任意反馈结构下的分散状态反馈镇定

伍乃骐　李人厚　胡保生
（西安交通大学系统工程研究所）

摘　　要

给定一个系统，在完全分散的状态反馈下，系统可能不能被镇定，这就要求改变系统的反馈结构. 本文首先推导出在任意反馈结构下，分散状态反馈可镇定的条件，然后给出一个简单而有效的方法，用以修改原有的反馈结构，使得系统能被镇定.

关键词——分散控制，固定模，状态反馈，镇定化.

一、引　　言

考虑下列的线性时不变多控制站控制系统

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + \sum_{i=1}^{m} B_i u_i, \\ y_i &= C_i x, \ i = 1, 2, \cdots, m. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

设系统(1)为联合可控可观的. 系统可以写成下列的紧凑形式:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \ y = Cx. \tag{2}$$

设系统由下列的分散状态反馈控制:

$$u = Fx, \tag{3}$$

$F \in \mathscr{F}$ 是具有某种结构的非满矩阵. 如果令 $A_F = A + BF$ 为闭环矩阵，$\mathscr{X}$ 为有限维线性空间，$\mathscr{B}_i = I_m B_i$ 为 B_i 的值域，$N = \{1, \cdots, m\}$ 为控制站的集合. 再令 $\mathscr{R}_i = \langle A_F | B_i \rangle = \mathscr{B}_i + \cdots + A_F^{n-1}\mathscr{B}_i\,(i \in N)$ 为第 i 个控制站的可控子空间，容易证明，存在一个鲁棒集 $\mathscr{F}^* \subset \mathscr{F}$ 使得对任意的 $F \in \mathscr{F}^*$，$\mathscr{R}_i (i \in N)$ 都尽可能大. 于是以后凡提到 $F \in \mathscr{F}$，都设 $F \in \mathscr{F}^*$. 根据这些符号，文献[1]中定义了各个控制所对应的状态子空间 $\mathscr{X}_i (i \in N)$，并得到了下面的结论.

引理 1. 对多控制站分散控制系统(1)，如果 $\mathscr{X}_i$ 是控制站 i 所对应的状态子空间，且对任意的 $i \in N$，在反馈 $F \in \mathscr{F}$ 下有

$$\mathscr{R}_i \cap \mathscr{X}_i = \mathscr{X}_i, \tag{4}$$

那么系统(1)一定可以在分散的状态反馈 $F \in \mathscr{F}$ 下镇定.

本文于1988年4月4日收到.

二、任意反馈结构下的可镇定性条件

为了讨论任意反馈结构下的分散状态反馈的可镇定条件，给出如下的定义。

定义 1. 一个子空间的集合 $E\triangleq\{\mathscr{X}_1,\cdots,\mathscr{X}_m\}$，它由$m$个子空间 $\mathscr{X}_i\subset\mathscr{X}$ $(i\in N)$ 所组成，且每个 $\mathscr{X}_i\subset\mathscr{X}$ 均为系统(1)的部分状态变量所构成，那么称集合 E 为系统(1)的一个状态子空间的集合，其中 m 为系统中控制站的个数。

定义 2. 称系统(1)的一个状态子空间的集合 $E=\{\mathscr{X}_1,\cdots,\mathscr{X}_m\}$ 为一个规范状态子空间的集合，如果所有的状态子空间 $\mathscr{X}_1,\cdots,\mathscr{X}_m$ 相互线性独立，则下式成立：

$$\mathscr{X}_1+\mathscr{X}_2+\cdots+\mathscr{X}_m=\mathscr{X}. \tag{5}$$

定义 3. 系统(1)在 $F\in\mathscr{F}$ 的分散状态反馈下称为非完全的分散状态反馈，如果反馈结构阵 $F\in\mathscr{F}$ 中的任一列 $j(j=1,\cdots,n)$，至少存在着一个 k，使得 $F_{kj}\neq 0$；并且至少存在着一个列 j，使得有一个 $k\in D_i$ 和至少一个 $g\notin D_i$，$F_{kj}\neq 0$ 和 $F_{gj}\neq 0$ 同时成立。

也就是说，非完全的分散状态反馈意味着某一个或某一些状态变量同时向两个或两个以上的控制站反馈，或者说多个控制站获得某些相同的状态信息，即信息共享，称为任意反馈结构。

定义 4. 子空间 $\mathscr{X}_i\subset\mathscr{X}$ 称为非完全分散化状态反馈下对应于第 i 个控制站的状态子空间，如果 $\mathscr{X}_i$ 是由这样的 e_j 所张成，j 表示反馈结构阵 $F\in\mathscr{F}$ 中的第 j 列，且至少存在一个 $k\in D_i$，使得 $F_{kj}\neq 0$；此外，如果对任意的 $g\notin D_i$，满足 $F_{gj}=0$，则 $e_j\in\mathscr{X}_i$；即 e_j 是 $\mathscr{X}_i\subset\mathscr{X}$ 的一个基，如果存在着一个 $g\notin D_i$，有 $F_{gj}\neq 0$，比如说 $g\in D_t$，则必须满足下列条件：

$$e_j\in\mathscr{X}_i,\ \text{或}\ e_j\in\mathscr{X}_t,\ \text{但}\ e_j\notin(\mathscr{X}_i\cap\mathscr{X}_t). \tag{6}$$

由此，在非完全分散化的状态反馈下所得到的状态子空间集合均为规范化的，不过这种集合不是唯一的，而是有多个这样的集合。设有 l 个，并记这些集合为 $E_1,E_2,\cdots,E_l$，$K\triangleq\{1,2,\cdots,l\}$ 为这些集合的指标集。比如对于一个具有四个状态变量，两个控制输入和两个控制站的系统，当 $F=\begin{pmatrix}* & * & 0 & 0\\ 0 & * & * & *\end{pmatrix}$时，$E_1=\{\mathscr{X}_1,\mathscr{X}_2\}$，$\mathscr{X}_1=\{e_1,e_2\}$，$\mathscr{X}_2=\{e_3,e_4\}$ 和 $E_2=\{\tilde{\mathscr{X}}_1,\tilde{\mathscr{X}}_2\}$，$\tilde{\mathscr{X}}_1=\{e_1\}$，$\tilde{\mathscr{X}}_2=\{e_2,e_3,e_4\}$ 都是系统的规范状态子空间集合。由此，根据引理 1，立即可得下列的可镇定性条件。

定理 1. 分散控制系统(1)在非完全的状态反馈 $F\in\mathscr{F}$ 下，如果存在着一个 $k\in K$，使得对规范状态子空间集合 $E_k=\{\mathscr{X}_1,\mathscr{X}_2,\cdots,\mathscr{X}_m\}$ 来说，对任意的 $i\in N$，有

$$\mathscr{R}_i\cap\mathscr{X}_i=\mathscr{X}_i \tag{7}$$

成立，那么系统一定可以在这一状态反馈结构下镇定。

三、反馈结构的改进

当给定的反馈结构 $F\in\mathscr{F}$ 不能镇定系统时，列举所有可能的反馈通道（结构组合间

题)，逐一验证，是不可取的和不现实的，而是需要寻找一种改进的法则．不失一般性，在下面的讨论中，总设现已给定反馈结构$F\in\mathscr{F}$是完全分散的状态反馈的情形．

在文[1]中定义了系统的信息结构的概念，称 $\mathscr{R}_1\cap\mathscr{X}_1+\cdots+\mathscr{R}_m\cap\mathscr{X}_m$ 为系统的有效信息集．满足定理1和引理1的条件时，其有效信息集等于$\mathscr{X}$；反之，如其条件不满足，则必不等于$\mathscr{X}$．因此，应增加这样的反馈通道，使得系统的有效信息集增大，并使之最后达到为$\mathscr{X}$．令现有反馈结构下的有效信息集为

$$\mathscr{S}=\mathscr{R}_1\cap\mathscr{X}_1+\mathscr{R}_2\cap\mathscr{X}_2+\cdots+\mathscr{R}_m\cap\mathscr{X}_m,\tag{8}$$

并设反馈结构修改后，$\mathscr{S}$ 修改为 $\bar{\mathscr{S}}$，$\bar{\mathscr{S}}=\max\{\bar{\mathscr{S}}_1,\cdots,\bar{\mathscr{S}}_l\}$，$\bar{\mathscr{S}}_i(i\in K)$ 为反馈结构修改后，相对于状态子空间集合 E_i 而产生的有效信息集．由于 $\mathscr{S}\neq\mathscr{X}$，则必然存在一个 $e_k\in\mathscr{X}$，而 $e_k\notin\mathscr{S}$．应设法增加这样的反馈通道，使得 $e_k\in\bar{\mathscr{S}}$，以及 $\forall e_t\in\mathscr{S}$，有 $e_t\in\bar{\mathscr{S}}$．如此作下去就能保证有效信息集不断增大，有下列结论．

定理 2． 对于分散控制系统(1)，在分散的状态反馈结构 $F\in\mathscr{F}$ 下，如果系统不具有完全的信息结构(即 $\mathscr{S}\neq\mathscr{X}$)，且有 $e_k\in\mathscr{X}$，$e_k\in\mathscr{X}_i$，以及 $e_k\notin\mathscr{R}_i\cap\mathscr{X}_i$，但有 $\mathscr{R}_i\cap(\mathscr{X}_i+\mathscr{E}_k)=\mathscr{X}_i+\mathscr{E}_k$，那么在反馈阵 $F\in\mathscr{F}$ 的第 k 列中增加对应于第 i 个控制站的反馈通道，即使得对任意的 $g\in D_i$，$F_{gk}\neq 0$，而将反馈结构阵由 $F\in\mathscr{F}$ 修改为 $\bar{F}\in\bar{\mathscr{F}}$，在这一反馈结构下一定存在着一个规范状态子空间集合 $E_t(t\in K)$，使得下面的关系满足：

$$e_d\in\bar{\mathscr{S}}(\forall e_d\in\mathscr{S},d\neq k),\ \text{和}\ e_k\in\bar{\mathscr{S}},\tag{9}$$

其中 $\mathscr{E}_k$ 为单位向量 e_k 所张成的子空间．

需要指出的是，当有多个这样的 e_k 不属于 $\mathscr{S}$ 时，要按照上面的方法一个一个地处理，并且每处理完毕一个后，要在新的反馈结构下重新验证 $\bar{\mathscr{S}}$，因为当处理了一个 e_k 后，有可能使得其它不属于 $\mathscr{S}$ 的 e_t 也属于 $\bar{\mathscr{S}}$ 了．至于 $F\in\mathscr{F}$ 不是完全分散状态反馈的情形，只要在已给方法上稍作修改就行了．

四、例　子

例 1． 考虑系统

$$\dot{x}=\left[\begin{array}{cc|cc|cc}0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\\hline 1&0&0&1&0&1\\0&0&0&0&0&0\\\hline 0&0&0&1&0&1\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right]x+\left[\begin{array}{c|c|c}0&0&0\\1&0&0\\\hline 0&0&0\\0&1&0\\\hline 0&0&0\\0&0&1\end{array}\right]u.\tag{10}$$

已给定下列的完全分散化的状态反馈结构：

$$F=\left[\begin{array}{cc|cc|cc}*&*&0&0&0&0\\\hline 0&0&*&*&0&0\\\hline 0&0&0&0&*&*\end{array}\right],\tag{11}$$

在这一反馈结构下的状态子空间为 $\mathscr{X}_1=\{e_1,e_2\}$，$\mathscr{X}_2=\{e_3,e_4\}$，$\mathscr{X}_3=\{e_5,e_6\}$，

可求得

$$\mathscr{R}_1\cap\mathscr{X}_1=\mathscr{X}_1,\quad \mathscr{R}_2\cap\mathscr{X}_2=\{e_4\},\quad \mathscr{R}_3\cap\mathscr{X}_3=\{e_6\},\tag{12}$$

可知系统不具有完全的信息结构，$e_3\notin\mathscr{S}$，$e_5\notin\mathscr{S}$，但有 $\mathscr{R}_1=\mathscr{X}$，得 $\mathscr{R}_1\cap(\mathscr{X}_1+\mathscr{E}_3)=\mathscr{X}_1+\mathscr{E}_3$，则反馈结构应修改为

$$\bar{F}=\begin{bmatrix} * & * & * & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & * & * & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \end{bmatrix}.\tag{13}$$

可以断言，$e_3\in\bar{\mathscr{S}}$，但还有 $e_5\notin\mathscr{S}$. 重新验证 $\bar{\mathscr{S}}$，得 $\bar{\mathscr{S}}=\mathscr{X}$，且对 $E_1=\{\hat{\mathscr{X}}_1=\{e_1, e_2, e_3\}, \hat{\mathscr{X}}_2=\{e_4\}, \hat{\mathscr{X}}_3=\{e_5, e_6\}\}$ 来说满足定理 1 的条件. 如果先处理 e_5，则反馈结构应修改为

$$\bar{F}=\begin{bmatrix} * & * & 0 & 0 & * & 0\\ 0 & 0 & * & * & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \end{bmatrix},\tag{14}$$

也能镇定系统，这说明反馈结构的修改并非唯一.

参 考 文 献

[1] 伍乃骐，李人厚，胡保生，局部状态反馈的可镇定性，控制理论及应用，6(1988)，No. 1.

[2] Sezer, M. E. and Siljak, D. D., On Structural Decomposition and Stabilization of Large-scale Control Systems, *IEEE Trans.*, **AC-26**(1981), 439—444.

[3] Loparo, K. A. and Kuo, G. S., On the Realization of Input Decentralized Representation for Large-scale Systems, *IEEE Trans.*, **AC-30**(1985), 909—912.

STABILIZATION OF DECENTRALIZED STATE FEEDBACK WITH ARBITRARY FEEDBACK STRUCTURE

Wu Naiqi, Li Renhou and Hu Baosheng

(Xi'an Jiaotong University)

Abstract

For a given control system, it is possible that the system may not be stabilized by pure decentralized state feedback, and its feedback structure has to be changed. In this paper, the condition under which the system can be stabilized by decentralized state feedback with arbitrary feedback structure is presented first, then a simple and effective approach for updating the feedback structure such that the stabilizability condition can be satisfied is given.

Key words——Decentrailized control; state feedback; fixed mode; stabilization.