

H^∞ -补偿器的泛函优化实现方法¹⁾

张愈文 吴智铭

(上海交通大学)

叶庆凯 毛剑琴

(北京大学)

(北京航空航天大学)

摘 要

本文讨论了对对象、补偿器发生摄动及外干扰情况下,反馈稳定的鲁棒性及最小敏感性,采用了由 Zames 等人最新提出的 H^∞ -最优设计的指标,给出了考虑补偿器容差的优化设计,这样的设计更符合实际工程要求.在此,采用了分割映射法来求解这类有容差的优化设计问题.

关键词—— H^∞ -最优化设计,泛函约束,分割映射法.

一、引 言

控制系统的设计中最棘手的问题是如何解决系统的不确定性.不确定性可能是由于系统模型的不确定性,也可能来自外界的干扰.

反馈控制是解决不确定性的有力方法.如何设计好的反馈控制器,使其对系统不确定性的承受能力加强,这方面的工作结果,自本世纪三十年代即已出现 SISO 系统的稳定性和灵敏度计算公式,但这些方法使用到 MIMO 系统时发生困难,不易得到严格的分析结论.因此在很长一段时间内,这一问题的处理带有很大的近视性和经验性.到八十年代, Zames 等人提出的 H^∞ -最优设计理论,将带不确定性的鲁棒控制器设计问题转化为“最小最大”的优化问题.但应指出,这一方法在用于多变量系统时,计算上仍有很大的困难未能解决.

二、 H^∞ -最优化设计

图 1 表示带不确定性的对象 P , 引入控制器 G 后组成的闭环系统.

图示系统有二个节点,若以 H_{ij} , $i, j = 1, 2$ 表示输入 u_j 到 e_i 的传递函数,则该闭环系统特性可由以下矩阵表示:

$$H(P, G) = [H_{ij}]_{i,j=1}^2 = \begin{bmatrix} (I + PG)^{-1} & -P(I + GP)^{-1} \\ G(I + PG)^{-1} & (I + GP)^{-1} \end{bmatrix}. \quad (1)$$

本文于 1988 年 11 月 15 日收到.
本文得到国家自然科学基金资助.

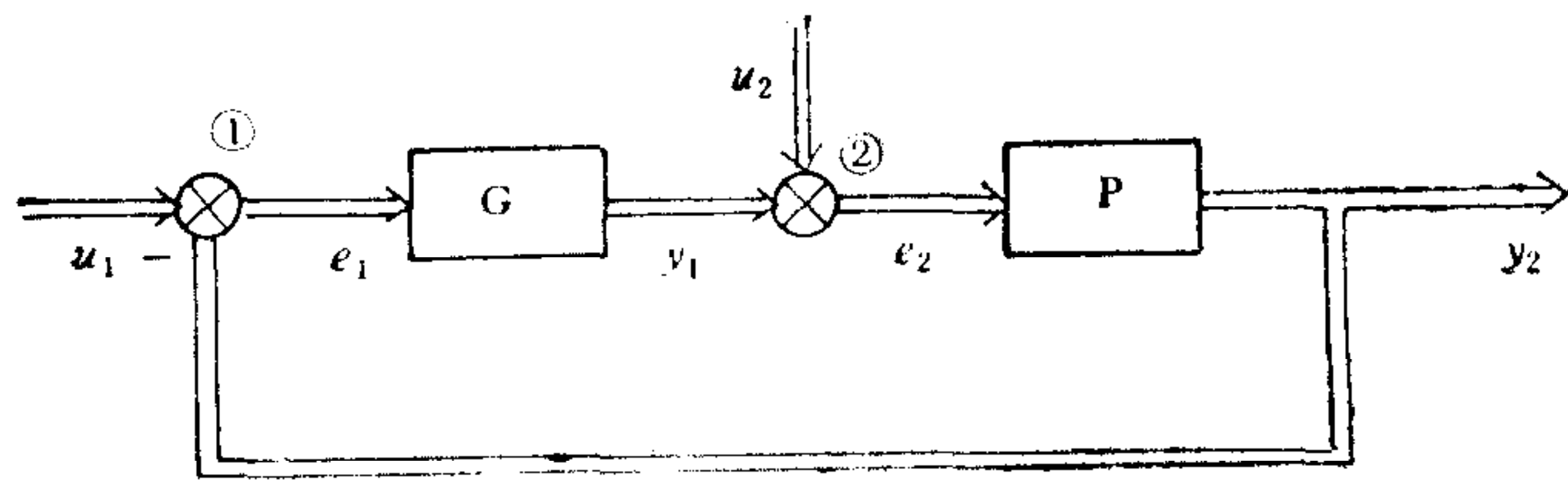


图 1

闭环系统的稳定是指 $H(P, G)$ 阵中所有元素皆为稳定。 H^∞ -优化设计中采用了无穷范数的定义。

定义 1. 真的稳定系统 P 的范数可记为 $\|P\| \triangleq \sup \bar{\sigma}(P)$, $\bar{\sigma}$ 表示最大奇异值。称这类真有理稳定系统的赋范空间为无穷阶 Hardy 空间, 以 H^∞ 表示, 所定义的范数称 H^∞ 范数。可证明: $\|P\| \triangleq \sup_{\omega} \bar{\sigma}(P(j\omega))$ 。

对象 P 的摄动可分为乘性和加性两类。不妨假设 $P(s)$ 无虚轴上极点, 若有虚轴上极点, 一般用常数输出反馈就可消除。

定义 2. 以 $P'(s)$ 表示发生摄动后的系统, 设 $P'(s)$ 与 $P(s)$ 在右半平面极点数相同。

加性摄动可表示为 $P'(s) = P(s) + \Delta P(s)$, $\bar{\sigma}(\Delta P(j\omega)) < |r(j\omega)|$;

乘性摄动可表示为 $P'(s) = (I + M(s))P(s)$, $\bar{\sigma}(M(j\omega)) < |r(j\omega)|$ 。

将摄动范围内所有的 $P'(s)$ 记为 $A(P, r)$ 。

引理 1. 控制器 $G(s)$ 能使 $P(s)$ 稳定, 则对于加性摄动 $\bar{\sigma}[G(I + PG)^{-1}(j\omega)] \cdot |r(j\omega)| \leq 1$ 和乘性摄动 $\bar{\sigma}[PG(I + PG)^{-1}(j\omega)] \cdot |r(j\omega)| \leq 1$, 可得 $G(s)$ 能使一切 $P'(s) \in A(P, r)$ 稳定。

引理 1 给出了对有摄动的系统设计一个鲁棒控制器的依据。加性或乘性摄动只是造成设计指标上稍有不同, 因此下面仅以乘性摄动为例进行分析。

显然, $\bar{\sigma}[PG(I + PG)^{-1}(j\omega)] \cdot |r(j\omega)|$ 表示了系统的稳定性裕度, 要求为很小的数值。按无穷范数的定义, 取

$$\|PG(I + PG)^{-1} \cdot r(j\omega)\| = \sup_{\omega} \bar{\sigma}[PG(I + PG)^{-1}] |r(j\omega)|$$

最小作为鲁棒性指标, 则鲁棒性问题成为一个数学上的“最小最大”优化问题, 记为

$$\begin{aligned} J &= \min \|PG(I + PG)^{-1} r(j\omega)\| \\ &= \min \sup_{\omega} \bar{\sigma}[PG(I + PG)^{-1}] \cdot |r(j\omega)|. \end{aligned} \quad (2)$$

为表示方便, 采用 Q 参数法, 令

$$Q = G(I + PG)^{-1}, \quad (3)$$

$$\text{则 } H(P, G) = \begin{bmatrix} I - PQ & -P(I - QP) \\ Q & I - QP \end{bmatrix}, \quad J = \min \|rPQ(j\omega)\|. \quad (4)$$

回差矩阵 $(I + PG)^{-1}$ 反映了系统的跟踪特性, 表示了从节点①进入系统的干扰对系统的影响。定义灵敏度函数 $S = (I + PG)^{-1} = I - PQ$ 。

由上述公式看出, 引入 Q 参数后, 避免了对 $(I + PG)^{-1}$ 逆阵的处理, 简化了设计。

设计中除了鲁棒性要求外,还希望灵敏度 $\|S\|$ 尽可能小. 由于 $P(s)$ 严格真,对一切可实现的 $G(s)$, $Q(s)$ 也是严格真的,故有

$$PQ \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} 0, S = \|I - PQ\| \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} I.$$

因此,期望在整个频率域中有很小的 $\|S\|$ 值是不可能的,设计中使 $\|S\|$ 在某些频段内有较小的数值. 特别当 $P(s)$ 在右半平面内有零点时, $\|S\|$ 在某频段就很大. 一般常采用加权的灵敏度函数来折衷,可定义为

$$J = \min W(I - PQ) = \min W(I + PG)^{-1}, \quad (5)$$

其中 W 为权函数.

鉴于函数的积、和、数乘构成了函数的一个代数空间, H^∞ -最优设计就是在 Hardy 空间中寻找最优点(系统),使 $H(P, G)$ 稳定,并有最优的鲁棒性和灵敏度指标.

三、考虑容差的优化设计

二次型指标给出了对象固定时最优控制器的精确设计. 当系统参数有摄动时,性能常急剧变坏. H^∞ -最优设计法解决了上述缺陷,设计了鲁棒控制器. 然而, H^∞ -优化解对 MIMO 系统是非常复杂的,涉及了较深的数学理论,工程人员不易接受,至今尚无实际应用场合. 下面给出的方法吸取了 H^∞ -最优控制的指标,将设计问题化为一个带泛函约束的优化问题求解,并考虑了补偿器参数的容差问题,更符合工程实际的需要.

工程应用中的控制器的模型结构类别总是有限的. 按工程要求,一般常采用单闭环、多闭环、前置、后置及反馈控制的方式. 系统设计时,常先设定系统的结构和控制器模型,然后对待定的参数进行优化,得到较好的指标,本文所作的设计并不单纯谋求指标的最优,而是在一定的系统及控制器结构下,保证满足稳定性、可实现性等基本约束条件,并有尽可能好的指标,即一类次最优解.

设控制器表示为 $G(s)$, 包含有 n 个可调整的设计参数 $k_i, i = 1, 2, \dots, n$, 或记为矢量式 $K = [k_1, k_2, \dots, k_n]$.

$$\text{约束条件} \quad f^i(K) \leq 0, i = 1, 2, \dots, m. \quad (6)$$

若允许 K 有一个摄动量 $t \in T$, 并仍有

$$f^i(K + t) \leq 0, i = 1, 2, \dots, m, \quad (7)$$

此即考虑参数有容差的控制器设计.

对所设计的系统仍采用 H^∞ -优化法给出的指标,并要求指标值在一定数值范围内:

$$J \leq \alpha. \quad (8)$$

可以通过参数搜索法使 $J \leq \alpha \rightarrow \alpha_{\min}$. 由于控制器结构的限制及考虑参数的容差, α_{\min} 不可能达到 H^∞ -优化设计的数值,是 Hardy 空间的一个次优解,希望这个次优解接近 H^∞ -优化设计出的最优解. 只要参数允许摄动的围范足够小,补偿器传递函数阵阶次取得足够高,便能使设计出的次优解尽可能接近 H^∞ -最优解. 这一设计问题的求解,可采用下节所介绍的分割映射法.

四、分割映射法

文献[5]给出了使用分割映射法时的详细计算过程,其基本思想可归纳如下。

设计问题可表示为:寻找 n 维向量 x 以满足不等式

$$f^j(x) \leq 0, f^j(x+t) \leq 0, t \in T, j = 1, 2, \dots, m, \quad (9)$$

其中 t 为 n 维向量, T 为 R^n 中的一个域,可事先经过规范化运算后得到

$$T \triangleq \{t \in R^n \mid |t^j| \leq 1\}. \quad (10)$$

上述问题也可描述为:寻找 x 点以满足

$$Q_T(x) \leq 0, Q_T(x) \triangleq \max\{\Psi(x+t) \mid t \in T\}, \quad (11), (12)$$

$$\Psi(x) \triangleq \max\{f^j(x) \mid j = 1, 2, \dots, m\}, \quad (13)$$

这种表示法较前更便于计算。

以 F 表示 $f^j(x) \leq 0, j = 1, 2, \dots, m$ 解集,以 G 表示方程(9),(10)的解集,即

$$F \triangleq \{x \in R^n \mid \Psi(x) \leq 0\}, \quad (14)$$

$$G \triangleq \{x \in R^n \mid Q_T(x) \leq 0\} \triangleq \{x \in R^n \mid \Psi(x+t) \leq 0, t \in T\}. \quad (15)$$

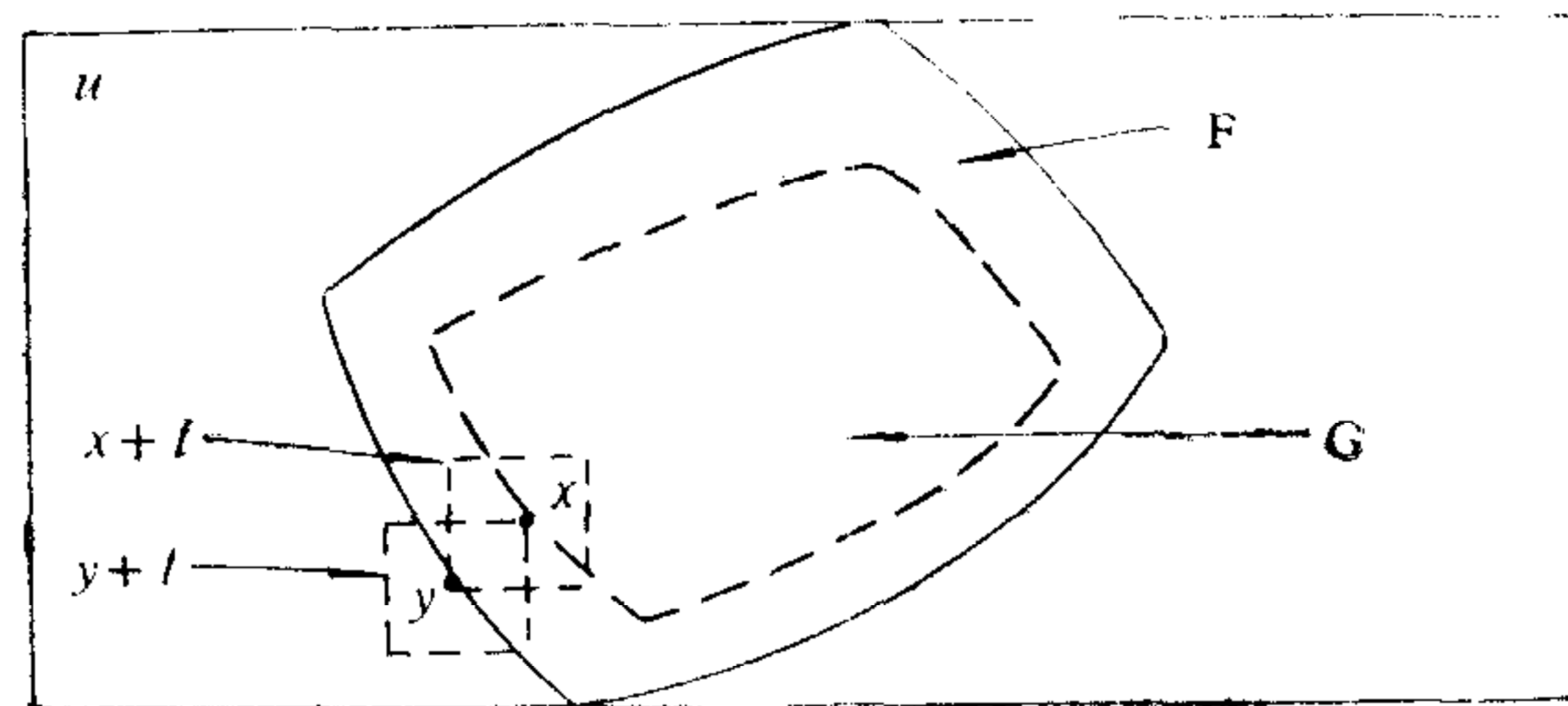


图 2

图 2 表示 F 与 G 的关系,显然, G 是 F 的子集。

以上描述了解题任务,是一个无限维的优化问题,实际计算中常考虑用一系列的有限维问题以外逼近的方式求解。例如

$$\Psi(x+t) \leq 0, t \in T_i, \quad (16)$$

这里 T_i 是 T 中有限个点所组成的子集,满足(16)式的解集 G_i 显然是 G 的外逼近。当点集中的 T_i 增加时, $T_i \rightarrow T$, G_i 就逼近 G 。

设作第 i 次迭代时,采用

$$W_i = U\{B(x_j, \varepsilon_j) \mid j < i\}, \quad (17)$$

近似表示 G 的补集 G^c , 其中 $B(x_j, \varepsilon_j)$ 表示以 x_j 为球心、 ε_j 为半径的开球,且与 G 不相交,即

$$G \cap B(x_j, \varepsilon_j) = \Phi, \quad (18)$$

故有 $G \cap W_i = \Phi$, 即 $G \in W_i^c$ 。可以认为 W_i^c 是 G 的一个外逼近。分割映射法就是这样不断地寻找 x_j, ε_j , 反复迭代,直到新扩展的球域 B_j 有 $\varepsilon_j = 0$, 表明 x_j 已在 G 中。

为说明分割映射法,应介绍一下分离算子。

定义 3. 设 G 是个闭集,函数 $\delta: G^c \rightarrow R$ 是分离算子,如果有以下条件成立: ①对一

切 $x \in G^c$, 有 $\delta(x) > 0$; ② 若 $i \rightarrow \infty$ 时, 有 $x_i \rightarrow x_i^*$, 且 $\delta(x_i) \rightarrow 0$, 则 $x_i^* \in G$.

引理 2. 若 δ 是分离算子, 且无穷序列 $\{x_i\}$ 满足:

$x_i \in W_i^c$, $W_i^c = U\{B(x_i, \delta(x_i)) | j = 1, \dots, i-1\}$, $i = 1, 2, 3, 4, \dots$, 则 $\{x_i\}$ 任一聚点均属于 G .

定义函数 $\eta: G^c \rightarrow R$, $\eta(x) \triangleq \min\{\|y - x\|_\infty | y \in x + T, y \in U\}$, $U = F^c \triangleq \{x \in R^n | \Psi(x) \geq 0\}$.

显然, 当 $x \in F^c, x \in U$ 时, $\eta(x) = 0$. 随着 x 靠近 $G, x + T \rightarrow F$, 则 $x + T$ 与 U 的交逐渐减小, $\eta(x) \rightarrow 1$.

引理 3. 问题中, 若 $f^j, j = 1, 2, \dots, m, R^n \rightarrow R$ 均连续, $\delta(x) = 1 - \eta(x)$ 可作为分离算子, 于是有分割映射法原则算法:

step 1. $i = 0, W_0 = \Phi$.

step 2. 求任一 $x_i \in W_i^c$, 若 $x_i \in G$, 停止.

step 3. 置 $W_{i+1} = W_i \cup B(x_i, \delta(x_i)), i + 1 \rightarrow i$. 返回 step 2.

由于优化搜索时, 既考虑了容差, 又符合一系列泛函约束, 使以无穷范数形式给出的指标, 在程序的运算中自动得到筛选, 求得所需结果.

设一个控制系统的指标确定为 $\bar{\sigma}[x(j\omega)] \leq \alpha$, 其中

$$X = PG(I + PG)^{-1} \text{ 或 } X = W(I + PG)^{-1}.$$

解题时的泛函不等式约束为 $-1 \leq \omega/l \leq 1$ (即 $-l \leq \omega \leq l$).

若 l 足够大, 则 $|\omega| < l$ 近似于整个频域, $\bar{\sigma}[x(j\omega)]$ 的计算相当于考虑了 $x(j\omega)$ 的无穷范数.

五、算例及分析

例 1.
$$P(s) = \frac{(s-1)(s+3)}{(s-2)(s^2+2s+3)},$$

设计鲁棒控制器 $J = \min\|PQ\|$.

① 按 H^∞ -优化设计方法, 求出 Q 的最优解为 $\tilde{Q} = \frac{b(s-2)(s^2+2s+3)}{(s+1)(s+3)}$.

为保证 $P(I - P\tilde{Q})$ 稳定, 应有 $(I - P\tilde{Q})|_{s=2} = 0$.

由此解出 $b = 3$, 补偿器的结构可确定为 $G_c = \frac{-3(s^2+2s+3)}{2(s+3)}$.

按这一方法, 得到的 $J_{\min} = 3$. 然而 G_c 的实现是有困难的.

② 采用外逼近法设计 G_c .

选定 $G_c(s)$ 的结构为 $G_c(s) = \frac{k_3s^2 + k_4s + k_5}{s^2 + k_1s + k_2}$, $k_i, i = 1, 2, \dots, 5$ 为参数, 并允

许各参数摄动量 $|t_i| < 0.1$.

采用分割映射法搜索有解: $k_1 = 6.49, k_2 = 1.73, k_3 = 0.142, k_4 = 0.054, k_5 = -5.535$. 得到的指标 $J = 3.5$ (较 H^∞ 法为差).

③ 对本例解法①得到的非真控制器进行修正,使之易于实现。

取 $Q = \tilde{Q} \cdot \left(\frac{\sigma}{s + \sigma}\right)$, 为保证 $P(I - PQ)$ 稳定, 则有 $(I - PQ)|_{s=2} = 0$ 。

若引入 \tilde{Q} 的修正项后, 允许指标损失 0.5, 即 $J \leq 3.5$, 则可解出 \tilde{Q} 中的参数 $b = 3.2$, 修正项中的参数 $\sigma = 30$ (σ 允许有 ± 1 的摄动范围)。相应有

$$Q(s) = \frac{96(s-2)(s^2+2s+3)}{(s+1)(s+3)(s+30)}, \quad G_c(s) = \frac{96(s^2+2s+3)}{(s-63)(s+3)},$$

$G_c(s)$ 在右半平面上有一个很大的极点。

④ 讨论。从本例的三种算法中看出, 外逼近法设计的补偿器的性能指标虽比 H^∞ -优化法相差 15%, 但控制器在物理上易于实现, 并允许参数有一定摄动范围, 便于工程上进行批量生产和调试。

例 2. 设系统的模型表示为

$$S = \Psi(A, B, C), \quad \begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \\ y = [1, 0]x, \end{cases}$$

按文献[4], 引入一个一阶动态环节:

$$\begin{cases} \dot{z} = -9z + u_z, \\ y_z = z \end{cases}$$

组成的复合系统可表示为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ u_z \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} y \\ y_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}, \end{cases}$$

引入常值反馈阵使系统稳定, 取 $K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ k_3 & k_4 \end{bmatrix}$, 并允许 $k_i, i = 1, 2, 3, 4$ 有 ± 1 的摄动范围, 本题搜索后有解: $k_1 = 1022, k_2 = 354, k_3 = 15.2, k_4 = 4.05$ 。

用 H^∞ 法求解 MIMO 问题是非常困难的, 例 2 表明, 对于较简单的 MIMO 进行搜索也能得到理想的解, 但在小型的 PC 机上, 显然很难求解高阶的多变量系统。

六、结 束 语

本文按照 H^∞ -最优化设计思想, 并考虑了设计参数的摄动, 用外逼近法设计出鲁棒控制器, 回避了 H^∞ -最优化方法涉及的复杂的数学理论, 该方法设计出的控制器符合工程实际, 容易为工程技术人员接受。

参 考 文 献

- [1] Zames, G. and Francis, B. A., Feedback, Minimax Sensitivity, and Optimal Robustness, *IEEE Trans.*, AC-28(1983), 5, 585—601.

- [2] Francis, B. A. and Zames, G., On H^∞ -Optimal Sensitivity Theory for SISO Feedback System, *IEEE Trans.*, **AC-29**(1984), 1, 9—16.
- [3] Vidyasagar, Control System Synthesis, MIT, 1985.
- [4] Sambandan, A. and Chandrasekharan, P. C., Eigenvector Assignment Using Output Feedback, *Int. J. Contr.*, **34**(1981), 6, 1143—1152.
- [5] Mayne, D. Q. and Voreadis, A., A Cut-map Algorithm for Design Problems with Parameter Tolerances, *IEEE Trans.*, **CAS-29**(1982), 35.

DESIGNING H^∞ -COMPENSATORS WITH CUT-MAP METHOD

ZHANG YUWEN WU ZHIMING

(Shanghai Jiao Tong University)

YE QINKAI

(Peking University)

MAO JIANQIN

(Beijing University of Aeronautics and Astronautics)

ABSTRACT

This paper studies the robustness of feedback stability and minimal sensitivity in presence of plant and compensator perturbation as well as disturbance. The index of the H^∞ -optimal design method was used. In addition, the parameter tolerance of the compensator is considered, the cut-map algorithm is adopted. This design method is suitable for practical engineering.

Key words — H^∞ -optimal design; nctional constraints; cut-map algorithm.