第16卷 第6期　　自 动 化 学 报　　Vol. 16, No. 6
1990年11月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　Nov., 1990

PI 调节器用于离散线性系统跟踪问题的最优设计

邢继祥　黄亚锋　李铁才
(哈尔滨工业大学应用数学系)

摘　　要

本文对离散多输入多输出线性系统跟踪给定值问题及跟踪给定函数问题给出一个正确的提法，并用 PI 调节器实现最优设计. 设计方法简单，保留了"按偏差跟踪"方法的优点.

关键词——PI 调节器，跟踪问题，最优设计.

一、引　言

文献[1]是对连续的线性多变量系统用 PI 调节器实现跟踪给定值的最优设计. 它是经典控制论中偏差的积分调节器可以消除静差的思想的推广，改变了单纯用状态反馈实现最优控制的简单模式. 现将文[1]的方法推广到离散线性系统中去，并在文[3]基础上讨论多输入多输出的系统，虽然文[2]用所谓"积分状态"方法探讨过，但方法的物理意义及性能指标中参数的选取均不明确. 本文所用方法称为"按偏差跟踪"方法[2]. 它在文[1, 4]基础上使跟踪问题的最优设计中性能指标的提法更明确，更直观，并化为典型的 LQP (线性二次型)问题.

二、输出跟踪给定值问题的正确提法与最优设计

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_{k+1} = A\boldsymbol{x}_k + B\boldsymbol{u}_k, \\ \boldsymbol{y}_k = C\boldsymbol{x}_k, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $A \in R^{n\times n}$, $B \in R^{n\times r}$, $C \in R^{m\times n}$, $\boldsymbol{x} \in R^n$, $\boldsymbol{y} \in R^m$.

设 $\eta \in R^m$ 是输出 y 要跟踪的常值向量. 按文[1, 3]的思想，正确的性能指标初步应是

$$J = \int_0^\infty (\eta - C\boldsymbol{x})^T Q (\eta - C\boldsymbol{x}) dt + \sum_{k=0}^{\infty} (\boldsymbol{u}_{k+1} - \boldsymbol{u}_k)^T (\boldsymbol{u}_{k+1} - \boldsymbol{u}_k).$$

这里积分项表征了偏差 $\eta - C\boldsymbol{x}$ 的大小，级数项表征了控制作用变化的大小. 仿文[1]首先引入偏差量

本文于1988年7月13日收到.

$$z_k = \eta - Cx_k \tag{2}$$

及控制变化量

$$v_k = u_{k+1} - u_k, \tag{3}$$

则系统(1)跟踪给定值的性能指标提法是

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} z_k^T Q z_k + \sum_{k=0}^{\infty} v_k^T v_k,$$

其意义是偏差量 z_k 趋于零，且控制作用的变化趋于零(即控制趋于常数[1])。为化为 LQP 问题，系统(1)可表示成

$$\begin{pmatrix} z_{k+1} \\ x_{k+2} - x_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & -C \\ 0 & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_k \\ x_{k+1} - x_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ B \end{pmatrix} v_k = \tilde{A}\begin{pmatrix} z_k \\ x_{k+1} - x_k \end{pmatrix} + \tilde{B} v_k, \tag{4}$$

此式相当于文[1]中的(10)式。

而前述性能指标可化成

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} z_k \\ x_{k+1} - x_k \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_k \\ x_{k+1} - x_k \end{pmatrix} + \sum_{k=0}^{\infty} v_k^T v_k, \tag{5}$$

此时可视

$$\tilde{Q} = \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \geqslant 0.$$

公式(4)，(5)是离散的 LQP 问题的标准形式。根据线性系统最优调节器设计的基本理论可知，当系统(4)或 $(\tilde{A}, \tilde{B})$ 可控时，v_k 应取 z_k，$x_{k+1} - x_k$ 的线性反馈控制形式，即存在两组常数(矩阵) K_1 和 K_2，使最优控制满足

$$u_{k+1} - u_k = v_k = K_1 z_k + K_2(x_{k+1} - x_k),$$

亦即

$$u_1 - u_0 = K_1 z_0 + K_2(x_1 - x_0), u_2 - u_1 = K_1 z_1 + K_2(x_2 - x_1),$$

$$\cdots\cdots$$

$$u_k - u_{k-1} = K_1 z_{k-1} + K_2(x_k - x_{k-1}).$$

将上式左右两端相加即得

$$u_k = (u_0 - K_2 x_0) + K_2 x_k + K_1 \sum_{i=0}^{k-1} z_i, \tag{6}$$

此即，跟踪给定值 η 的最优控制是离散形式的(状态变量)比例、(偏差量)积分控制(PI 调节器)。

三、算 例

$$x_{k+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x_k + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u_k,$$

$$y_k = (1 \;\; 0) x_k, \quad x_0 = 0,$$

由(4)，(5)两式可知

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad \tilde{B}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\quad \tilde{Q}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad R=1.$$

通过解 Riccati 方程可得 $y_{13}=-1$，$y_{23}=y_{33}=2$. 而(6)式具体表示的最优控制为

$$\boldsymbol{v}_k=-(-1\quad 2\quad 2)\begin{pmatrix}\boldsymbol{z}_k\\ \boldsymbol{x}_{k+1}-\boldsymbol{x}_k\end{pmatrix}=\boldsymbol{z}_k-(2\quad 2)(\boldsymbol{x}_{k+1}-\boldsymbol{x}_k),$$

即 $\boldsymbol{u}_{k+1}-\boldsymbol{u}_k=\boldsymbol{z}_k-(2\quad 2)(\boldsymbol{x}_{k+1}-\boldsymbol{x}_k)$，或者由(6)式直接给出

$$\boldsymbol{u}_k=\boldsymbol{u}_0+(2\quad 2)\boldsymbol{x}_0+\sum_{i=0}^{k-1}\boldsymbol{z}_i-(2\quad 2)\boldsymbol{x}_k.$$

其结果与文[1]中连续系统的情形相对应,响应曲线也很好.

四、跟踪给定函数的情形

$$\boldsymbol{x}_{k+1}=A\boldsymbol{x}_k+B\boldsymbol{u}_k.$$

设 $\eta(t)$ 为 $\boldsymbol{x}(t)$ 要跟踪的函数,仍引入偏差 $\boldsymbol{z}_k=\eta_k-\boldsymbol{x}_k$，则有

$$\boldsymbol{z}_{k+1}=\eta_{k+1}-A\boldsymbol{x}_k-B\boldsymbol{u}_k=A\boldsymbol{z}_k-B\boldsymbol{u}_k+\eta_{k+1}-A\eta_k.$$

再令

$$B\boldsymbol{w}_k=B\boldsymbol{u}_k-(\eta_{k+1}-A\eta_k), \tag{7}$$

从而有

$$\boldsymbol{z}_{k+1}=A\boldsymbol{z}_k-B\boldsymbol{w}_k, \tag{8}$$

又可得 $\boldsymbol{z}_{k+2}-\boldsymbol{z}_{k+1}=A(\boldsymbol{z}_{k+1}-\boldsymbol{z}_k)-B(\boldsymbol{w}_{k+1}-\boldsymbol{w}_k)$. 此时系统方程可表示为

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{z}_{k+1}\\ \boldsymbol{z}_{k+2}-\boldsymbol{z}_{k+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I & I\\ 0 & A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{z}_k\\ \boldsymbol{z}_{k+1}-\boldsymbol{z}_k\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ -B\end{pmatrix}(\boldsymbol{w}_{k+1}-\boldsymbol{w}_k). \tag{9}$$

而性能指标取为

$$J=\sum_{k=0}^{\infty}\begin{pmatrix}\boldsymbol{z}_k\\ \boldsymbol{z}_{k+1}-\boldsymbol{z}_k\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}Q & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{z}_k\\ \boldsymbol{z}_{k+1}-\boldsymbol{z}_k\end{pmatrix}+\sum_{k=0}^{\infty}(\boldsymbol{w}_{k+1}-\boldsymbol{w}_k)^T(\boldsymbol{w}_{k+1}-\boldsymbol{w}_k), \tag{10}$$

于是当系统(9)可控时，$\boldsymbol{w}_{k+1}-\boldsymbol{w}_k$ 应取 $\boldsymbol{z}_k$，$\boldsymbol{z}_{k+1}-\boldsymbol{z}_k$ 的线性反馈控制

$$\boldsymbol{w}_{k+1}-\boldsymbol{w}_k=K_1\boldsymbol{z}_k+K_2(\boldsymbol{z}_{k+1}-\boldsymbol{z}_k).$$

再由(7)式可得

$$B(\boldsymbol{u}_{k+1}-\boldsymbol{u}_k)=B[K_1\boldsymbol{z}_k+K_2(\boldsymbol{z}_{k+1}-\boldsymbol{z}_k)]-A(\eta_{k+1}-\eta_k)+(\eta_{k+2}-\eta_{k+1}),$$

即得(仿(6)式的推导过程)

$$B\boldsymbol{u}_k=(B\boldsymbol{u}_0+A\eta_0-\eta_0-K_2\boldsymbol{z}_0)+K_2\boldsymbol{z}_k+BK_1\sum_{i=0}^{k-1}\boldsymbol{z}_i+(\eta_{k+1}-A\eta_k), \tag{11}$$

其中第二项是偏差的比例项；第三项是偏差的积分项；第四项是给定函数 $\eta(t)$ 的前馈补偿项.

当矩阵 B 的列线性无关时，B 的广义逆矩阵 $(B^TB)^{-1}$ 存在，从而由(11)式可得最优控制

$$u_k=[u_0+(B^TB)^{-1}(A\eta_0-\eta_0-K_2z_0)]+(B^TB)^{-1}K_2z_k$$
$$+K_1\sum_{i=0}^{k-1}z_i+(B^TB)^{-1}(\eta_{k+1}-A\eta_k).$$

五、结 束 语

本文是将文[1]的方法移植到离散系统的情形,以适应计算机控制的需要. 一切叙述从简.

关于 $(\tilde{A},\tilde{B})$ 可控性的判别，可通过可控性判别矩阵满秩进行，也可参照文[1]的相应结论.

第四段跟踪给定函数 $\eta(t)$ 的初步探讨(11)式表明，最优控制除用偏差量的 PI 调节器外,还要有 $\eta(t)$ 的前馈补偿项,即取复合控制形式.

参 考 文 献

[1] 邢继祥等，PI 调节器用于多输入多输出线性系统跟踪给定值的最优设计，自动化学报，**14**(1988)，No. 4.
[2] Stefano, M.L., Optimal Design of PID Regualtors, *Int. J. Control*, **33**(1981),601—616.
[3] 李训经,计算机控制中的跟踪问题,复旦大学学报，**17**(1978),2,38—48.
[4] Athans, M., On the Design of P-I-D Controllers Using Optimal Linear Requlator Theory, *Automatica*, **7**(1971), 643—647.

AN OPTIMAL DESIGN OF PI REGULATOR FOR TRACKING PROBLEMS OF DISCRETE LINEAR SYSTEMS

XING JIXIANG HUANG YAFENG LI TIECAI
(*Dept. of Applied Mathematics, Harbin Institute of Technology*)

ABSTRACT

A proper formulation for tracking the given value problem of discrete linear multiple input-output systems is presented in this paper. The optimal design is realized using PI regulator. The design method is simple, and keeps the advantages of the "tracking error" approach.

Key words ——PI regulator; tracking problems; optimal design.