \begin{bmatrix} p_{N1}[k] & & \varepsilon \\ p_{N12}[k] & p_{N2}[k] & \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ p_{Nn1}[k] & p_{Nn2}[k] \cdots & p_{Nn}[k] \end{bmatrix},$$

则存在一个 $k_0 > 0$，当 $k \geqslant k_0$ 时,有 $p_{Nn1}[k+1] = \lambda p_{Nn1}[k]$.

证明. 易知

$$p_{Nn1}[2] = \sum_{k_1=1}^{n} p_{Nnk_1}p_{Nk_11}[1] = \sum_{k_1=1}^{n} p_{Nnk_1}p_{Nk_11},$$

$$p_{Nn1}[3] = \sum_{k_1=1}^{n} p_{Nnk_1}p_{Nk_11}[2] = \sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{k_1} p_{Nnk_1}p_{Nk_1k_2}p_{Nk_21},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$p_{Nn1}[k] = \sum_{j_1=1}^{n} p_{Nnj_1}p_{Nj_11}[k-1]$$

$$= \sum_{j_1=1}^{n}\sum_{j_2=1}^{j_1}\cdots\sum_{j_{k-1}=1}^{j_{k-2}} p_{Nnj_1}p_{Nj_1j_2}\cdots p_{Nj_{k-1}1}.$$

当 k 足够大 ($k > n$) 时,则对任一组 $J = (n \geqslant j_1 \geqslant j_2 \geqslant \cdots \geqslant j_{k-1} \geqslant 1)$，其中不完全相同的 j_i 最多只可能有 n 个. 因此,在 $(n,j_1),(j_1,j_2),\cdots,(j_{k-1},1)$ 中，(j_i,j_{i+1}) 满足条件 $j_i \neq j_{i+1}$ 的最多只有 n 个.将这 n 个合在一起,它们相应值的积(在极大代数意义下)的最大值不会超过固定值 C. 令 $p_{N\theta\theta} = \lambda$，取

$$p_N^*[k] = \overbrace{p_{Nn\theta}p_{N\theta\theta}\cdots p_{N\theta\theta}p_{N\theta 1}}^{k} = p_{Nn\theta}p_{N\theta 1}p_{N\theta\theta}^{k-2} = \lambda^{k-2}p_{Nn\theta}p_{N\theta 1},$$

容易看出,只要 k 足够大,则有

$$p_{Nn1}[k+1] = \overbrace{p_{Nn\theta}p_{N\theta\theta}\cdots p_{N\theta\theta}p_{N\theta 1}}^{k+1} = p_{Nn\theta}p_{N\theta 1}\lambda^{k-1} = \lambda p_{Nn1}[k].$$

将工件 $J_1, J_2, \cdots, J_N$ 合在一起作为一组,每组工件类型和工件次序皆相同. 令 k 为组的次第数,那么以组为单位进行加工的串行生产线状态方程为

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}[k+1] = \mathring{A}_N \boldsymbol{x}[k], \\ y[k] = [\varepsilon, \cdots, \varepsilon, e] \boldsymbol{x}[k]. \end{cases} \tag{3.4}$$

根据引理 3.3，可直接得下面定理。

定理 3.2. 系统(3.4)是输出稳定的，即存在一个 $k_0 > 0$，使得当 $k \geqslant k_0$ 时，有

$$y[k+1] = \lambda y[k], \ \lambda = \max(p_{Nii}, i = 1, 2, \cdots, n).$$

四、扰 动 分 析

对于系统(3.1)，(3.2)，将工件 J_k 在机器 M_i 上加工称为一个加工事件，记为 O_{ij}，而 $p_i[j]$ 为这一事件加工时间，$x_i[j]$ 为这一事件的结束时刻；事件 $O_{i,j-1}$，$O_{i-1,j}$ 称为 O_{ij} 的前面紧连事件，并记为 $O_{i,j-1} < O_{ij}$，$O_{i-1,j} < O_{ij}$. 不难看出，有

$$x_i[j] = p_i[j](x_i[j-1] \oplus x_{i-1}[j]).$$

若 $x_i[j] = p_i[j]x_i[j-1] = p_i[j]x_{i-1}[j]$，则称在 O_{ij} 事件之前，机器 M_i 处于临界状态。

设 $i' \geqslant i$，$j' \geqslant j$，且 $l = i' + j' - (i+j) + 1 \geqslant 1$，记 $(i', j') \geqslant (i, j)$. 考虑事件串

$$\omega = O_1 O_2 \cdots O_l,$$

其中 $O_1 = O_{ij}$，$O_l = O_{i'j'}$，且 O_{i-1} 为 $O_i (2 \leqslant i \leqslant l)$ 的前面紧连事件，则称 ω 为 O_{ij} 到 $O_{i'j'}$ 的一条路径，记

$$p(\omega) = p(O_1) \cdots p(O_l),$$

其中 $p(O_i)$ 为 O_i 的加工时间. 如果

$$x_{i'}[j'] = p(\omega) p^{-1}(O_1) x_i[j],$$

则称 ω 为 O_{ij} 到 $O_{i'j'}$ 的关键路径，记为 $\omega^*(i, j; i', j')$，将由 O_{ij} 到 $O_{i'j'}$ 的所有路径所构成的集合，记为 $\Omega(i, j; i', j')$，则有

$$\Omega(i, j; i', j') =$$

$$\left\{ O_{t_1 \hat{t}_1} O_{t_2 \hat{t}_2} \cdots O_{t_l \hat{t}_l} \,\middle|\, \begin{array}{l} t_1 = i, \ \hat{t}_1 = j, \ t_l = i', \ \hat{t}_l = j', (t_s, \hat{t}_s) = (t_{s-1}, \ \hat{t}_{s-1} + 1) \\ \text{或者} (t_s, \hat{t}_s) = (t_{s-1} + 1, \hat{t}_{s-1}), 2 \leqslant s \leqslant l \end{array} \right\}.$$

命题 4.1. 1)关键路径的任一子路径也是关键路径；2）事件 O_{ij} 到 $O_{i'j'}$ 的关键路径是唯一的充分必要条件为对于关键路径的任一事件 O_k，在 O_k 发生前，其所在机器不可能处于临界状态；3)对于关键路径 $\omega^*(i, j; i', j')$ 有下式：

$$p(\omega^*(i, j; i', j')) = \sum_{\omega \in \Omega(i, j; i', j')} p(\omega). \tag{4.1}$$

命题 4.2. 矩阵 $\mathring{A}_N$ 中 $p_{Nij}(i \geqslant j)$ 满足下式：

$$p_{Nij} = p(\omega^*(j, 1; i, N)). \tag{4.2}$$

对于具有(3.1)，(3.2)形式的两个串行生产线 S_1, S_2（它们仅加工时间 $p_i[k]$ 可不同），考虑其所有事件对 $O_{i,j} < O_{i',j'}$，如果由 $O_{i,j}$ 到 $O_{i',j'}$ 的关键路径对 S_1, S_2 来说皆相同，则称 S_1, S_2 相似；如果由 O_{11} 到 $O_{nk}(k = 1, 2, \cdots)$ 的关键路径皆相同，则称 S_1, S_2 输出

相似，设串行生产线系统 S 由(3.1)式和(3.2)式描述，假定 $p_i[k]$ 受扰动后变为 $p'_i[k]=\Delta_i[k]p_i[k]$，而系统 S 受扰动后变为系统 S'，不难看出有下面结果。

命题 4.3. 1)设系统 S 的所有关键路径是唯一的，那么只要 $|\Delta_i[k]|$ 足够小，则 S 与 S' 相似；2) 如果 O_{11} 到 O_{nk} 的关键路径是唯一的，那么只要 $|\Delta_i[k]|$ 足够小，则系统 S 与 S' 输出相似。

定理 4.1. 设串行生产线系统 S：(3.1)式、(3.2)式不存在临界状态，若 $(i,k)<(i',k')$，那么只要扰动后系统 S' 与 S 相似，则有

$$x'_{i'}[k']=\begin{cases}\Delta_i[k]x_{i'}[k'], & \text{当 } O_{ik}\in\omega^*(1,1;i',k') \text{ 时},\\ x_{i'}[k'], & \text{当 } O_{ik}\notin\omega^*(1,1;i',k') \text{ 时},\end{cases}$$

其中 $x'_{i'}[k']$ 为系统 S' 的事件 $O_{i'k'}$ 的结束时刻。

证明. 由于 S 与 S' 相似，根据假设，O_{11} 到 $O_{i'k'}$ 的关键路径是唯一的，故可设其为

$$\omega^*(1,1;i',k')=O_1O_2\cdots O_l,$$

其中 $O_i,i=1,\cdots,l$，是唯一确定的。若 $O_{ik}\in\omega^*(1,1;i',k')$，则存在唯一的 O_t，$1\leqslant t\leqslant l$，使得 $O_{ik}=O_t$，那么

$$x_{i'}[k']=p(\omega^*(1,1;i',k'))=p(O_1)\cdots p(O_{t-1})p(O_t)p(O_{t+1})\cdots p(O_l),$$

而

$$\begin{aligned}x'_{i'}[k']&=p'(\omega^*(1,1;i',k'))=p(O_1)\cdots p'(O_{t-1})p'(O_t)p'(O_{t+1})\cdots p'(O_l)\\&=p(O_1)\cdots p(O_{t-1})p'(O_t)p(O_{t+1})\cdots p(O_l)\\&=p(O_1)\cdots p(O_{t-1})\Delta_i[k]p(O_{ik})p(O_{t+1})\cdots p(O_l)\\&=\Delta_i[k]x_{i'}[k'].\end{aligned}$$

若 $O_{ik}\notin\omega^*(1,1;i',k')$，则显然有 $x'_{i'}[k']=x_{i'}[k']$。

类似可得到下面结果。

定理 4.2. 对于串行生产线系统 S:(3.1)式、(3.2)式，只要扰动后系统 S' 与 S 保持输出相似，当 $k'>k$ 时，则有

$$y'[k']=\begin{cases}\Delta_i[k]y[k'], & \text{当 } O_{ik}\in\omega^*(1,1;n,k') \text{ 时},\\ y[k'], & \text{当 } O_{ik}\notin\omega^*(1,1;n,k') \text{ 时}.\end{cases}$$

如果把相似条件除去，则有如下结果。

定理 4.3. 若 $\Delta_i[k]>0$，则有

$$x'_{i'}[k']=\Delta_{i'}[k']x_{i'}[k'],(i',k')>(i,k), \tag{4.3}$$

其中 $\Delta_{i'}[k']$ 满足条件 $0\leqslant\Delta_{i'}[k']\leqslant\Delta_i[k]$。

若 $\Delta_i[k]<0$，则

1) 如果存在一条关键路径 $\omega^*(1,1;i',k')$，$(i',k')>(i,k)$，使得 $O_{ik}\notin\omega^*(1,1;i',k')$，则

$$x'_{i'}[k']=x_{i'}[k']. \tag{4.4}$$

2) 如果对于 O_{11} 到 $O_{i'k'}$ 的每一条关键路径 $\omega^*(1,1;i',k')$，皆有 $O_{ik}\in\omega^*(1,1;i',k')$，则存在 $\Delta_{i'}[k']<0$，且 $0\leqslant|\Delta_{i'}[k']|\leqslant|\Delta_i[k]|$，使得

$$x'_{i'}[k']=\Delta_{i'}[k']x_{i'}[k']. \tag{4.5}$$

证明. 设 $\Delta_i[k]>0$，对任一 $\omega(1,1;i',k')\in\Omega(1,1;i',k')$，容易看出有

$$p(\omega(1,1;i',k')) \leqslant p'(\omega(1,1;i',k')) \leqslant \Delta_i[k]p(\omega(1,1;i',k')). \qquad (4.6)$$

设 $\omega^*(1,1;i',k')$, $\varpi^*(1,1;i',k')$ 分别为扰动前 S 和扰动后 S' 的关键路径,则有

$$p(\varpi^*(1,1;i',k')) \leqslant p(\omega^*(1,1;i',k')),$$

再由(4.6)式可知:

$$\begin{aligned} p(\omega^*(1,1;i',k')) &\leqslant p'(\varpi^*(1,1;i',k')) \leqslant \Delta_i[k]p(\varpi^*(1,1;i',k')) \\ &\leqslant \Delta_i[k]p(\omega^*(1,1;i',k')). \end{aligned}$$

因此,可知存在 $\Delta_{i'}[k']$, $0 \leqslant \Delta_{i'}[k'] \leqslant \Delta_i[k]$, 使得

$$p'(\varpi^*(1,1;i',k')) = \Delta_{i'}[k']p(\omega^*(1,1;i',k')),$$

由此得(4.3)式.

设 $\Delta_i[k] < 0$, 如果存在一条关键路径 $\omega^*(1,1;i',k')$, 使得 $O_{ik} \not\in \omega^*(1,1;i',k')$, 那么扰动前和扰动后关键路径 $\omega^*(1,1;i',k')$ 是不变的,且

$$p'(\omega^*(1,1;i',k')) = p(\omega^*(1,1;i',k')),$$

由此得 (4.4) 式. 若 O_{ik} 属于 O_{11} 到 $O_{i'k'}$ 的每一条关键路径, 对其任一关键路径 $\omega^*(1,1;i',k') = O_1O_2\cdots O_l, O_{ik} = O_t$, $1 \leqslant t \leqslant l$, 皆有

$$p'(\omega^*(1,1;i',k')) = p'(O_1O_2\cdots O_l) = p'(O_1)\cdots p'(O_t)\cdots p'(O_l),$$

其中 $O_1 = O_{11}$, $O_l = O_{i'k'}$, 于是有 $p'(O_t) = p'(O_{ik}) = \Delta_i[k]p_i[k]$. 由于$\Delta_i[k] < 0$, 所以

$$\begin{aligned} p'(\omega^*(1,1;i',k')) &= p(O_1)\cdots p'(O_t)\cdots p(O_l) \\ &= \Delta_i[k]p(O_1)\cdots p(O_t)\cdots p(O_l) \\ &= \Delta_i[k]p(\omega^*(1,1;i',k')) < p(\omega^*(1,1;i',k')). \end{aligned}$$

设 $\varpi^*(1,1;i',k')$ 为扰动后 S' 的关键路径,则有

$$\begin{aligned} p'(\omega^*(1,1;i',k')) &= \Delta_i[k]p(\omega^*(1,1;i',k')) \leqslant p'(\varpi^*(1,1;i',k')) \\ &< p(\omega^*(1,1;i',k')), \end{aligned}$$

所以存在 $\Delta_{i'}[k'] < 0$, 且 $0 < |\Delta_{i'}[k']| \leqslant |\Delta_i[k]|$, 使得(4.5)式成立.

对于串行生产线系统(3.1)和(3.2),若 $A[k] = A$, 由推理3.1, 可直接得下面结果.

推理 4.1. 若参数 p_i 扰动变为 $p_i' = p_i\Delta p_i$, 其余参数不变,只要 $|\Delta p_i|$ 足够小, 则

$$y'[k] = \begin{cases} \Delta p_i^k y[k], & 若\ p_i > p_j,\ i \neq j,\ j = 1,\cdots,n, \\ \Delta p_i y[k], & 若\ p_i \ngtr p_j, i \neq j,\ j = 1,\cdots,n. \end{cases}$$

本文结果可推广到具有有限存贮器的串并行生产线上，并为随机系统的扰动分析奠定了基础.

参　考　文　献

[1] Cohen, C., Dubois, D., Quadrat, J. P. and Viot, M., A Linear-system-theoretic View of Discrete-event Processes and Its Use for Performance Evaluation in Manufacturing, *IEEE Trans.* AC-30(1985), No.3.

[2] Ho, Y. C. and Cassandras, C., A New Approach to the Analysis of Discrete Event Dynamic Systems, *Automatica*, 19(1983), No.2.

MODELING AND PERFORMANCE EVALUATION OF SERIES PRODUCTION SYSTEMS

Tu Fengsheng

(*Department of Computer and System Sciences Nankai University*)

Abstract

In this paper, it is shown that the state space models of the series production systems can be established based on the max-algebra theory, that was proposed by Cohen (1985) and other researchers. The system performances in the steady state and under perturbations can be analyzed by using this model.

Key words ——Discrete event dynamic systems; linear system over max-algebra; perturbation analysis.

《稳定自适应系统》介绍

K. S. Narendra 和 A. M. Annaswany 合著的 «Stable Adaptive Systems» («稳定自适应系统», 1989 年, *Prentice-Hall* 出版)一书是一本取材新颖,内容丰富,理论联系实际,颇具独特风格的好教材,可供大学高年级学生、研究生和教师使用,也可供有关专业的研究人员和工程技术人员参考.

自适应控制作为现代控制理论的一个重要研究领域,经过三十多年尤其是近几年的努力,其理论已日趋成熟. 通过各种算法和计算机应用, 特别是由于微型机的普及和应用, 已成为一门实用的工程学科.

«稳定自适应系统»一书的中心主题是自适应系统的稳定性, 只有很好地掌握全局稳定性才有可能对自适应系统的设计有充分的依据和信心. 本书内容分两部分,第一部分是基本内容 包括稳定性理论、简单的自适应系统、自适应观测器和控制问题、持续激励、误差模型等;第二部分内容是供进一步研究和探讨的,包括鲁棒自适应控制、控制问题的松弛假定、多变量自适应控制、自适应控制的应用.

«稳定自适应控制»一书强调理论联系实际,书中许多例题有明显的工程背景,这不仅有利于对理论的理解,达到巩固基本内容的要求, 并且可以和工程实践相结合. 各章后面的习题分成三部分,第一部分是关于基本数学知识和系统概念理解的习题,第二部分用以加深对基本内容的复习和理解,第三部分是需要进一步深入学习和研究的较困难的问题.

总之,本书不失为一本有较高水平的教科书和参考书.

北京理工大学 马东升