第 16 卷 第 6 期　　自 动 化 学 报　　Vol. 16, No. 6
1990 年 11 月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　Nov., 1990

串行生产线的"线性"动态方程描述及其扰动分析新算法

王 秀 峰
（南开大学计算机与系统科学系）

摘　　要

本文利用极大代数工具导出了串行生产线在极大代数意义下扰动传播的状态增量"线性"方程，并根据此方程给出了实现扰动分析的新算法．此算法具有结构简单、便于计算机实现等优点．

关键词——串行生产线，扰动分析，标称轨线．

一、串行生产线的线性动态方程和扰动传播方程

考虑由 n 台机器组成的串行生产线，如图 1 所示．

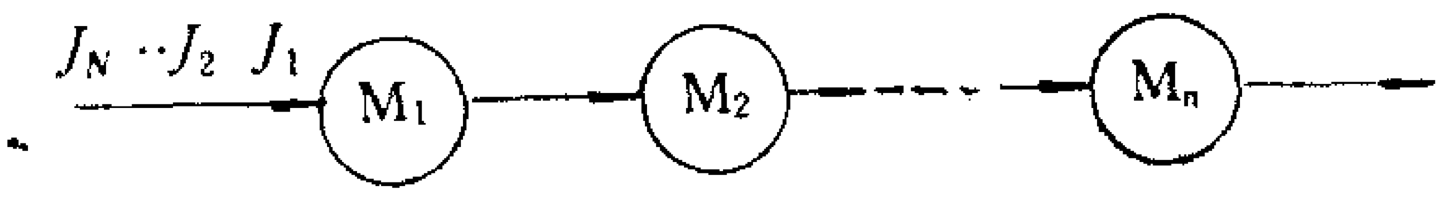

图 1　串行生产线示意图

工件 $J_1, J_2, \cdots, J_N$ 依次进入生产线加工．每个工件在机器 $M_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 上加工的顺序皆为 $M_1, M_2, \cdots, M_n$，每台机器对工件的加工顺序也相同，并假定每台机器前的存储空间为无限大．记 $p_i(k)$ 为机器 M_i 对工件 J_k 的加工时间，$x_i(k)$ 为机器 M_i 加工完工件 J_k 的时刻，称为系统的状态变量，$y(k)$ 为工件 $J(k)$ 离开生产线的时刻，称为系统的输出变量．

令 $\boldsymbol{x}^T(k)=(x_1(k), x_2(k), \cdots, x_n(k))$ 为系统的状态向量．利用极大代数理论中加法$\oplus$和乘法$\otimes$两种基本运算规则：$a\oplus b \triangleq \max\{a,b\}$，$a\otimes b\triangleq a+b$，并以 $\varepsilon(=-\infty)$和 $e(=0)$ 分别表示极大代数意义下的零元和单位元（本文用 ab 表示 $a\otimes b$，而用 $a\cdot b$ 表示通常意义下的乘法），不难得到如下状态方程[1)]：

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}(k)=A(k)\boldsymbol{x}(k-1),\\ y(k)=C\boldsymbol{x}(k-1),\end{cases} \tag{1.1}$$

其中

本文于 1988 年 6 月 3 日收到．

1）涂奉生，乞敬换，具有有限存储器的串并行生产线的状态方程描述及其性能分析，离散事件动态系统理论及其在 CIMS 中的应用学术讨论会论文集，1988，88—92．

$$A(k)=\begin{bmatrix} p_{11}(k) & & \\ p_{21}(k) & p_{22}(k) & \ddots \\ \vdots & \vdots & \\ p_{n1}(k) & p_{n2}(k)\cdots & p_{nn}(k) \end{bmatrix},\quad C=(\varepsilon,\cdots,\varepsilon,e),\tag{1.2}$$

$$p_{ii}(k)\triangleq p_i(k),\quad p_{ij}(k)\triangleq p_i(k)p_{i-1}(k)\cdots p_j(k),\quad (i>j).\tag{1.3}$$

在服务台排队系统的研究中，最常用的是指数服务时间模式。自动生产线系统也可看作工件是顾客、机器为服务台的排队系统[1]。因此假定机器 M_i 对工件的加工时间 $p_i(k)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 都是服从指数分布的，并假定 M_i 的平均加工时间为 $\bar{p}_i$，那么 $p_i(k)$ 的分布函数为 $F_i(p_i(k))=1-e^{-p_i(k)/\bar{p}_i}$。由概率统计知识可知，如果 $r_i(k)$ 是 $[0,1]$ 区间上独立均匀随机变量，则 $-\bar{p}_i\cdot\ln[1-r_i(k)]$ 服从于均值为 $\bar{p}_i$ 的指数分布。因此可令

$$p_i(k)=-\bar{p}_i\cdot\ln[1-r_i(k)],\quad i=1,2,\cdots,n,\ k=1,2,\cdots,\tag{1.4}$$

其中 $\bar{p}_i$ 是参数，$r_i(k)$ 是 $[0,1]$ 独立均匀随机数。

令随机向量

$$\boldsymbol{\xi}=\{r_1(1),r_1(2),\cdots;r_2(1),r_2(2),\cdots;\cdots;r_n(1),r_n(2),\cdots\},\tag{1.5}$$

则 $\boldsymbol{\xi}$ 代表了串行生产线的随机性，$\boldsymbol{\xi}$ 的每个实现确定了系统的实际轨线。

假定某台机器（比如 M_1）的平均加工时间有一个小扰动 $\Delta\bar{p}_1(>0)$，其它机器不变，则称此系统为受扰系统，记为 S'；扰动前的系统记为 S。受扰系统的方程为

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}'(k)=A'(k)\boldsymbol{x}'(k-1),\\ y'(k)=C'\boldsymbol{x}'(k),\end{cases}\tag{1.6}$$

其中

$$A'(k)=\begin{bmatrix} p'_{11}(k) & & \\ p'_{21}(k) & p'_{22}(k) & \ddots \\ \vdots & \vdots & \\ p'_{n1}(k) & p'_{n2}(k)\cdots & p'_{nn}(k) \end{bmatrix},\quad C'=C,\tag{1.7}$$

$$p'_{ii}(k)=p'_i(k);\ p'_{ij}(k)=p'_i(k)p'_{i-1}(k)\cdots p'_j(k),\ (i>j),$$

$$p'_1(k)=-(\bar{p}_1+\Delta\bar{p}_1)\cdot\ln[1-r_1(k)];\ p'_i(k)=p_i(k),\ i=2,3,\cdots,n.$$

假定 $\Delta\bar{p}_1$ 充分小，S 和 S' 是相似的[2]，令

$$\Delta\boldsymbol{x}(k)\triangleq\boldsymbol{x}'(k)-\boldsymbol{x}(k)=[x'_1(k)-x_1(k),x'_2(k)-x_2(k),\cdots,x'_n(k)-x_n(k)]^T,\tag{1.8}$$

$$\Delta p_i(k)\triangleq p'_i(k)-p_i(k),\tag{1.9}$$

注意到在极大代数意义下的 $\oplus$，$\otimes$ 规则，则有

$$\begin{aligned}\Delta x_1(k)&=x'_1(k)-x_1(k)=p'_1(k)x'_1(k-1)-p_1(k)x_1(k-1)\\&=\Delta p_1(k)\Delta x_1(k-1),\\ \Delta x_2(k)&=x'_2(k)-x_2(k)=[p'_{21}(k)x'_1(k-1)\oplus p'_2(k)x'_2(k-1)]\\&\quad-[p_{21}(k)x_1(k-1)\oplus p_2(k)x_2(k-1)].\end{aligned}$$

由于 S 和 S' 相似（关键路径一样），所以上式右端如果一个中括号中某项取最大值，则另一个中括号中相应项也取其最大值。由此可得

$$\Delta x_2(k)=\begin{cases}\Delta p_1(k)\Delta x_1(k-1), & \text{当 } p_{21}(k)x_1(k-1)=\{p_{21}(k)x_1(k-1),\\ & \quad p_2(k)x_2(k-1)\},\\ \Delta x_2(k-1), & \text{其他。}\end{cases}$$

一般地有

$$\Delta x_i(k)=\begin{cases}\Delta p_1(k)\Delta x_1(k-1), & \text{当 } p_{i1}(k)x_1(k-1)=\sum_{l=1}^{i}\oplus p_{il}(k)x_l(k-1),\\ \Delta x_j(k-1), & \text{当 } p_{ij}(k)x_j(k)=\sum_{l=1}^{i}\oplus p_{il}(k)x_l(k-1),\ 2\leqslant j\leqslant i,\end{cases}\tag{1.10}$$

其中

$$\Delta p_1(k)=p_1'(k)-p_1(k)=\Delta\bar{p}_1\cdot\ln[1-r_1(k)]=\Delta\bar{p}_1\cdot p_1(k)/\bar{p}_1.\tag{1.11}$$

为了描述方便,在矩阵 $A(k)$ 上定义示性函数

$$\chi_{ij}=\begin{cases}e, & \text{当 } p_{ij}(k)x_j(k-1)=\sum_{l=1}^{i}\oplus p_{il}(k)x_l(k-1),\ 1\leqslant j\leqslant i,\\ \varepsilon, & \text{其他}.\end{cases}\tag{1.12}$$

这时描述扰动传播的状态增量方程可写为

$$\begin{cases}\Delta \boldsymbol{x}(k)=\Delta A_1(k)\Delta\boldsymbol{x}(k-1),\\ \Delta y(k)=C\Delta\boldsymbol{x}(k),\end{cases}\tag{1.13}$$

其中

$$\Delta A_1(k)=\begin{bmatrix}\Delta p_1(k) & & & \\ \Delta p_1(k)\chi_{21} & \chi_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \Delta p_1(k)\chi_{n1} & \chi_{n2} & \cdots & \chi_{nn}\end{bmatrix}.\tag{1.14}$$

若对机器 $M_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的平均加工时间 $\bar{p}_i$ 给以扰动 $\Delta\bar{p}_i$,其它机器不变,则得到扰动传播的状态增量方程为

$$\begin{cases}\Delta \boldsymbol{x}(k)=\Delta A_i(k)\Delta\boldsymbol{x}(k-1),\\ \Delta \boldsymbol{y}(k)=C\Delta\boldsymbol{x}(k),\end{cases}\tag{1.15}$$

其中

$$\begin{array}{r}\\ \\ \Delta A_i=\\ i\rightarrow\\ \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix}\chi_{11} & & & & & \\ \chi_{21} & \chi_{22} & & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & \\ \Delta p_i(k)\chi_{i1} & \cdots & \Delta p_i(k)\chi_{ii} & & & \\ \vdots & & \vdots & \ddots & & \\ \Delta p_i(k)\chi_{n1} & \cdots & \Delta p_i(k)\chi_{ni} & \chi_{n(i+1)} & \cdots & \chi_{nn}\end{bmatrix}.\tag{1.16}$$

$$\Delta p_i(k)\triangleq p_i'(k)-p_i(k)=\Delta\bar{p}_i\cdot\ln[1-r_i(k)]=\Delta\bar{p}_i\cdot p_i(k)/\bar{p}_i,\tag{1.17}$$

注 1. 矩阵 $\Delta A_i(k)$ 中每一行只有一个非零(ε)元.

注 2. $\Delta A(k)$ 虽然依赖于 $A(k)$ 和 $\boldsymbol{x}(k-1)$ 的取值,但在仿真或实际采样过程中是容易得到的. 如果系统 S 的状态轨线 $\{\boldsymbol{x}(k);k=1,2,\cdots\}$ 是由数字仿真得到,在每一步用方程(1.1)求$\boldsymbol{x}(k)$的过程中同时记录下 $x_i(k)(i=1,2,\cdots,n)$ 取的是 $\{p_{i1}(k)x_1(k-1),\cdots,p_{ii}(k)x_i(k-1)\}$ 中的第几项. 例如取其中的第 j 项 $(1\leqslant j\leqslant i)$, 则构造 $\Delta A(k)$ 时, $\chi_{ij}=e$, $\chi_{il}=\varepsilon$, $l\neq j$. 如果状态轨线是由实际采样得到,则在记录 $x_i(k)$ 的同时,记录机器 M_i 加工完第 $k-1$ 个工件后与其紧连的上位机共有几台处于空闲链中,如果有 l 台(包括 M_i 本身)机器处于空闲状态,则 $\chi_{i(i-l)}=e$, $\chi_{ij}=\varepsilon$, $j\neq i-l$.

二、扰动分析估计算法

仍假定对机器 M_1 给以扰动,使其平均加工时间增加 $\Delta\bar{p}_1$,这时 $\Delta p_1(k)$ 仍由(1.11)式

给出. 当 $\Delta \boldsymbol{x}(0)=(e, \cdots, e)^T$ 时，由方程(1.13),(1.14)和(1.11)式不难看出，$\Delta x_i(k)$, $\Delta y(k)$ 都分别与 $\Delta \bar{p}_1$ (在通常意义下)成比例,即

$$\begin{cases}\Delta x_i(k) = \alpha_i(k) \cdot \Delta \bar{p}_1, \quad i = 1, 2, \cdots, n, \\ \Delta y(k) = \alpha_n(k) \cdot \Delta \bar{p}_1,\end{cases} \tag{2.1}$$

其中系数 $\alpha_i(k)$ 由方程(1.13)唯一确定.

设加工 N (充分大)个工件所用时间为 T. 如果第一个工件进入系统的时刻 $t=0$,则第 N 个工件离开系统的时刻即为 T,即 $T = x_n(N) = y(N)$, 受扰系统总加工时间

$$T' \triangleq T + \Delta T = y(N) + \Delta y(N).$$

定义生产率为 $Tp = N/T$, 那么 $Tp' = N/(T+\Delta T)$, 生产率对参数 $\bar{p}_1$ 的样本导数为

$$\frac{\partial Tp}{\partial \bar{p}_1} = \lim_{\Delta \bar{p}_1 \to 0} (Tp' - Tp)/\Delta \bar{p}_1. \tag{2.2}$$

由于

$$\begin{aligned}(Tp' - Tp)/\Delta \bar{p}_1 &= \left(\frac{N}{T+\Delta T} - \frac{N}{T}\right)\Big/ \Delta \bar{p}_1 \\ &= -\frac{N \cdot \alpha_n(N) \cdot \Delta \bar{p}_1}{y^2(N) \cdot \Delta \bar{p}_1 + \alpha_n(N) \cdot y(N) \cdot \Delta \bar{p}_1^2},\end{aligned}$$

所以

$$\partial Tp/\partial \bar{p}_1 = -N \cdot \alpha_n(N)/y^2(N). \tag{2.3}$$

总加工时间 T 对参数 $\bar{p}_1$ 的样本导数为

$$\frac{\partial T}{\partial \bar{p}_1} = \lim_{\Delta \bar{p}_1 \to 0} \frac{T' - T}{\Delta \bar{p}_1} = \lim_{\Delta \bar{p}_1 \to 0} \frac{\Delta y(N)}{\Delta \bar{p}_1} = \alpha_n(N). \tag{2.4}$$

从(2.3)式和(2.4)式可以看到，$\partial Tp/\partial \bar{p}_1$ 和 $\partial T/\partial \bar{p}_1$ 都与 $\Delta \bar{p}_1$ 的大小无关，这个性质给样本导数的计算带来很大方便. 在实际计算时，不妨取 $\Delta \bar{p}_1 = \bar{p}_1$，这时(1.11)式变为 $\Delta p_1(k) = p_1(k)$.

假定取得了有关状态 $\{\boldsymbol{x}(k)\}$、加工时间 $\{p_i(k)\}$ 以及有关示性函数 χ_{ij} 的有关信息 $\{\boldsymbol{\theta}(k)\}$,用扰动分析法求样本导数的计算步骤如下:

1) 置 $t=0$, 置向量 $\Delta \boldsymbol{x} = (e, e, \cdots, e)^T$;

2) 对于 $k = 1, 2, \cdots, N$ 作: 据 $p_i(k)$ 和 $\boldsymbol{\theta}(k)$ 并取 $\Delta p_i(k) = p_i(k)$，按(1.16)式构造 $\Delta A_i(k)$,再由方程(1.15)计算 $\Delta \boldsymbol{x}(k)$ 和 $\Delta y(k)$;

3) 计算 $\partial T/\partial \bar{p}_i = \Delta y(N)/\bar{p}_i$, $\partial Tp/\partial \bar{p}_i = -[N/y^2(N)] \cdot [\Delta y(N)/\bar{p}_i]$.

由此算法得到的样本导数称为生产率的扰动分析估计，它是生产率期望导数的无偏估计[2].

三、结　　论

本文对于具有无限存储的串行生产线给出了扰动传播的线性增量方程，它可以方便地用于扰动分析的计算。文中给出的实现扰动分析的算法可以用来估计生产率对各机器

平均加工时间的导数．该算法结构简单，便于计算机实现．但本文的结果只限于无限存储的情况，因此在应用中有一定局限性．对于有限存储的情况将在另文发表．

参 考 文 献

[1] Ho, Y. C. and Cassandras, C., A New Approach to the Analysis of Discrete Event Dynamic Systems, *Automatica,* 19(1983), 2, 149—167.

[2] Gao Xiren and Ho, Y. C., Sensitivity Analysis and Optimization of Throughput in a Production Line with Blocking, *IEEE Tran.* AC-32(1987), 11, 959—967.

THE LINEAR DYNAMIC EQUATION OF SERIAL PRODUCTION LINE AND A NEW ALGORITHM OF PERTURBATION ANALYSIS

WANG XIUFENG

(*Nankai University*)

ABSTRACT

In this paper we give a state increment linear equation of perturbation propagation for the serial production line by maxalgebra theory, and on the basis of the equation, a new algorithm of perturbation analysis is suggested. The algorithm has simple structure and can be realized easily with computer.

Key words ——Serial production line; perturbation analysis; nominal trajectory.